УМФ
2-й семестр – весна 2019 г
Лекция 6
Общая задача о вихревом пятне и обобщённые решения УрЧП.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

23 марта 2019 г.

Граничное интегральное уравнение вихревого пятна

Задача о пятне постоянной завихренности в общем случае может быть сведена к одному интегральному уравнению. Именно, выражение скорости потока в этом случае имеет вид

$$\mathbf{v}(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D(t)} \frac{(z-\zeta)^{\perp}}{|z-\zeta|^2}\,d\zeta$$

где $D(t)$ – носитель завихренности. Пусть $z \notin D(t)$. Записываем этот интеграл покоординатно:

$$u(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{D(t)} \partial_\beta \ln|z-\zeta|\,d\alpha d\beta, \quad v(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D(t)} \partial_\alpha \ln|z-\zeta|\,d\alpha d\beta, \quad \zeta = (\alpha,\beta),$$

где производные логарифма непрерывны, так как $z \notin D(t)$. Теперь применяем формулу Грина-Стокса:

$$u(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{S(t)} \ln|z-\zeta|\,d\alpha, \quad u(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{S(t)} \ln|z-\zeta|\,d\beta. \tag{1}$$

Пусть теперь $\sigma \mapsto (\hat\alpha(\sigma,t), \hat\beta(\sigma,t)) = \hat\zeta(\sigma,t)$ – параметризация $S(t)$. Тогда $d\alpha = \hat\alpha_\sigma d\sigma$, $d\beta = \hat\beta_\sigma d\sigma$.

Граничное интегральное уравнение вихревого пятна - 1

Векторную функцию $\hat{\zeta}$ считаем периодической с периодом 1 (так как S – замкнутая кривая). С учётом этого переписываем равенства (1) так

$$u(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \ln|z-\hat{\zeta}(\sigma,t)|\hat{\alpha}_\sigma\,d\sigma, \quad v(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \ln|z-\hat{\zeta}(\sigma,t)|\hat{\beta}_\sigma\,d\sigma,$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{v}(z,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \ln|z-\hat{\zeta}(\sigma,t)|\hat{\zeta}_\sigma\,d\sigma$$

Переходим в этом равенстве к пределу при $z \to \hat{\zeta}(s,t)$, $s \in (0,1)$. Так как граница пятна материальна, левая часть примет вид $\mathbf{v}(\hat{\zeta}(s,t),t) = \hat{\zeta}_t(s,t)$, в правой части просто полагаем $z = \hat{\zeta}(s,t)$, и приходим к уравнению относительно параметризации границы пятна

$$\hat{\zeta}_t(s,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \hat{\zeta}_\sigma(\sigma,t)\ln|\hat{\zeta}(s,t)-\hat{\zeta}(\sigma,t)|\,d\sigma. \qquad (2)$$

Вихревое пятно и обобщённое решение уравнений вихря

Ввиду уравнения неразрывности, уравнение переноса вихря имеет вид закона сохранения

$$\omega_t + (u\omega)_x + (v\omega)_y = 0. \tag{3}$$

Поэтому можно определить разрывное решение уравнения вихря как обобщённое решение закона сохранения. При этом удобно рассматривать функции от z, t как векторные функции от t со значениями в некотором пространстве функций от z.

Пусть заданы число $T > 0$, и функция $\omega_0 \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^2)$. Полагаем $I_T = (-T, T) \subset \mathbb{R}$, $E_T = \mathbb{R}^2 \times I_T$.

