УМФ
2-й семестр – весна 2019 г
Лекция 5
Лог-потеницал, неоднородная задача Коши-Римана, уравнение Пуассона и вихревые пятна.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

20 марта 2019 г.

1-Определение плоского поля по вихрю и дивергенции

Рассмотрим определение векторного поля $\mathbf{v} = (u, v)(x, y)$, где (u, v) – проекции поля bv на оси декартовых координат Ox, Oy, по заданным во всей плоскости скалярам ω, ρ из уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = u_x + v_y = \rho.$$

Имеем систему двух уравнений

$$v_x - u_y = \omega, \quad u_x + v_y = \rho. \tag{1}$$

Подстановка

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \nabla^{\perp}\psi, \quad \nabla^{\perp} = (\partial_y, -\partial_x)$$

приводит систему (1) к паре уравнений Пуассона

$$\Delta\varphi = \rho, \quad -\Delta\psi = \omega. \tag{2}$$

Таким образом, φ и ψ могут быть представлены логарифмическими потенциалами при надлежащем затухании данных ω, ρ на бесконечности; в частности, указанное представление имеет место если ω, ρ финитны.

2-Неоднородная система Коши-Римана

Аналогично решается неоднородная система Коши-Римана

$$\varphi_x = \psi_y + \alpha, \quad \varphi_y = -\psi_x + \beta, \tag{3}$$

где α, β – заданы. Систему (3) переписываем так

$$\nabla\varphi - \nabla^{\perp}\psi = \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = (\alpha, \beta),$$

и, затем приводим её к уравнениям (2), где следует положить

$$\omega = \beta_y - \alpha_x, \quad \rho = \alpha_x + \beta_y.$$

Как скорость ведёт себя на бесконечности, если вихрь и дивергенция финитны? Ответ дает следующая

Теорема 1. Пусть f – финитная функция. Тогда $\forall\, z:\ B_{|z|} \supset \operatorname{supp} f$

$$\int f(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|} d\zeta = \ln \frac{1}{|z|} \int f(\zeta) d\zeta - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{r^k} \int f(s,\tau) s^{k+1} \cos(k(\theta-\tau)) d\tau ds,$$

где введены полярные координаты, так что $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, $\zeta = s\mathrm{e}^{i\tau}$, и c_k – коэффициенты степенного разложения $\ln(1+\delta)$ с центром $\delta = 0$.

3-Лог-потенциал финитной плотности

◀ В области $r > s$ имеем

$$\ln|z-\zeta| = \mathrm{Re}\,(\ln z + \ln(1+\zeta/z)) = \ln r + \mathrm{Re}\,(\ln(1+\zeta/z)) = \ln r + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\zeta/z)^k\right) =$$

$$= \ln r + \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(s/r)^k \cos(k(\theta-\tau))\right)$$

Умножаем полученное разложение на $f(s,\tau)s\,ds\,d\tau = f(s\mathrm{e}^{i\tau})d\zeta$, интегрируем по всей плоскости и получаем доказываемое равенство. ▶

Замечание 1. Пусть правые части уравнений (2) финитны. Представим решения φ, ψ логарифмическими потенциалами, и продифференцируем указанное в теореме 1 разложение. Получим

$$\nabla\varphi = \frac{\mathbf{e}_r}{2\pi r}\int \rho(\zeta)d\zeta + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \ \nabla\psi = -\frac{\mathbf{e}_r}{2\pi r}\int \omega(\zeta)d\zeta + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \ r\to\infty,$$

где $\mathbf{e}_r$ – радиальный орт. Если интегралы, указанные в этих оценках равны нулю, то скорость затухания определяет следующий член разложения, данного в теореме 1.

