УМФ
2-й семестр – весна 2019 г
Лекция 4
Точечные вихри. Уравнения Кирхгофа. Уравнение Пуассона на плоскости. Формула Грина для оператора Лапласа. Срезающая функция, усреднение и регуляризация.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

19 марта 2019 г.

Движение системы точечных вихрей на плоскости

Определение 1. Функцию

$$W(z|z_1,\dots,z_N)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=1}^{N}\varkappa_j\ln(z-z_j),\ \ \varkappa_j\in\mathbb{R},\ \ z_k\in\mathbb{C},$$

называют потенциалом системы точечных вихрей интенсивностей $\varkappa_j$, сосредоточенных в точках z_j.

Простейшая модель вихревого движения жидкости – движение системы точечных вихрей в создаваемом ими безграничном потоке. В таком случае $z_j=z_j(t)$ – вихри меняют свое положение со временем. Уравнения их движения пишутся так

$$\dot{z}_k^*=\frac{1}{2i\pi}\,\partial_z\sum_{k\neq j}\varkappa_j\ln(z-z_j)\Big|_{z=z_k}=\frac{1}{2i\pi}\sum_{k\neq j}\frac{\varkappa_j}{z_k-z_j} \qquad (1)$$

Таким образом, скорость каждого из рассматриваемых вихрей в каждый момент времени совпадает со скоростью материальной частицы потока, создаваемого *всеми остальными вихрями*. Этот принцип принято формулировать так: *вихрь сам на себя не действует.*

Системy (1) называют *уравнениями Кирхгофа* движения точечных вихрей в безграничном потоке.

Гамильтоновость уравнений Кирхгофа

Уравнения Кирхгофа могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\varkappa_m \dot{z}_m^* = \partial_{z_m} \mathcal{H}(z_1, \dots, z_N), \quad \mathcal{H} = \frac{1}{4i\pi} \sum_{j \neq m}^{N} \varkappa_j \varkappa_m \ln(z_m - z_j)^2, \tag{2}$$

функция $\mathcal{H}$ – комплексная функция Гамильтона. Заметим, что $\mathcal{H}$ аналитична по каждому аргументу, поэтому (с учётом уравнений Коши-Римана)

$$\partial_{z_m} \mathcal{H} = \partial_{y_m} H - i \partial_{x_m} H, \quad \mathcal{H} = F + iH, \; z_m = x_m + iy_m; \; m = 1 \dots N;$$

отсюда находим вещественную гамильтонову форму системы Кирхгофа (1):

$$\varkappa_m \dot{x}_m = H_{y_m}; \; \varkappa_m \dot{y}_m = -H_{x_m}; \; H = \frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq m}^{N} \varkappa_j \varkappa_m ln \frac{1}{(x_m - x_j)^2 + (y_m - y_j)^2}. \tag{3}$$

Важное следствие гамильтоновости – сохраненение функции Гамильтона $H = \mathrm{Re}\mathcal{H}$:

$$\frac{d}{dt} H(z_1(t), \dots, z_N(t)) \equiv 0 \tag{4}$$

для произвольного решения $(z_1(t), \dots, z_N(t))$ системы (2) (или (3)).

Законы сохранения

Равенства типа (4) называются *законами сохранения*, а сохраняющиеся вследствие этих законов величины – *интегралами или константами движения системы.*

Теорема 1. Уравнения Кирхгофа в случае безграничного потока допускают законы сохранения функции Гамильтона, а также следующих величин

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \kappa_j z_j; \quad \mathcal{M} = \sum_{j=1}^{N} \kappa_j z_j z_j^*$$

◀ Докажем сохранение функции Гамильтона.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(z_1(t), \ldots, z_N(t)) = \sum_{m=1}^{N} \mathcal{H}_{z_m} \dot{z}_m = \sum_{m=1}^{N} \mathcal{H}_{z_m} \left(\mathcal{H}_{z_m}\right)^* \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\mathrm{Im}\,\frac{d}{dt}\mathcal{H}(z_1(t), \ldots, z_N(t)) = \frac{d}{dt}H(z_1(t), \ldots, z_N(t)) \equiv 0.$$