Определение 1. Обобщённым решением уравнения вихря в области E_T называется функция $t \mapsto \omega(t)$ класса $\mathrm{C}(I_T, \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^2))$, такую что $\|\omega(t)\|_{\infty;\mathbb{R}^2}$ ограничена на любом интервале $I_\tau \subset I_T$, выполняется начальное условие в том смысле, что $\omega(0) = \omega_0$, и имеют место интегральные тождества

$$\int\limits_{E_T} \omega(\eta_t + u\eta_x + v\eta_y)dzdt = 0 \ \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(E_T), \tag{4}$$

где скорость $\mathbf{v} = (u, v)$ – векторный потенциал

$$\mathbf{v}(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{D(t)} \frac{(\zeta - z)^\perp \omega(\zeta, t) d\zeta}{|z - \zeta|^2}. \tag{5}$$

Некоторые подробности об обобщённом решении

Функции η, входящие в интегральные тождества типа (33) называют *пробными.*

Замечание 1. Вывод выражения скорости через вихрь (5) см. в лекции 5. Там говорилось (хотя и без доказательств), что ограниченность вихря влечёт непрерывность поля скорости. Этим гарантирована корректность интегральных тождеств (4), определяющих обобщённое решение.

Замечание 2. На самом деле интеграл (5) обладает значительно большей регулярностью, чем просто непрерывность. В частности, однозначно определены движения материальных частиц $a \mapsto X(a,t)$, то есть, решения задачи Коши $X_t = \mathbf{v}(X,t)$, $X|_{t=0} = a$. В этом смысле определение 1 согласовано с определением разрывного вихревого пятна в лекции 5 (см. определение $1''$). Вместе с тем, интеграл (5) при ограниченной плотности ω, вообще говоря, не дифференцируем в обычном смысле.

Вопрос: пусть поле $\mathbf{v}$ задано интегралом (5) с разрывной, вообще говоря, плотностью ω; в каком смысле функция ω представляет вихрь поля $\mathbf{v}$? Другими словами, в каком смысле интеграл (5) с разрывной, вообще говоря, плотностью ω задает решение системы

$$v_x - u_y = \omega, \quad u_x + v_y = 0. \tag{6}$$

Лемма Дюбуа-Раймона

Поскольку система (6) сводится к уравнению Пуассона $-\Delta\psi = \omega$ подстановкой $\mathbf{v} = \nabla^{\perp}\psi$, ($\psi$ – функция тока), возникает вопрос о том, в каком смысле понимать это уравнение при разрывной правой части ω.

Определение 2. Функция f, измеримая на области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется локально интегрируемой на D, если каждая точки $x \in D$ имеет окрестность по которой f интегрируема в смысле Лебега. Класс локально-интегрируемых на D функций обозначается $\mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$.

Пример 1. Пусть $f(t) = t^{-1}$. Тогда $f \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(0,1)$, но $f \notin \mathrm{L}_1(0,1)$.

Лемма 1. (Лемма Дюбуа-Раймона). Пусть $f \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и

$$\int\limits_D f\eta dz = 0 \;\forall\, \eta \in \mathrm{C}_0^{\infty}(D) \;\Leftrightarrow\; f = 0 \text{ п.в. в} D.$$

◀ Предположим противное. Выберем произвольно открытый шар $B_\rho \subset D$. $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon)\; \exists \chi_\varepsilon \in \mathrm{C}_0^{\infty}(D) : 0 \le \chi_\varepsilon(z) \le 1\; \forall z \in D$; $\chi_\varepsilon(z) = 1\; \forall\, z \in B_\rho$; $\chi_\varepsilon(z) = 0\; \forall\, z \in B_{\rho+\varepsilon}$. В качестве χ_ε можно взять регуляризацию характеристической функции шара B_ρ (см. конец лекции 4). Ввиду сделанных предположений и по построению χ_ε имеем равенства

Обобщённая дивергенция

$$0 = \int\limits_D f\chi_\varepsilon\, dz = \int\limits_{B_\rho} f dz + \int\limits_{B_{\rho+\varepsilon}\setminus B_\rho} f\chi dz$$

Устремляем $\varepsilon \to +0$. Первое слагаемое не изменяется, а второе – стремится к нулю. Следовательно, первое слагаемое равно нулю. По известной теореме анализа

$$f(z) = \lim_{\rho\to+0} \frac{1}{B_\rho(z)} \int\limits_{B_\rho(z)} f(z)dz = 0$$

почти всюду. Получено противоречие. ▶

Замечание 3. Леммы, аналогичные доказанной, широко представлены в литературе, см. например `Курс математической физики` В.С. Владимирова. Использованная при доказательстве теорема имеется в книге Стейна `Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций`.