4-Лог-потенциал и формула Грина-Стокса

Замечание 2. Оценки, указанные в замечании 1, показывают, что поведение логарифмического потенциала согласовано со следствиями из формул Грина-Стокса и Грина-Гаусса, применённнных к решению уравнения Пуассона с финитной правой частью. В самом деле, вернёмся к уравнениям (2), и предположим ρ, ω финитными. Выбираем кривую $\gamma = \partial\Sigma$, так что $\Sigma \supset (\operatorname{supp}\omega \cup \operatorname{supp}\rho)$, а в остальном – произвольную. Пусть ψ – решение уравнения $-\Delta\psi = \omega = 0$. Сперва полагаем $(u, v) = (\psi_y, -\psi_x)$. Тогда $\omega = -\Delta\psi = v_x - u_y$, и, по формуле Грина-Стокса,

$$\oint\limits_{\gamma} udx + vdy = \int\limits_{\Sigma} \omega dxdy = \int \omega dxdy.$$

С другой сторон, пусть ψ – логарифмический потенциал плотности ω. Он гармоничен вне $\operatorname{supp}\omega$, а потому γ можно деформировать в окружность сколь угодно большого радиуса, не можно, не изменяя циркуляцию поля (u, v) вокруг неё. Отсюда, с учётом замечания 1

$$\oint\limits_{\gamma} udx + vdy = \int \omega(\zeta)d\zeta \oint\limits_{r=R} \frac{xdy - ydx}{2\pi r^2} + \oint\limits_{r=R} O\left(\frac{1}{r^2}\right) \to \int \omega(\zeta)d\zeta, \;\; R \to \infty.$$

5-О единственности решения уравнения Пуассона в в $\mathbb{R}^2$

Пусть φ – решение уравнения $\Delta\varphi = \rho$. Далее, полагаем $(u, v) = (\varphi_x, \varphi_y)$. Тогда $\rho = \Delta\varphi = u_x + v_y$, и, по формуле Грина-Гаусса,

$$\int\limits_{\gamma} (un_x + vn_y)ds = \int\limits_{\Sigma} \rho dxdy = \int \rho dxdy.$$

С другой стороны, если φ представлена логарифмическим потенциалом плотности ρ, то такое же это равенство вытекает из замечания 1, что проверяется как в случае плотности ω.

Замечание 3. Теорема 1, вообще говоря, не верна, если плотность логаримического потенциала не финтина.

Замечание 4. Уравнение Пуассона $-\Delta u = f$ в $\mathbb{R}^2$ имеет не более одного решения, растущего на бесконечности не быстрее логарифма. В частности, если f финитна, то такое решение даёт логарифмический потенциал, и никаких других решений не существует. Доказательство этой теоремы единственности будет дано позже.

6-Уравнения Эйлера плоских течений

Следующая после систем точечных вихрей по возрастанию сложности модель вихревого движения несжимаемой жидкости – движение конечных вихрей в создаваемом ими безграничном потоке. Рассмотрим уравнения плоских вихревых движений при нулевой вязкости жидкости. В таком случае

$$\mathbf{v}_t + \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} = -\nabla H, \quad H = (P + \mathbf{v}^2/2); \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \tag{4}$$

где $\mathbf{v}$ – векторное поле скорости жидкости, и $P = P(x,t)$ – давление. Уравнение (4) – одна из форм уравнения Эйлера движения идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости; часто его называют уравнением в форме Громеки -Ламба (Lamb). Функцию H называют функцией Бернулли. Она определяет давление P при известной скорости.

Рассматриваем плоское течение, то есть, считаем, что $\mathbf{v} = (u,v,0)(x,y,t)$, где (u,v) – проекции поля bv на оси декартовых координат Ox, Oy. В таком случае

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = (0,0,\omega),\ \omega = v_x - u_y, \quad \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \omega\begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

и уравнения Эйлера принимают вид

$$u_t - \omega v = -H_x;\ v_t + \omega u = -H_y; \quad u_x + v_y = 0;\ v_x - u_y = \omega; \quad H = P + (u^2+v^2)/2. \tag{5}$$

7-Уравнения вихря

Смотрим на первые два уравнения как на равенство двух плоских полей, применяем к обеим частям этого равенства rot и приходим к уравнениям

$$(v_y - u_x)_t + (\omega v)_y + (\omega u)_x = 0; \quad u_x + v_y = 0; \quad v_x - u_y = \omega;$$

которые записываются в форме уравнений вихря

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = 0; \quad u_x + v_y = 0; \quad v_x - u_y = \omega; \tag{6}$$

Замечание 5. В системе (5) ω рассматривается как скаляр; его перенос описывает первое уравнение. Оно представляет собой транспортное уравнение, где несущее поле есть $\mathbf{v} = (u, v)$.