Переходим к $\mathcal{M}$

$$\dot{\mathcal{M}} = \sum_{j=1}^{N} \kappa_j \left(\dot{z}_j z_j^* + z_j \dot{z}_j^*\right) = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{N} \kappa_j \left(z_j \dot{z}_j^*\right) = 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{N} \kappa_j \left(z_j \mathcal{H}_{z_j}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\frac{i}{\pi}\sum_{j,m=1,j\neq m}^{N}\kappa_j\kappa_m\frac{z_j}{z_j-z_m} = \mathrm{Re}\frac{i}{2\pi}\sum_{j,m=1,j\neq m}^{N}\kappa_j\kappa_m\left(\frac{z_j}{z_j-z_m}-\frac{z_m}{z_j-z_m}\right)=0$$

Сохранение $\mathcal{P}$ следует непосредственно из уравнений (2). ▶

Замечание 1. Сохранение функции Гамильтона имеет место для любой гамильтоновой системы, независимо от конкретного выражения функции Гамильтона. Существование интегралов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{P}$ обусловлено тем, что в случае безграничной жидкости система Кирхгофа инвариантна относительно групп преобразований

$$\text{сдвиги:}\quad z_m\mapsto z_m+\zeta,\ \zeta\in\mathbb{C},\ \ m=1\dots N;$$

$$\text{повороты:}\quad z_m\mapsto\omega z_m,\ \omega\in\mathbb{C},|\omega|=1,\ \ m=1\dots N.$$

Аналогичные законы сохранения имеют место для любой гамильтоновой системы, обладающей инвариантностью относительно групп преобразований, гладко зависящих от числовых параметров (это – теорема Эмми Нётер, см., например, `В.И. Юдович Лекции по курсу «Математические модели естественных наук»`, http://kvm.math.rsu.ru/mmen, и `Арнольд В.И. «Математические методы классической механики»`).

Движение двух вихрей в безграничном потоке.

Функция Гамильтона (вещественная) системы Кирхгофа, импульс и момент вихревой пары имеют вид:

$$H = \frac{\kappa_1\kappa_2}{2\pi}\ln\frac{1}{|z_1 - z_2|}; \quad \mathcal{P} = \kappa_1 z_1 + \kappa_2 z_2; \quad \mathcal{M} = \kappa_1 z_1 z_1^* + \kappa_2 z_2 z_2^*;$$

Ввиду имеющихся законов сохранения,

$$H(z_1(t), z_2(t)) = \mathrm{const}; \quad \mathcal{P}(z_1(t), z_2(t)) = \mathrm{const}; \quad \mathcal{M}(z_1(t), z_2(t)) = \mathrm{const};$$

и эти константы движения определяются начальными положениями вихрей. В частности, расстояние между вихрями не зависит от выбора начала отсчёта, и остаётся постоянным:

$$|z_1 - z_2| = |\zeta_1 - \zeta_2| = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi H}{\kappa_1\kappa_2}} \overset{\mathrm{def}}{=} \rho.$$

Пишем уравнения Кирхгофа для вихревой пары

$$\dot{z}_1^* = \frac{\kappa_2}{2\pi(z_1 - z_2)}; \quad \dot{z}_2^* = \frac{\kappa_1}{2\pi(z_2 - z_1)}; \tag{5}$$

Полагаем $z_1 - z_2 = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$; находим

$$-i\rho\dot{\theta}\mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{(\kappa_2 + \kappa_1)\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i\pi\rho} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{2\pi\rho^2} \overset{\mathrm{def}}{=} \Omega = \mathrm{const}, \Longrightarrow \theta = \Omega t + \theta_0. \tag{6}$$

Движения «общего положения»

Итак, отрезок $z_2 z_1$ вращается равномерно с угловой скоростью Ω. Если $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, то $\Omega = 0$. Этот особый случай рассмотрим позже.

Пусть $\kappa_1 + \kappa_2 \neq 0$. Начальные позиции вихрей определяют точку $\mathcal{P} \in \mathbb{C}$. Точка

$$p = \frac{\mathcal{P}}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{\kappa_1 z_1 + \kappa_2 z_2}{\kappa_1 + \kappa_2}; \qquad (7)$$

лежит на прямой $z_1 z_2$. Действительно, пишем уравнение этой прямой в виде

$$\mathrm{Im}\, \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = 0,$$

и видим, что

$$\frac{p - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(\kappa_1 z_1 + \kappa_2 z_2) - (\kappa_1 + \kappa_2) z_1}{(\kappa_1 + \kappa_2)(z_2 - z_1)} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \in \mathbb{R}.$$

Итак, доказана

Теорема 2. Движение пары точечных вихрей с интенсивностями κ_1, κ_2 : $\kappa_1 + \kappa_2 \neq 0$ в безграничном потоке заключаются в следующем: отрезок прямой, соединяющий вихри, равномерно вращается с угловой скоростью Ω вокруг неподвижной точки p, которая также принадлежит соединяющей вихри прямой. Величины Ω, p – константы движения, и определяются начальными позициями вихрей по формулам (6,7).