Определение 3. Векторное поле $\mathbf{v} = (u, v) \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ называется обобщённым решением $\operatorname{div}\mathbf{v} = u_x + v_y = \rho$, где $\rho =\in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$, другими словами, имеет дивергенцию ρ в в D в обобщённом смысле, если

$$\int\limits_D (u\eta_x + v\eta_y)dz = -\int\limits_D \rho\eta dz\ \forall\,\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(D). \tag{7}$$

Дивергенция в обобщённом и классическом смысле

Поле, имеюющее дивергницю нуль в обобщённом смысле называется обобщённо-соленоидальным в D.

Предложение 1. Векторное поле $\mathbf{v} = (u, v) \in \mathrm{C}^1(D), D \subset \mathbb{R}^2$ имеет диверегенцию ρ в обобщённом смысле если и только если $\operatorname{div} \mathbf{v} = u_x + v_y = \rho$ в D в смысле непрерывных функций.

◀ Ограничимся выводом классического равенства из обобщённого. Обратный ход почти очевиден. Зафиксируем произвольную пробную функцию η. Выберем $D_0 : \overline{D}_0 \subset D$, $\operatorname{supp} \eta \subset D_0$, и к D_0 применим формулу Грина-Гаусса. Тогда

$$-\int\limits_D \rho\eta \, dz = -\int\limits_D (u\eta_x + v\eta_y) \, dz = -\int\limits_{D_0} (u\eta_x + v\eta_y) \, dz = -\int\limits_{D_0} ((u\eta)_x + (v\eta)_y - (u_x + v_y)\eta) \, dz =$$

$$= -\int\limits_{\partial D_0} (un_x + vn_y)\eta \, ds + \int\limits_{D_0} (u_x + v_y)\eta \, dz = +\int\limits_{D_0} (u_x + v_y)\eta \, dz.$$

Здесь граничный интеграл исчез, так как $\eta = 0$ на ∂D_0 по предположению о финитности пробной функции в области интегрирования. Ввиду интегрального тождества (7), выбора D_0 и полученной цепочки равенств

$$\int\limits_D ((u_x + v_y) - \rho)\eta \, dz = 0 \; \forall \, \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(D),$$

Обобщённый ротор

что, по лемме Дюбуа-Раймона, влечёт $u_x + v_y = \rho$ в D ►.

Определение 4. Векторное поле $\mathbf{v} = (u, v) \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, называется обобщённым решением уравнения $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = v_x - u_y = \omega$ в D, где $\omega \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$, другими словами имеет вихрь ω в обобщённом смысле, если

$$\int\limits_D (u\eta_y - v\eta_x)dz = \int\limits_D \omega\eta dz \ \forall\, \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(D). \tag{9}$$

Поле, имеющее нулевой вихрь в обощённом смысле назовём обобщённо безвихревым.

Предложение 2. Векторное поле $\mathbf{v} = (u, v) \in \mathrm{C}^1(D), D \subset \mathbb{R}^2$ имеет вихрь ω в обобщённом смысле если и только если $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = v_x - u_y = \omega$ в D в смысле непрерывных функций.