Замечание 6. Системы (5) и (6) на плоскости эквивалентны. Сказанное верно и в случае односвязной области. В неодносвязной области, например, в кольце, систему (6) следует дополнить соотношениями, гарантирующими однозначность функции Бернулли H и, следовательно, давления P.

Уравнения вихря (6) часто записывают в переменных функция тока – вихрь. Введение функции тока $\psi : \psi_y = u, -\psi_x = v$ разрешает уравнение неразрывности $u_x + v_y = 0$, и приводит систему (6) к виду

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = 0; \quad (u, v) = (\psi_y, -\psi_x); \quad -\Delta\psi = \omega; \tag{7}$$

8-Сохранение вихря в плоских течениях

Уравнение Пуассона, входящее в систему (7), позволяет исключить из неё переменную ω, и свести её к одному уравнению относительно функции тока.

$$(\Delta\psi)_t + \psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x = 0. \qquad (8)$$

Замечание 7. Функция тока определена для любого соленоидального поля в односвязной области. Если область неодносвязна, то требуется дополнительно, чтобы поток поля через любую компоненту границы был равен нулю. В частности, если нормальная компонента поля на границе всюду равна нулю (и оно соледноидально), то функция тока определена.

Уравнения переноса вихря идентично уравнению переноса плотности несжимаемой средой, и, следовательно, может быть проинтегрировано так:

$$\omega(z,t) = \omega_0(a),\; z = (x,y) = X(a,t),\; X_t = \mathbf{v}(X,t),\; X(a,0) = a, \qquad (9)$$

где функция ω_0 определяет вихрь течения в какой-то отсчётный момент времени, здесь – нулевой. Например, если поставлено начальное условие $\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0$, то полагаем $\omega_0 = \operatorname{rot}\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_3$.

Имея в виду выполнение равенств (6) для всех материальных частиц потока, говорят, что вихрь сохраняется в каждой материальной частице. Из этого закона сохранения вытекает, что функция $\omega(\cdot,t)$ финитна при любом t, если она была таковой при $t = 0$.

Определение 1. Решение уравнений (1) вихря, такое, что функция $\omega(\cdot, t)$ финитна при любом t, называют вихревым пятном.

Скорость $\mathbf{v} = (u, v) = (\psi_y, -\psi_x)$, создаваемую вихревым пятном, определяем с помощью логарифмического потенциала

$$\mathbf{v}(z,t) = \nabla^{\perp}\psi, \quad \psi = \frac{1}{2\pi}\int \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\omega(\zeta,t)d\zeta; \tag{10}$$

Отсюда, продифференцировав под знаком интеграла, найдём

$$\mathbf{v}(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{(z-\zeta)^{\perp}}{|z-\zeta|^2}\omega(\zeta,t)d\zeta \tag{11}$$

где плотность ω выражена из (9), и $(\alpha,\beta)^{\perp} = (\beta, -\alpha)$. Ввиду теоремы 1 и замечания 1, скорость (11) подчинена оценке

$$\mathbf{v}(z,t) = -\frac{\mathbf{e}_r^{\perp}}{2\pi r}\int\omega(\zeta,t)d\zeta + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r = |z| \to \infty. \tag{12}$$

Закон сохранения вихря (9) вместе с равенством (11) представляют результат интегрирования системы (6). Функция ω_0 играет роль константы интегрирования. Поскольку соотношения (9),(11) не содержат её производных, функцию ω_0 можно взять разрывной, и трактовать соответствующие ей функцию ω и поле $\mathbf{v}$ как обобщённое решение.