Вихревая пара Ламба

Пусть $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$. В таком случае $\rho = |z_1 - z_2| = \mathrm{const}$, $\theta = \arg(z_1 - z_2) = \mathrm{const}$. Таким образом, длина и угол наклона отрезка $z_1 z_2$ сохраняются. Поэтому концы отрезка двигаются по параллельным прямым с одинаковыми скоростями:

$$V = \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = -\frac{\kappa}{2i\pi(z_1 - z_2)^*} = \frac{i\kappa \mathrm{e}^{-i\theta}}{2\pi\rho}, \quad \kappa = \kappa_1 = -\kappa_2.$$

(эти равенства следуют из уравнений Кирхгофа (5)). Отсюда

$$\mathrm{Re}\left(V(z_1 - z_2)^*\right) = 0 \implies \arg V - \theta = \frac{\pi \,\mathrm{sgn}\, \kappa}{2}$$

Теорема 3. Движение пары точечных вихрей с противоположными интенсивностями $\kappa_1 = -\kappa_2 = \kappa$ в безграничном потоке заключаются в следующем: вихри движутся равномерно и прямолинейно вдоль перпендикуляров к соединяющему вихри отрезку с одинаковой скоростью

$$U = \frac{|\kappa|}{2\pi\rho}$$

Величина ρ определяется начальными позициями вихрей по формуле (6).

Точечные вихри в ограниченной области.

Пусть $\zeta \mapsto F(\zeta, z)$ – конформное отображение односвязной области D на единичный круг $\forall\ z \in D$, причём $F(z, z) = 0$. Рассмотрим комплексный потенциал

$$W(\zeta, z) = \frac{1}{2i\pi} \ln F(\zeta, z)$$

Предложение 1. Пусть

$$z \in D,\ \Omega \subset D,\ \Gamma = \partial\Omega,\ z \notin \Gamma,\ V(\zeta, z) = W_\zeta{}^*(\zeta, z) = (u + iv)(\zeta, z)$$

Тогда

$$\forall\ z \in D \int\limits_\Gamma V^*(\zeta, z) d\zeta = \begin{cases} 1, & z \in \Omega \\ 0, & z \notin \Omega \end{cases}$$

◀ Пусть $\widetilde{\Omega} = F(\Omega, z)$, тогда $\partial\widetilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\Gamma} = F(\Gamma, z)$, и $z \in \Omega \Leftrightarrow 0 \in \widetilde{\Omega}$.

$$\int\limits_\Gamma W_\zeta(\zeta, z) d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\Gamma \frac{F_\zeta(\zeta, z) d\zeta}{F(\zeta, z)} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_\Gamma \frac{F_\zeta(\zeta, z) d\zeta}{F(\zeta, z)} = \int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{d\tilde{\zeta}}{2i\pi\tilde{\zeta}}, \qquad \tilde{\zeta} = F(\zeta|z).$$

Отсюда следует доказываемое. ▶

Уравнения Киргхгофа в ограниченной области.

Замечание 3. Предложение 1 показывает, что потенциал $W(\zeta, z)$ описывает течение с циркуляцией и потоком, соответствующими точечному вихрю, расположенному в точке z

Предложение 2. $\Psi = \mathrm{Im}\, W = 0$ на $S = \partial D$.
◄ Следует прямо из определения W ►.

Замечание 4. Так как $\Psi = 0$ на S, этак кривая есть линия тока, так что скорость течения направлена по касательной к ней в каждой её точке.

Ввиду предложений 1-2, функцию $W(\zeta, z)$ естественно рассматривать как потенциал течения, создаваемого точечным вихрем, расположенным в заданной точке z, лежащей внутри области D с непроницаемой для жидкости границей.

Уравнения Кирхгофа для системы N вихрей с интенсивностями κ_j, $j = 1, \dots, N$ в ограниченной области имеют вид

$$\dot{z}_j = \kappa_j U(z_j) + \sum_{m=1, m\neq j}^{N} \kappa_m W'_\zeta(z_j, z_m), \quad U(z_j) = \lim_{\zeta \to z_j} \left(W(\zeta, z_j) - \frac{1}{2i\pi} \ln(\zeta - z_j) \right)'_\zeta \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, N.$$

Гамильтоновость системы Кирхгофа в случае области

Замечание 5. Скорости $U(z_j)$ выражают вклад границы в движение вихря.