Обобщённый и классический ротор

◀ Ограничимся выводом классических равенств из обобщённых. Обратный ход почти очевиден. Зафиксируем произвольную пробную функцию η. Выберем $D_0 : \overline{D}_0 \subset D$, $\operatorname{supp}\eta \subset D_0$, и применим формулу Грина-Стокса. Тогда

$$\int\limits_{D_0} (u\eta_y - v\eta_x)\,dz = \int\limits_{D_0} ((u\eta)_y - (v\eta)_x + (v_x - u_y)\eta)\,dz =$$

$$= \oint\limits_{\partial D_0} \eta(udx + vdy) + \int\limits_{D_0} (v_x - u_y)\eta\,dz = + \int\limits_{D_0} (v_x - u_y)\eta\,dz.$$

Здесь граничный интеграл исчез, так как $\eta = 0$ на ∂D_0 по предположению о финитности пробной функции в области интегрирования. Ввиду интегрального тождества (9), выбора D_0 и полученной цепочки равенств

$$\int\limits_{D} (v_x - u_y)\eta\,dz = \int\limits_{D} \omega\eta\,dz \;\forall\,\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(D),$$

что, по лемме Дюбуа-Раймона, влечёт $v_x - u_y = \omega$ в D. ▶

Обобщённые решения уравнения Пуассона

Определение 5. Пусть задана функция $\omega \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D), D \subset \mathbb{R}^2$. Функция $\psi \in \mathrm{L}_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется обобщённым решением уравнения Пуассона $-\Delta\psi = \omega$ в области D, если

$$-\int\limits_D \psi \Delta\eta \, dz = \int\limits_D \omega\eta dz \ \forall\, \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(D). \tag{10}$$

Предложение 3. Пусть функция $\psi \in \mathrm{C}^2(D)$ представляет собой решение уравнения Пуассона $-\Delta\psi = \omega$ в области D в обобщённом смысле если только если $-\Delta\psi = \omega$ в смысле равенства непрерывных функций.

◀ Ограничимся выводом классических равенств из обобщённых. Обратный ход почти очевиден. Зафиксируем произвольную пробную функцию η и выберем D_0 как в предложениях 1 и 2. Применяем формулу Грина для оператора Лапласа. Имеем

$$\int\limits_{D_0} (\psi\Delta\eta - \eta\Delta\psi)\, dz = \int\limits_{\partial D_0} \left(\psi\frac{d\eta}{dn} - \eta\frac{d\psi}{dn}\right) dz = 0.$$

Свёртка. Лог-потеницал как обобщённое решение

Граничный интеграл исчезает по предположению финитности пробной функции в области интегрирования, которое влечёт $d\eta/dn = \eta = 0$ на ∂D_0. Ввиду интегрального тождества (10) выбора D_0 и полученной цепочки равенств

$$\int\limits_{D_0} (\omega + \Delta\psi)\,\eta dz = 0 \;\forall\, \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(D) \implies -\Delta\psi = \omega \text{ в } D. \;\blacktriangleright$$

Рассмотрим примеры обобщённых решений. Вводим обозначения

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z|}, \quad \mathbf{V}(z) = \nabla^\perp G(z) = \frac{(\zeta - z)^\perp}{2\pi|z-\zeta|^2}. \tag{11}$$

Определение 6. Пусть функции h, g заданы на $\mathbb{R}^n$. Интеграл

$$\int h(x-y)g(y)dy = \int h(y)g(x-y)dy$$

называется свёрткой функций f и g и обозначается $h * g$.
Свёртка коммутативна.
$G * f$ и $\mathbf{V} * f$ есть лог-потенциал и векторный потенциал (5) с плотностями f, соответственно.

Предложение 4. Пусть $\omega \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^2)$ – финитная функция. Тогда $\psi = G * \omega$ – обобщённое решение уравнения Пуассона $-\Delta\psi = \omega$ в $\mathbb{R}^2$.

Векторный потенциал как обобщённое решение

◀ Для произвольной $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ имеет место равенство $\eta = -G * (\Delta\eta)$. Это, фактически, было установлено при доказательстве теоремы о решении уравнения Пуассона в лекции 4 (Теорема 4). Далее,

$$\int \psi \Delta\eta dz = \int G * \omega \Delta\eta dz = \int \int G(z-\zeta)\omega(\zeta)(\Delta\eta)(z) d\zeta dz =$$

$$\int \omega(\zeta) \int G(z-\zeta)(\Delta\eta)(z) dz d\zeta = -\int \omega\eta d\zeta. \ \blacktriangleright$$

Предложение 5. Пусть $\omega \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^2)$ – финитная функция. Тогда поле $\mathbf{v} = \mathbf{V} * \omega$ соленоидально и его вихрь равен ω в $\mathbb{R}^2$ в обобщённом смысле.