10-Разрывные вихри

Интеграл (11) назовем *векторным потенциалом* плотности ω **Определение 1$'$.** Вихревым пятном назовём функцию $\omega = \omega(z,t)$, $(z,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T,T)$, финитную в $\mathbb{R}^2$ при каждом $t \in$ и такую, что задача Коши $X_t = \mathbf{v}(X,t)$, $X(a,0) = a$, где $\mathbf{v}$ – векторный потенциал плотности ω, корректно определяет траектории материальных частиц $a \mapsto X(a,t)$ для всех $(a,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T,T)$, и законы сохранения вихря в форме (9) выполняются при финитной функции ω_0 для всех $a \in \mathbb{R}^2$, $(z,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T,T)$.

Важное отличие таких решений от разрывных решений гиперболических уравнений и систем, например, от уравнения Хопфа, состоит в том, что скорость переноса остаётся непрерывной, несмотря на разрыв переносимого скаляра. Это следует из непрерывности векторного потенциала при всего лишь ограниченной (и финитной) плотности ω, но мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта.

Движение вихревого пятна возможно не только в безвихревой жидкости, но и на фоне постоянной завихренности. В самом деле, если поле $u = \psi_y, v = -\psi_x$ – решение системы (6) и ему соответствуют вихрь $\omega = -\Delta\psi$, то поле $(\psi + \bar{\omega} r^2/2)_y, (\psi + \bar{\omega} r^2/2)_x$, с вихрем $\omega + \bar{\omega}$, где $\bar{\omega} = \mathrm{const}$ – тоже решение системы (6). Это мотивирует небольшое обобщение определения $1'$.

11-Пятна постоянной завихренности

Определение 1''. Вихревым пятном назовём функцию $\tilde{\omega} = \bar{\omega} + \omega(z, t)$, $(z, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T, T)$, такую, что $\bar{\omega} = \mathrm{const}$, ω финитна в $\mathbb{R}^2$ при каждом $t \in$ и скорость $\widetilde{\mathbf{v}} = \nabla^{\perp}(\bar{\omega} r^2/2) + \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – векторный потенциал плотности ω , корректно определяет траектории материальных частиц $a \mapsto X(a, t)$ для всех $(a, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T, T)$, и законы сохранения вихря в форме (9) выполняются при финитной функции ω_0 для всех $a \in \mathbb{R}^2$, $(z, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-T, T)$.

Рассмотрим *пятно постоянной завихренности*. С этой целью выбираем $\omega_0 = \bar{\omega}\chi_0$, где $\bar{\omega} = \mathrm{const}$ и χ_0 – характеристическая функция некоторой области D_0 с гладкой границей S_0. Тогда, в силу сохранения вихря в материальных частицах (см. (9)), в любой момент времени завихренность ω принимает всего два значения: 0 и $\bar{\omega}$; точнее,

$$\omega(x, t) = \bar{\omega}\chi, \quad \chi(x, t) = \begin{cases} 1, X^{-1}(x, t) \in D_0 \\ 0, X^{-1}(x, t) \notin D_0 \end{cases}$$

то есть, χ – характеристическая функция области $D(t) = X(D_0, t)$. Линия разрыва – кривая $S(t) = \partial D(t)$ также материальна, а именно $S(t) = X(S_0, t)$. Таким образом, линия разрыва вморожена в жидкость и во все моменты состоит из одних и тех же материальных частиц.

Как говорилось в лекции 2, несжимаемость влечёт сохранение объема материальных областей. В случае плоских течений имеет место сохранение площади, так что

$$\forall\, t:\ \text{площадь}\, D(t) = \text{площадь}\, D_0.$$

Таким образом, *пятно постоянной завихренности $\bar{\omega}$, деформируясь, но сохраняя площадь, двигается в создаваемом им потоке.*
Среди движений пятен постоянной завихренности наиболее просты те, при которых пятно не деформируется, например, покоится, или вращается, или движется поступательно.