Теорема 4. Гамильтонова форма уравнения Кирхгофа в случае конечной области имеет вид

$$\kappa_m \dot{x}_m = H_{y_m}; \;\; \kappa_m \dot{y}_m = -H_{x_m}; \tag{9}$$

$$H = \sum_{j=1}^{N} \kappa_j \left(\frac{\kappa_j g(z_j, z_j)}{2} + \sum_{j \neq m}^{N} \kappa_m G(z_j, z_m) \right). \tag{10}$$

$$G(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|F(\zeta, z)|}, \quad g(\zeta, z) \overset{\text{def}}{=} G(\zeta, z) - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} \tag{11}$$

Замечание 6. Здесь G – функция Грина области течения, а g называют отражённой или регулярной частью функции Грина.

◀ Имеем (как и в случае безграничного потока)

$$\mathcal{W} = S + iG, \; \zeta = \xi + i\eta; \; \partial_\zeta W = \partial_\eta G - i\partial_\xi G,$$

подставляем в систему Кирхгофа (8), разделяем вещественную и мнимую части, и находим (9-11). ▶

Один вихрь в круге

В случае круга

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^*\zeta - 1}{\zeta - z}\right| = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\sigma}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\sigma},\ \sigma = \cos(\alpha-\beta),\ z = r\mathrm{e}^{i\alpha},\ \zeta = \rho\mathrm{e}^{i\beta}$$

(вывод см. в примере 1 из лекции 1); соответственно,

$$g(\zeta,z) = \frac{1}{4\pi}\ln\left(1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\sigma\right);$$

$$H = \frac{\kappa^2 g(z,z)}{2} = \frac{\kappa^2}{8\pi}\ln(1-r^2)^2,$$

где κ – интенсивность вихря, и уравнения Кирхгофа принимают вид

$$\dot{x} = \frac{\kappa}{8\pi}\partial_y\ln(1-r^2)^2;\quad \dot{y} = -\frac{\kappa}{8\pi}\partial_x\ln(1-r^2)^2;\quad r^2 = x^2 + y^2$$

Из сохранения функции Гамильтона вытекает, что $r = \mathrm{const}\ \forall t \implies$ вихрь двигается по окружности, концентрической с границей круга.

Уравнение Пуассона на плоскости

Определение 2. Уравнение $\Delta\psi + f = 0$, где функция u неизвестна, а f – задана, называется уравнением Пуассона.

Попробуем решить уравнение Пуассона на плоскости. Пусть Ω – ограниченная область, и $f(x, y) = 0$ при $(x, y) \notin \Omega$. Накроем область Ω сеткой с квадратными ячейками, и пусть линии сетки параллельны координатным осям. Занумеруем ячейки сетки, содержащие порции Ω ненулевой меры, двумя индексами $j = 1..J$, $k = 1..K$. Пусть Q_{jk} – ячейка с индексами j, k. Тогда

$$Q_{jk} = (x_j, x_{j+1}) \times (y_k, y_{k+1}),\ \ x_j = x_0 + jh,\ \ y_k = y_0 + kh,$$

где $h > 0$ – шаг сетки.

Пусть χ_{jk} – характеристическая функция Q_{jk} и $f_{jk} = \chi_{jk} f$. Предположим, что $\Delta\psi_{jk} + f_{jk} = 0$. Введём векторное поле с компонентами $\mathbf{v}_{jk} = (u_{jk}, v_{jk})$, $u_{jk} = {\psi_{jk}}_y$, $v_{jk} = -{\psi_{jk}}_x$. Тогда

$$\oint\limits_c u_{jk}dx + v_{jk}dy = \int\limits_{Q_{jk}} \left({v_{jk}}_x - {u_{jk}}_y\right) dxdy = -\int\limits_{Q_{jk}} f_{jk}dxdy = \int\limits_{Q_{jk}} fdxdy\ \forall\ c = \partial\widetilde{Q}_{jk} \supset Q_{jk}.$$

Но такую же циркуляцию создаёт точечный вихрь, помещённый в некоторую точку $(\bar{x}_j, \bar{y}_k) \in Q_{jk}$,