◀ Как уже говорилось, лог-потенциал ограниченной плотности дифференцируем. В частности, $\nabla^\perp(G * \omega) = \mathbf{V} * \omega = \mathbf{v}$, то есть, $\mathbf{v} = (u, v) = (\psi_y, -\psi_x)$, где $\psi = G * \omega$. Выбираем произвольную пробную функцию $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Имеют место равенства

$$\int (u\eta_y - v\eta_x) dz = \int (\psi_y\eta_y + \psi_x\eta_x) dz = \int ((\psi\eta_y)_y + (\psi\eta_x)_x - \psi\Delta\eta)\, dz =$$

$$= -\int \psi\Delta\eta \, dz = \int \omega\eta dz$$

по предложению 4.

Оператор Лапласа кусочно-гладкой функции

Далее,

$$\int (u\eta_x + v\eta_y) dz = \int (\psi_y\eta_x - \psi_x\eta_y) dz = \int \left((\psi\eta_x)_y - (\psi\eta_y)_x\right) dz = 0. \ \blacktriangleright$$

Предложение 6. Пусть $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ и характеристической функцией χ, и область $D \supset D_1 \cup S$, и $D_2 = D \setminus D_1$. Пусть $\psi_i \in \mathrm{C}^2(D)$, и $-\omega = -\Delta\psi_1\chi - \Delta\psi_2(1-\chi)$. Функция $\psi = \psi_1\chi + \psi_2(1-\chi)$ будет обобщенным решением уравнение $-\Delta\psi = \omega$ в области D если и только если $\psi \in \mathrm{C}^1(D)$.

◀ По предложению 3, ψ представляет собой обобщённое решение уравнения $-\Delta\psi = \omega$ в областях D_1 и D_2. Соответственно, интегральные тождества (10) верны для всех пробных функций из $\mathrm{C}_0^\infty(D_1) \cap \mathrm{C}_0^\infty(D_2)$. Выберем пробную функцию $\eta \notin \mathrm{C}_0^\infty(D_1) \cap \mathrm{C}_0^\infty(D_2)$ и выберем область $D_0 \subset D$ как в предложениях 1 и 2. Применяем формулу Грина для оператора Лапласа к областям D_1 и $D_0 \setminus D_1$. Получаем

$$\int\limits_D \omega\eta dz = \int\limits_{D_0} \omega\eta dz = \int\limits_{D_1} \omega_1\eta\, dz + \int\limits_{D_0\setminus D_1} \omega_2\eta\, dz = -\int\limits_{D_1} \eta\Delta\psi_1\, dz - \int\limits_{D_0\setminus D_1} \eta\Delta\psi_2\, dz =$$

Оператор Лапласа кусочно-гладкой функции

$$= \left(\int\limits_{\partial D_1} + \int\limits_{\partial(D_0 \setminus D_1)} \right) \left(\psi_1 \frac{d\eta}{dn} - \eta \frac{d\psi_1}{dn} \right) ds - \int\limits_{D_0} \psi \Delta\eta \, dz.$$

Ввиду выбора D_0, $\eta = 0$ на ∂D_0. Поэтому вклад в интеграл по $\partial(D_0 \setminus D_1)$ дает только $\Gamma = \partial D_1$. Следовательно, оба криволинейных интеграла берутся по Γ, но с противоположными направлениями нормали. Выберем внешнюю нормаль к D_1. Тогда

$$\left(\int\limits_{\partial D_1} + \int\limits_{\partial(D_0 \setminus D_1)} \right) \left(\psi_1 \frac{d\eta}{dn} - \eta \frac{d\psi_1}{dn} \right) ds = \int\limits_{\Gamma} \left((\psi_1 - \psi_2) \frac{d\eta}{dn} - \eta \frac{d(\psi_1 - \psi_2)}{dn} \right) ds.$$

Итак, имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial D} (\psi \Delta\eta + \omega\eta) dz = \int\limits_{\Gamma} \left((\psi_1 - \psi_2) \frac{d\eta}{dn} - \eta \frac{d(\psi_1 - \psi_2)}{dn} \right) ds. \tag{12}$$

Если $\psi \in C^1(D)$, то правая часть интеграла (12) равна нулю. В таком случае интегральное тождество (10) выполняется и ψ – обобщённое решение.