Пример 1. Найдём покоящееся пятно постоянной завихренности. В качестве начального пятна возьмём круг: $D_0 = \{r < R\}$. Покажем, что $D(t) = D_0\ \forall\, t$. Действительно, полагаем $z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \zeta = \rho\mathrm{e}^{i\sigma}$, $\tau = \theta - \sigma = \arg\frac{\zeta}{z}$, и определяем функцию тока как лог-потенциал (10). Имеем

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{1}{|r^2+\rho^2-2r\rho\cos\tau|}\, d\tau\rho d\rho,$$

где интеграл не зависит от θ. Поэтому $\psi = \psi(r)$, и линии тока $\{\psi = \mathrm{const}\}$ – концентрические окружности с центром в начале. В частности, граница круга D_0 – линия тока, и потому материальна, как и круг $D(t) = D_0$.

13-Стационарное уравнение вихря

Пример 2. Найдём покоящееся пятно непостоянной завихренности. Рассмотрим стационарное уравнение вихря в виде (см. уравнение (8))

$$\psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x = 0. \tag{13}$$

Уравнение (15) означает, что якобиан пары функций ψ и $\Delta\psi$ равен нулю, то есть, отображение $(x, y) \mapsto (\psi, \Delta\psi)$ нигде не максимального ранга, т.е. функции ψ и $\Delta\psi$ зависимы, так что одна может быть выражена через другую, или обе они – через третью, и потому их градиенты всюду коллинеарны. Так, если найдены функции $s = s(x, y)$, $\Psi = \Psi(h)$, $\Omega = \Omega(h)$, $h \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\psi = \Psi(s), \ -\Delta\psi = \Omega(s).$$

то ψ – решение уравнения (13), так как в этом случае $\nabla\psi = \Psi'(s)\nabla s$, $\nabla\Delta\psi = \Omega'(s)\nabla s$. Пусть, в частности, $s = r^2 = x^2 + y^2$ и $\omega = \Omega(r)$ – финитная функция, тогда

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{1}{|r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\tau|}\, d\tau\Omega(r)\rho d\rho = \Psi(r).$$

Следовательно, любое финитное распределение завихренности, обладающее вращательной инвариантностью, определеляет стационарное вихревое пятно.

14-Вихрь Кирхгофа. Постановка задачи

Замечание 8. Верно и обратное: любая гладкая финитная $\psi = \Psi(r)$ определяет вихревое пятно с гладким распределением завихренности $\Omega(r) = -\Delta\psi$. Это следует из выражения оператора Δ через частные производные по полярным координатам: $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2$, см. лекцию 5 за осенний семестр.

Замечание 9. Замечание 8 даёт нам пример решения УрЧП, гладкого и финитного во всей области задания уравнения. Такие решения ранее нам не встречались.

Найдём *вихрь Кирхгофа:* равномерно, без деформации, вращающееся пятно постоянной завихренности. Создаваемый им поток уже не установившийся, в том смысле, что $\psi = \psi(z, t)$. Тем не менее, мы всё равно сведём задачу к стационарному уравнению вихря (13). С этой целью перейдём во вращающуюся систему координат, в которой пятно покоится.

Именно, пусть преобразование $z \mapsto U(t)z$, представляет поворот на угол $\bar\omega t$ вокруг начала координат. Матрица $U(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\bar\omega t & \sin\bar\omega t \\ -\sin\bar\omega t & \cos\bar\omega t \end{pmatrix}$$

Данная матрица ортогональна: $UU^* = 1$, и $\det U = 1$. О таких матрицах мы уже говорили в лекции 2.