Уравнение Пуассона и точечные вихри

если его интенсивность κ_{kj} равна

$$\int\limits_{Q_{jk}} f_{jk}\,dxdy.$$

Поэтому решаемся предположить, что

$$\psi_{kj}(x,y) \approx \frac{\int\limits_{Q_{jk}} f_{jk}\,dxdy}{4\pi} \ln \frac{1}{(x-\bar{x}_j)^2+(y-\bar{y}_k)^2}.$$

По теореме о среднем, точку $(\bar{x}_j, \bar{y}_k) \in Q_{jk}$ можно выбрать так, что

$$\int\limits_{Q_{jk}} f_{jk}\,dxdy = h^2 f(\bar{x}_j, \bar{y}_k),$$

поэтому

$$\psi_{kj}(x,y) \approx \frac{h^2 f(\bar{x}_j, \bar{y}_k)}{4\pi} \ln \frac{1}{(x-\bar{x}_j)^2+(y-\bar{y}_k)^2}.$$

Суммируем вклады от ячеек сетки. Имеем

$$\psi \approx \sum_{j,k} \psi_{kj} \approx \frac{h^2}{4\pi} \sum_{j,k} f(\bar{x}_j, \bar{y}_k) \ln \frac{1}{(x-\bar{x}_j)^2+(y-\bar{y}_k)^2}.$$

Логарифмический потенциал

Правая часть этого равенства – сумма Римана интеграла

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} f(\bar{x},\bar{y})\ln\frac{1}{(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2}\,d\bar{x}d\bar{y} \qquad (12)$$

Определение 3. Интеграл (12) называется логарифмическим потенциалом области Ω с плотностью f. Указание области опускают, если $\Omega=\mathbb{R}^2$

Замечание 7. В нашем случае можно положить $\Omega=\mathbb{R}^2$, так как $f=0$ вне Ω.

Конечно, представление решения уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^2$ логарифмическим потенциалом нуждается в строгом обосновании. Прежде, чем дать такое обоснование рассмотрим ещё одно полезное следствие формулы Грина. Пусть дана ограниченная область Ω_0, и функции $u\in\mathrm{C}^2(\Omega_0)$ и $v\in\mathrm{C}^2(\Omega_0)$. Полагаем

$$a=uv_x-vu_x,\ \ b=uv_y-vu_y,\ \ a_x+b_y=(uv_x-vu_x)_x+(uv_y-vu_y)_y=u\Delta v-v\Delta u.$$

В силу плоской версии теоремы Гаусса-Остроградского (формула (10) лекции 3)

$$\int\limits_S(an_x+bn_y)ds=\int\limits_{\Omega}(a_x+b_y)dxdy \text{ где } S=\partial\Omega,\ \forall\,\Omega:\ \Omega\cup S\subset\Omega_0,$$

что можно переписать так

Формула Грина для оператора Лапласа

$$\int\limits_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn} \right) ds = \int\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dxdy. \qquad (13)$$

Формула (13) также называется формулой Грина. Чтобы отличать её от других его формул, будем называть её формулой Грина для оператора Лапласа. В этой формуле нормальная производная берётся относительно внешней нормали, функции u и v должны принадлежать $\mathrm{C}^2(\bar{\Omega})$, а Ω должна удовлетворять обычным условиям, предъявлемым исходной формулой Грина.

Определение 4. Пусть f – функция на $\mathbb{R}^n$.

$$\operatorname{null} f \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \, \exists \delta > 0 : \, f(y) = 0, \, \forall\, y : |x - y| < \delta\}; \quad \operatorname{supp} f \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{null} f.$$

Множество $\operatorname{null} f$ называют *нуль-множеством*, $\operatorname{supp} f$ – *носителем* f. Функция с компактным носителем называется называется *финитной*.

Замечание 8. Нуль-множество открыто, а носитель – замкнут.

Пример 1. Носитель функции $f(x) = \sin x$ совпадает с $\mathbb{R}$. Мораль: изолированные нули включаются в носитель, а не в нуль множество.