Дивергенция кусочно-гладкого поля

Обратно, пусть ψ – обобщённое решение. Тогда левая часть (12) равна нулю при произвольной пробной функции η. Оказывается, запас пробных функций настолько велик, что можно считать, что $\eta = 0$ на Γ, а $d\eta/dn$ – произвольная функция на Γ. Отсюда выводим, что $\psi_1 - \psi_2 = 0$ на S на основании соображений типа леммы Дюбуа-Раймона. Детали опустим. Аналогичные рассуждения, с учётом уже доказанной непрерывности ψ, показывают, что $d(\psi_1 - \psi_2)/dn = 0$ на Γ. Объединив этот результат с непрерывностью ψ заключаем, что $\nabla\psi_1 = \nabla\psi_2$ на Γ. В самом деле, $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 0$ на Γ. Следовательно $\nabla\varphi \parallel \mathbf{n}$ на Γ, но $\mathbf{n}\nabla\varphi = d\varphi/dn = 0$ на Γ. ▶

Предложение 7. Пусть $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ и характеристической функцией χ, и область $D \supset D_1 \cup S$, и $D_2 = D \setminus D_1$. Пусть поля $\mathbf{v}_i \in \mathrm{C}^1(D)$, и $\operatorname{div} \mathbf{v}_i = \rho_i$ в $D_i, i = 1, 2$. Поле $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1\chi + \mathbf{v}_2(1-\chi)$ будет иметь (в обобщённом смысле) диверегеницию $\rho = \rho_1\chi + \rho_2(1-\chi)$, если $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{n} = 0$ на Γ.
◀ Пусть $\mathbf{v} = (u, v)$, $\mathbf{v}_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2$. По предложению 1, $\operatorname{div} \mathbf{v} = \rho$ в областях D_1 и D_2. Соответственно, интегральные тождества (7) верны для всех пробных функций из $\mathrm{C}_0^\infty(D_1) \cap \mathrm{C}_0^\infty(D_2)$. Выберем пробную функцию $\eta \notin \mathrm{C}_0^\infty(D_1) \cap \mathrm{C}_0^\infty(D_2)$ и выберем область $D_0 \subset D$ как в предложениях 1 и 2. Применяем формулу Грина-Гаусса к областям D_1 и $D_0 \setminus D_1$, и действуя как в предложении 6, получаем

Ротор кусочно-гладкого поля

$$\int\limits_D ((u\eta_x + v\eta_y) + \rho\eta)\, dz = \int\limits_\Gamma ((u_2 - u_1)n_x + (v_2 - v_1)n_y)\,\eta ds.$$

Отсюда, рассуждая как при доказательстве предложения 6, выводим требуемое. ▶

Предложение 8. Пусть $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ и характеристической функцией χ, и область $D \supset D_1 \cup S$, и $D_2 = D \setminus D_1$. Пусть поля $\mathbf{v}_i \in \mathrm{C}^1(D)$, и $\operatorname{rot} \mathbf{v}_i = \omega_i$ в D_i, $i = 1, 2$. Поле $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1\chi + \mathbf{v}_2(1 - \chi)$ имеет (в обобщённом смысле) вихрь $\omega = \omega_1\chi - \omega_2(1 - \chi)$, если и только если $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \parallel \mathbf{n}$ на Γ.