15-Вращающаяся система координат

Разыскиваем решения уравнения вихря (7), представимые в виде

$$\psi(z,t) = \Psi(U(t)z), \quad \omega(z,t) = \Omega(U(t)z). \tag{14}$$

($\Psi = \Psi(z)$ – НЕ зависит от t!); при этом

$$\omega = -\Delta\psi \Leftrightarrow \Omega = -\Delta\Psi.$$

Эта равносильность – следствие тождеств

$$(\Delta f)(U(t)z) = \Delta(f(U(t)z)) \ \forall\, f, \ \forall\, z, \ \forall\, t. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в этом, запишем преобразование (14) в координатах:

$$\psi(x,y,t) = \Psi(\xi,\eta), \quad \omega(x,y,t) = \Omega(\xi,\eta), \tag{16}$$

$$\xi = \alpha x + \beta y, \ \eta = -\beta x + \alpha y, \ \alpha = \cos\bar\omega t, \ \beta = \sin\bar\omega t. \tag{17}$$

В полярных координатах $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ преобразование (16-17) имеет вид

$$\psi(r,\theta,t) = \Psi(r,\theta+\bar\omega t), \ \omega(r,\theta,t) = \Omega(r,\theta+\bar\omega t);$$

Теперь тождества (15) вытекают из того, что коэффициенты оператора Лапласа, записанного в полярных координатах, не зависят от азимутальной координаты θ.

16- Уравнения вращающегося вихревого пятна

Подставляем представление (16-17) в уравнение переноса из системы (7). Члены этого уравнения преобразуем так:

$$\psi_x = \alpha\Psi_\xi - \beta\Psi_\eta;\ \ \psi_y = \beta\Psi_\xi + \alpha\Psi_\eta;$$

$$\omega_x = \alpha\Omega_\xi - \beta\Omega_\eta;\ \ \omega_y = \beta\Omega_\xi + \alpha\Omega_\eta;$$

отсюда находим

$$\psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y = \Psi_\eta\Omega_\xi - \Psi_\xi\Omega_\eta.$$

Далее, дифференцируем ω по t. С учётом (16-17) имеем

$$\omega_t(z,t) = \bar\omega(y\alpha - x\beta)\Omega_\xi - \bar\omega(x\alpha + y\beta)\Omega_\eta = \bar\omega\left(\eta\Omega_\xi - \xi\Omega_\eta\right).$$

Собираем всё вместе, и приходим к уравнению

$$\Phi_\eta\Omega_\xi - \Phi_\xi\Omega_\eta = 0, \quad \Phi = \Psi + \bar\omega r^2/2,\ \ r^2 = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2.$$

Это уравнение можно записать как стационарное уравнение вихря

$$\Phi_\xi(\Delta\Phi)\eta - \Phi_\eta(\Delta\Phi)_\xi = 0 \tag{18}$$

(так как $\Delta\Phi = \Delta\Psi + 2\bar\omega$). Итак, задача о равномерном вращении пятна постоянной завихренности с угловой скоростью $\bar\omega$ сведена к задаче о стационарном пятне постоянной завихренности на фоне постоянной завихренности $2\bar\omega$, отличной от завихренности внутри пятна (см. определение $1''$).

17-Условие материальности линии разрыва

Если носитель неподвижного пятна есть область D_0, то носителем вращающегося пятна, согласно нашему построению, должна быть область $D(t)$, полученная из D_0 преобразованием (17). Как и в примере 1, граница неподвижного пятна должна быть линией тока $\{\Phi(\xi,\eta) = \mathrm{const}\}$, что влечёт её материальность. Этого достаточно и для материальности границы равномерно вращающегося пятна. В самом деле пусть $S(t)$ – граница такого пятна, и $(x_0(t), y_0(t)) \in S(t)\ \forall\, t$. Тогда

$$(\alpha x_0 + \beta y_0, -\beta x_0 + \alpha y_0) = (\xi_0, \eta_0) \in S_0 = \{\Phi(\xi,\eta) = \mathrm{const}\}\ \forall\, t \implies$$

$$0 = \partial_t \left(\Phi(\alpha x_0 + \beta y_0, -\beta x_0 + \alpha y_0)\right) = \partial_t \left(\Psi(\alpha x_0 + \beta y_0, -\beta x_0 + \alpha y_0) + \frac{\bar\omega(x_0^2 + y_0^2)}{2}\right) =$$

$$= \bar\omega(\eta\Psi_\xi - \xi\Psi_\eta)|_{\xi=\xi_0,\eta=\eta_0} = \bar\omega(y\psi_x - x\psi_y)|_{x=x_0,y=y_0}.$$