Множество финитных функций класса $\mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}^2)$ обозначается C_0^ℓ; Множество финитных функций класса $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ обозначается C_0^∞;

Теорема о решении уравнения Пуассона

Пример 2. Пример финитной функции класса $\mathrm{C}_0^\ell(\mathbb{R}^2)$:

$$f(z) = \begin{cases} (1-r^2)^{1+\ell}, \ 0 \le r \le 1 \\ 0, \ r > 1, \end{cases} \qquad r = |z|$$

Пример финитной функции класса $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$f(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{r^2-1}}, \ 0 \le r \le 1 \\ 0, \ r > 1, \end{cases} \qquad r = |z|$$

Теорема 4. Пусть $\psi = \psi(x, y)$ – логарифмический потенциал (12), где $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$ – финитная функция. Тогда u – решение уравнения Пуассона $\Delta\psi + f = 0$ в $\mathbb{R}^2$.

◀ Пусть $z = (x, y)$ и $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, $G = -(\ln|z - \bar{z}|)/(2\pi)$. Тогда (интеграл без указания области берётся по всей плоскости)

$$(\Delta\psi)(z) = \Delta_z \int G(\bar{z} - z) f(\bar{z}) d\bar{z} = \Delta_z \int G(\zeta) f(\zeta + z) d\zeta = \int G(\zeta)\Delta_z(f(\zeta + z))d\zeta =$$

$$= \int G(\zeta)\Delta_\zeta(f(\zeta + z))d\zeta = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon < |\zeta| < 1/\varepsilon} G(\zeta)\Delta_\zeta(f(\zeta + z))d\zeta.$$

Преобразуем последний интеграл в этой цепочке. Применяем с этой целью формулу (13) с $u(\zeta) = f(\zeta + z)$, $v(\zeta) = G(\zeta)$. Имеем

Доказательство теоремы о решении уравнения Пуассона

$$\int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1/\varepsilon} G(\zeta)\Delta_\zeta(f(\zeta+z))d\zeta = \left(\int\limits_{|\zeta|=\varepsilon} + \int\limits_{|\zeta|=1/\varepsilon}\right) G(\zeta)\frac{df(\zeta+z)}{dn(\zeta)} - f(\zeta+z)\frac{dG(\zeta)}{dn(\zeta)}ds_\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1/\varepsilon} f(\zeta+z)\Delta_\zeta G(\zeta)d\zeta$$

Так как G – гармоническая функция на области $\{\varepsilon < |\zeta| < 1/\varepsilon\}$, интеграл от $\Delta_\zeta G(\zeta)$ нулевой; интеграл по большой окружности $\{|\zeta| = 1/\varepsilon\}$ тоже нулевой, ввиду финитности f. На малой окружности $\{|\zeta| = \varepsilon\}$ нормаль направлена к её центру по радиусу, и $ds = \varepsilon\, d\theta$, где θ – угловая координата. Поэтому, положив $r = |\zeta|$, $e = \frac{\zeta}{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$, находим

$$\left.\left(\frac{df(\zeta+z)}{dn(\zeta)} - f(\zeta+z)\frac{dG(\zeta)}{dn(\zeta)}\right)\right|_{|\zeta|=\varepsilon} \varepsilon\, d\theta =$$

$$\left.\left(f(z+re)\frac{\partial G(re)}{\partial r} - G(re)\frac{\partial f(z+re)}{\partial r}\right)\right|_{r=\varepsilon} \varepsilon\, d\theta =$$

$$= (\varepsilon(\ln\varepsilon)\theta\cdot((\nabla f)(z+\varepsilon e)) - f(z+\varepsilon e)/(2\pi))\; d\theta$$

Таким образом,

Логарифмический потенциал вне носителя плотности

$$(\Delta\psi)(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{2\pi} (\varepsilon(\ln\varepsilon)\theta\cdot((\nabla f)(z+\varepsilon e)) - f(z+\varepsilon e)/(2\pi))\, d\theta = -f(z) \ \blacktriangleright .$$

Замечание 9. Условия теоремы 3 можно ослабить. Например, теорема останется верной и при замене финитности условием $\sup_z |f(z)(1+|z|)^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Требование $f \in \mathrm{C}^2$ тоже можно ослабить. Например, можно считать, что f – кусочно-гладкая функция, с разрывами на гладких кривых. Логарифмический потенциал с такой плотностью будет решением уравнения Пуассона в дополнении объединения линий разрыва.

Замечание 10. C_0^∞ плотно во многих функциональных пространствах, например, в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Если C_0^∞ плотно в каком-то пространстве X и логарифмический потеницал продолжаем до линейного ограниченного оператора $\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$, то элементы Y естественно считать решениями уравнения Пуассона в некотором обобщённом смысле.