◀ Пусть $\mathbf{v} = (u, v)$, $\mathbf{v}_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2$. По предложению 2, $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega$ в областях D_1 и D_2. Соответственно, интегральные тождества (9) верны для всех пробных функций из $\mathrm{C}_0^\infty(D_1) \cap \mathrm{C}_0^\infty(D_2)$. Выбираем пробную функцию $\eta \notin \mathrm{C}_0^\infty(D_1) \cap \mathrm{C}_0^\infty(D_2)$ и действуем, как в предложении 7, но применяем формулу Грина-Стокса. Имеем

$$\int\limits_D ((u\eta_y - v\eta_x) - \omega\eta)\, dz = \int\limits_\Gamma ((u_2 - u_1)n_y - (v_2 - v_1)n_x)\,\eta ds.$$

Отсюда вытекает искомое. ▶

Вихревое пятно как обобщённое решение

Пример 2. Пусть выполнены условия предложения 7, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1\chi + \mathbf{v}_2(1-\chi)$, где χ – характеристическая функция D_1, причём $\mathbf{v}_i = \nabla \perp_i^{\psi}$, так что $\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0$ в D_i, $i = 1, 2$. Тем не менее, $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$ в D в обобщённом смысле, если $\psi_1 - \psi_2 \not\equiv 0$ на Γ.

Пример 3. Пусть выполнены условия предложения 8, причем $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1\chi + \mathbf{v}_2(1-\chi)$, где χ – характеристическая функция D_1. Пусть $\mathbf{v}_i = \nabla\varphi$, так что $\operatorname{rot} \mathbf{v}_i = 0$ в D_i, $i = 1, 2$. Тем не менее, $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ в D в обобщённом смысле, если $\psi_1 - \psi_2 \not\equiv 0$ на Γ.

Замечание 4. Как видно из предложений 7 и 8, и из примеров 2 и 3, для того, чтобы векторное поле имело (в обобщённом смысле) кусочно-постоянную или кусочно-гладкой завихренность и нулевую дивергенцию (как в случае вихревого пятна), оно должно быть непрерывно. Этим свойством, как уже говорилось, обладает поле, заданное векторным потенциалом вихревого пятна. Таким образом, даны ответы на вопросы, поставленные в начале лекции.

Предложение 9. Пусть вихревое пятно, понимаемое в смысле определения $1'$ из лекции 5, порождает движение материальных частиц $a \mapsto X(a, t)$ непрерывно-дифференцируемое вне и внутри пятна. Тогда функция $t \mapsto \omega(t)$, определённая движением пятна, есть обобщённое решение уравнения вихря в смысле определения 1 этой лекции.

Вихревое пятно как обобщённое решение-1

$$\blacktriangleleft \int\limits_{E_T} \omega(u\eta_x + v\eta_y + \eta_t)dzdt = \int\limits_{-T}^{T} \int \omega(z,t)(\eta_t + u\eta_x + v\eta_y)dzdt =$$

$$\int\limits_{-T}^{T} \int \omega(X(a,t),t)\partial_t(\eta(X(a,t))dadt = \int\limits_{-T}^{T} \int \omega_0(a)\partial_t(\eta(X(a,t),t)dadt =$$

$$= \int\limits_{-T}^{T} \partial_t \int \omega_0(a)\eta(X(a,t),t)dadt = 0$$

в силу финитности η в E_T. ▶

Предложение 10. Пусть обобщённое решение ω уравнения вихря в смысле определения 1 допускает представление $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v_1}(\cdot,t)\chi(t) + \mathbf{v_2}(t)(1-\chi(t))$ $\forall t \in (-T,T)$, где $\chi(t)$ – характеристическая функция области $D(t)$ с гладкой границей $S(t)$, и $\mathbf{v}_i$, как функции (z,t) принадлежат $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$. Предположим, что $\omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ (ротор понимается в обобщённом смысле) имеет разрыв на $S(t)$ при каждом t. Тогда кривая $S(t)$ материальна.

◀ Ограничимся случаем вихревого пятна: $\omega = 0$ вне $D(t)$.