Здесь мы обратили выражения производных ψ через производные Ψ. Но при равномерном вращении $\bar\omega y_0 = \dot x_0$ и $-\bar\omega x_0 = \dot y_0$; вместе с тем компоненты скорости потока $u = \psi_y$ и $v = \psi_x$. С учетом этого, имеем

$$\dot y_0(t) u(x_0(t), y_0(t)) - \dot x_0(t) v(x_0(t), y_0(t)) = 0.\ \forall\, t$$

Таким образом, скорости течения и вращения коллинеарны в каждой точке кривой $S(t)$. Следовательно, материальная частица не может сойти с этой кривой ни в один момент времени (хотя может перемещаться вдоль неё).

18-Эллиптический вихрь Кирхгофа

Переобозначаем (ξ, η) через (x, y). Стационарное пятно постоянной завихренности ищем в виде внутренности D_0 эллипса

$$S_0 = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

и пусть $\bar{\Omega} = \mathrm{const}$ – значение завихренности внутри вращающегося пятна. Величины $a, b, \bar{\Omega}, \bar{\omega}$ представляют собой свободные параметры. Связь между ними нужно определить в процессе решения задачи.

Пусть χ_0 – характеристическая функция области D_0. Тогда

$$-\Delta\Phi = (\bar{\Omega} + 2\bar{\omega})\chi_0 + 2\bar{\omega}(1 - \chi_0), \quad -\Delta\Psi = \bar{\Omega}\chi_0.$$

Следовательно, Ψ – логарифимический потенциал плотности $\bar{\Omega}\chi_0$. Однако, целесообразно не вычислять его непосредственно. Вместо этого разыскиваем Ψ в виде

$$\Psi = \Psi_0\chi_0 + \Psi_1(1 - \chi_0),$$

Относительно Ψ_0 имеем задачу Дирихле

$$-\Delta\Psi_0 = \bar{\Omega} \text{ в } D_0, \quad \left(\Psi_0 + \bar{\omega}r^2/2\right)\Big|_{S_0} = 0. \tag{19}$$

19-Функция тока вихря Кирхгофа

Относительно Ψ_1 имеем задачу Дирихле

$$-\Delta\Psi_1 = 0, \quad \left(\Psi_1 + \bar{\omega} r^2/2\right)\Big|_{S_0} = 0, \quad \nabla\Psi_1 = -\frac{ab\Omega\mathbf{e}_r}{2r} + O\left(\frac{1}{r}\right), \ r \to \infty. \tag{20}$$

где условие на бесконечности поставлено с целью согласования поведения Ψ с оценками затухания производных логарифмического потенциала на бесконечности, указанными в замечании 1.

Условия на границе пятна S_0 в (17) и (18) обеспечивает равенство $\Phi = 0$, что как было установлено выше, делает границу вращающегося пятна $S(t)$ материальной.

Кроме того, как уже говорилось, логарифмический потенциал вихревого пятна непрерывен вместе со своими первыми производными. Поэтому ставим условие

$$\nabla\Psi_0 = \nabla\Psi_1 \text{ на } S_0. \tag{21}$$

При решении задачи (19)-(21) используем эллиптические кооррдинаты ξ, η:

$$x = c\,\mathrm{ch}(\xi)\cos\eta; \quad y = c\,\mathrm{sh}(\xi)\sin(\eta),$$

или, в комплексной форме,

$$z = c\,\mathrm{ch}(\zeta), \quad z = x + iy, \ \zeta = \xi + i\eta$$

20-Эллиптические координаты

Аналитическая функция $z = c\,\mathrm{ch}(\zeta)$ не имеет критических точек ни в одной полуплоскости $Re\zeta > \xi_0 > 0$ (кроме бесконечности), и следовательно отображает эту полуплоскость на её образ конформно (но не однолистно, так как обратное многозначно). Выбрав

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \xi_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{a-b},$$

получим

$$a = c\,\mathrm{ch}(\xi_0), \quad b = c\,\mathrm{sh}(\xi_0),$$

так что образ полуплоскости $Re\zeta > \xi_0 > 0$ есть внешность эллипса S_0.