Теорема 5. Пусть $a \in \mathrm{null} f$ и f такова, что логарифмический потенциал сходится абсолютно и равномерно по z из окрестности $\mathcal{U}$ точки a. Тогда логарифмический потенциал – гармоническая функция в некоторой окрестности точки a.

Срезающая функция

◀ Запишем лог. потенциал в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\zeta - a| > \varepsilon} \ln \frac{1}{|z-\zeta|^2} f(\zeta)\, d\zeta \tag{14}$$

Возможность такой записи с достаточно малым число ε вытекает из условий теоремы. Первый сомножитель под интегралом (14) гармоничен по $z : |z-a| < \varepsilon$, и под знаком интеграла можно дифференцировать. Следовательно,

$$\Delta_z \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\zeta - a| > \varepsilon} \ln \frac{1}{|z-\zeta|^2} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\zeta - a| > \varepsilon} \Delta_z \ln \frac{1}{|z-\zeta|^2} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \quad \blacktriangleright$$

Далее мы будем использовать так называемую *срезающую функцию шара*:

$$\eta \in \mathrm{C}_0^\infty : \ \eta(z) = \begin{cases} 1, 0 \le |z| \le 1 \\ 0, |z| > 2. \end{cases}$$

Такую функцию можно построить многими способами, например, положив

$$\eta = \int \Phi(2(z-\zeta))\chi(\zeta) d\zeta, \ \chi(\zeta) = \begin{cases} 1, & |\zeta| < 3/2, \\ 0, & |\zeta| > 3/2 \end{cases}, \tag{15}$$

Усреднение и регуляризация

$$\Phi(s) = \frac{\begin{cases} e^{\frac{1}{s^2-1}}, s^2 \le 1; \\ 0, s^2 > 1; \end{cases}}{\int\limits_{s^2<1} e^{\frac{1}{s^2-1}}\, ds} \tag{16}$$

Функция (16) принадлежит C_0^∞, её носитель – единичный круг, она положительна и

$$\int \Phi(s)ds = 1.$$

Функции с таким набором свойств называются усредняющими ядрами радиуса 1. Интеграл

$$\int \Phi\left(\frac{z-\zeta}{\delta}\right) g(\zeta)d\zeta \tag{17}$$

называют усреднением или регуляризацией функции g с радиусом δ. Если g всего лишь локально интегрируема, то регуляризация (17) любого радиуса принадлежит C^∞. Регуляризация (17) финитна, если g финитна.

Локальность регулярности

Теоерема 6. Пусть плотность f лог. потенциала такова, что он сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. Пусть $f \in \mathrm{C}^\ell(\mathcal{U})$, $\ell = 1, 2, \ldots$, где $\mathcal{U}$ – окрестность точки a. Тогда логарифмический потенциал принадлежит $\mathrm{C}^\ell(\mathcal{U}_1)$, где $\mathcal{U}_1$ точки a.

◀ Выберем $\varepsilon > 0 : B_{2\varepsilon} = \{|z-a| < 2\varepsilon\} \subset \mathcal{U}$. Пусть $\eta =$ – срезающая функция, равная 1 в единичном круге, тогда $\eta\left(\frac{z-a}{\varepsilon}\right)$ равна 1 в B_ε и нулю – вне $B_{2\varepsilon}$.
Определим функции

$$f_0(z) = f(z)\eta\left(\frac{z-a}{\varepsilon}\right), \quad f_1(z) = (1-\eta\left(\frac{z-a}{\varepsilon}\right))f(z), \quad f = f_0 + f_1,\ B_\varepsilon \subset \mathrm{null} f_1$$

Очевидно, $f_0 \in \mathrm{C}_0^\ell(\mathcal{U})$. Тогда

$$\frac{1}{4\pi}\int \ln\frac{1}{|z-\zeta|^2} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{4\pi}\int \ln\frac{1}{|z-\zeta|^2}(f_0+f_1)(\zeta)\,d\zeta =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \ln\frac{1}{|\zeta_1|^2} f_0(z-\zeta_1)\,d\zeta_1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\zeta-a|>\varepsilon} \ln\frac{1}{|z-\zeta|^2} f_1(\zeta)\,d\zeta.$$

Здесь первое слагаемое задает функцию класса $\mathrm{C}^\ell(B_\varepsilon)$ (так как $f_0(z-\zeta_1)$ можно дифференцировать под знаком интеграла ℓ раз), а второе – гармоническую в B_ε (по теореме 5).