Вихревое пятно как обобщённое решение-2

Предположим, что $\forall\ t\ D(t) = Y(D_0, t)$, где $Y(t) \in \mathrm{Diff}(D_0, D(t))$, и D_0 – неподвижная область с гладкой границей S_0. В Движению $Y(t)$ области $D(t)$ сопоставим поле скорости $\mathbf{w}(z,t) = Y_t(Y^{-1}(z,t),t)$. Пусть $f = f(z,t)$ – некоторая гладкая функция. Как мы установили в лекции 2 (см. формулу (9))

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} f(z,t)dz = \int\limits_{D(t)} (f_t(z,t) + \mathrm{div}\,(f\mathbf{w}))dz;$$

Отсюда, по формуле Грина-Гаусса, находим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} f(z,t)dz = \int\limits_{D(t)} f_t dz + \int\limits_{S(t)} f\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}ds. \tag{13}$$

По предположению, имеют место интегральные тождества

$$\int\limits_{E_T} \omega(\eta_t + u\eta_x + v\eta_y)dzdt = 0$$

Вихревое пятно как обобщённое решение-2

Перепишем их так

$$\int_{-T}^{T}\int_{D(t)} \omega\eta_t dzdt = -\int_{-T}^{T}\int_{D(t)} \omega(u\eta_x + v\eta_y)dzdt.$$

Преобразуем левую часть. С учётом (13) имеем

$$\int_{-T}^{T}\int_{D(t)} \omega\eta_t dzdt = \int_{-T}^{T}\partial_t \int_{D(t)} \omega\eta dzdt - \int_{-T}^{T}\int_{S(t)} \omega\eta\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\ dsdt - \int_{-T}^{T}\int_{D(t)} \omega_t\eta dzdt,$$

где интегрирование производной интеграла по $D(t)$ даёт ноль ввиду финитности η. Преобразуем правую часть. Ввиду соленоидальности поля скорости имеем

$$\omega u\eta_x + \omega v\eta_y = \omega(u\eta)_x + \omega(v\eta)_y = (\omega u\eta)_x + (\omega v\eta)_y - \eta(u\omega_x + v\omega_y).$$

Следовательно, правая часть равна

$$-\int_{-T}^{T}\int_{S(t)} \omega\eta\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dsdt + \int_{-T}^{T}\int_{D(t)} (u\omega_x + v\omega_y)\eta dsdt.$$

Собрав всё вместе, приходим к равенству

Вихревое пятно как обобщённое решение-3

$$\int_{-T}^{T}\int_{S(t)} \omega\eta(\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot\mathbf{n}dsdt = \int_{-T}^{T}\int_{D(t)} (u\omega_x + v\omega_y + \omega_t)\eta dzdt. \tag{14}$$

Выбираем здесь пробную функцию финитной в области Q_T, заметаемой движением $D(t)$. Для любой такой функции левая часть равенства (14) равна нулю. Следовательно, $u\omega_x + v\omega_y + \omega_t = 0$ в Q_T. Поэтому правая часть равна нулю для любой пробной функции. Отсюда вытекает, что $\omega(\mathbf{w}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} = 0$ на $S(t)$ для всех t. Если $\omega = 0$ на $S(t)$, то вихрь непрерывен. Если на $S(t)$ вихрь терпит разрыв, то $(\mathbf{w}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} = 0$ на $S(t)$ для всех t. Но $\mathbf{v}$ – скорость материальной частицы находящейся на границе в данный момент времени, а $\mathbf{w}$ – скорость движения точки границы, в которой эта частица находится. Следовательно, частицы жидкости не могут покинуть $S(t)$, что и означает её материальность. ▶

Замечание 5. Полученный результат показывает, что условие материальности границы вихревого пятна – аналог условий Гюгонио на сильном разрыве. Перенос линии разрыва вдоль характеристик (в случае вихревого пятна это пути материальных частиц) – общее свойство слабых разрывов.