Обратим отображение $z = c\,\mathrm{ch}(\zeta)$. С этой целью представим его как композицию

$$z = g(w) = c(w + w^{-1})/2, \quad w = \mathrm{e}^{\zeta}.$$

Здесь экспонента отображает полуплоскость $Re\zeta > \xi_0 > 0$ на внешность круга радиуса

$$R = \mathrm{e}^{\xi_0} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

а g – внешность этого круга на внешность эллипса. (Это отображение хорошо знакомо по задаче обтекания, лекция 3). Стало быть

$$\zeta = \ln w(z), \quad w = c(z + z^{-1})/2. \tag{22}$$

21–Функция тока вне пятна

Поскольку переход к эллиптическим координатам эквивалентен конформному преобразованию , гармоническая функция координат (ξ, η) есть гармоническая функция координат (x, y), и обратное также верно. На этом основании переписываем задачу (20) так

$$\Psi_1 = \phi + C_1(\xi - \xi_0), \quad \phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = 0, \ \sup|\phi| < \infty, \ \xi > \xi_0, \ \phi|_{\xi=\xi_0} = -\bar{\omega}r^2/2, \quad (23)$$

где $r^2|_{\xi=\xi_0} = c^2(\mathrm{ch}^2(\xi_0)\cos^2(\eta) + \mathrm{sh}^2(\xi_0)\sin^2(\eta)) = a^2\cos^2(\eta) + b^2\sin^2(\eta)$. Член $C_1(\xi - \xi_0)$ отвечает за условие на бесконечности, так как

$$d\zeta/dz = 1/z + O(z^{-2}), \ z \to \infty \implies \nabla_{x,y}\xi = \mathbf{e}_r/r + O(r^{-2}), \ r \to \infty,$$

и мы добиваемся выполнения этого условия, полагая

$$C_1 = -ab\bar{\Omega}/2. \quad (24)$$

Далее, находим ϕ с помощью элементарного разделения переменных. Имеем

$$\phi = -\frac{\bar{\omega}}{4}\left(a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\mathrm{e}^{2(\xi_0 - \xi)}cos(2\eta)\right). \quad (25)$$

Решение задачи (19) ищем в виде

$$C_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \bar{\omega}r^2/2; \quad (26)$$

22-Частота вращения вихря Кирхгофа

Функция (26) заведомо удовлетворяет граничному условию на S_0, а выполнения уравнения Пуассона добиваемся, полагая

$$C_0 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{\bar{\Omega}}{2} - \bar{\omega} \right). \tag{27}$$

Ввиду граничных условий задач (19) и (20), $\Psi_0 = \Psi_1$ на S_0, то есть, Ψ сшита непрерывно. Сделаем эту сшивку непрерывно дифференцируемой, то есть, добъёмся выполнения условия (21). Это условие эквивалентно равенствам

$$\Psi_{0\xi} - \Psi_{1\xi} = 0, \ \Psi_{0\eta} - \Psi_{1\eta} = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0, \tag{28}$$

где Ψ_0 – функция (26), выраженная через ξ, η. По непрерывности Ψ на S_0, $\Psi_0(\xi_0, \eta) - \Psi_1(\xi_0, \eta) \equiv 0$, что влечёт $(\Psi_0(\xi_0, \eta) - \Psi_1(\xi_0, \eta))_\eta \equiv 0$. Остается обеспечить непрерывность производных по ξ. Добиваемся этого выбором свободных параметров $a, b, \bar{\omega}$ и приходим к равенству

$$\bar{\omega} = \frac{ab\bar{\Omega}}{(a+b)^2} \tag{29}$$

Таким образом, равномерно вращающееся эллиптическое вихревое пятно может иметь любую интенсивность $\bar{\Omega}$ и любые полуоси a, b; эти три параметра определяют скорость вращения пятна.