Общая программа курса «Комплексный анализ» (2018/2019 уч. г., 4 семестр, группы 1–3)

Составитель: М. Э. Абрамян

Часть 1. Функции комплексного переменного

Комплексные числа. **[1a]** Комплексное число: определение, вещественная и мнимая часть комплексного числа. Сложение и умножение комплексных чисел. Поле комплексных чисел **C**. Операция комплексного сопряжения: определение и свойства. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, главное значение аргумента, тригонометрическая форма комплексного числа. Открытые и замкнутые множества в **C**, граница множества в **C**. Предел последовательности комплексных чисел. Связное множество и область в **C**: определения.

Функции комплексного переменного. Функция комплексного переменного: определение. Предел функции комплексного переменного: определение и **[1b]** свойства (без доказательства). Непрерывность функции комплексного переменного в точке: определение и свойства (без доказательства). Примеры функций комплексного переменного: $f(z) = z$, полином, рациональная функция.

Комплексные числовые и функциональные ряды. Комплексный числовой ряд: определение, сходящиеся и абсолютно сходящиеся ряды. Теорема об умножении комплексных рядов. **[2a]** Равномерная сходимость комплексной функциональной последовательности и ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости комплексного функционального ряда (без доказательства). Теорема о непрерывности равномерно сходящегося комплексного функционального ряда с непрерывными членами (без доказательства). Комплексный степенной ряд и ассоциированный с ним вещественный ряд. Теорема о сходимости комплексного степенного ряда, круг сходимости комплексного степенного ряда (без доказательства). Примеры комплексных степенных рядов. **[2b]** Теорема о сходимости суммы и произведения степенных рядов (без доказательства).

Элементарные функции комплексного переменного. Комплексная экспонента $\exp z$, комплексные тригонометрические функции (синус $\sin z$ и косинус $\cos z$): определение в виде степенных рядов и свойства: существование во всей комплексной плоскости, соотношение $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$, связь функций exp, cos, sin (формула Эйлера), выражение синуса и косинуса через экспоненту, свойства четности для синуса и косинуса, периодичность экспоненты, формулы для ее модуля и аргумента, формулы для синуса и косинуса суммы и разности, **[3a]** периодичность синуса и косинуса, формулы приведения, основное тригонометрическое тождество. Отсутствие нулей у экспоненты, нули синуса и косинуса. Комплексные гиперболические функции: определение, связь с комплексными тригонометрическими функциями, аналог основного тригонометрического тождества для гиперболических функций. Вещественная и мнимая части синуса, модуль синуса, рельеф синуса.

Многозначные функции. **[3b]** Многозначные функции как функции, обратные к однозначной функции. Выделение однозначных ветвей многозначной функции. Пример многозначной функции: комплексный корень степени n ($z^{1/n}$), его однозначные ветви. Переход с одной ветви на другую, точки ветвления.

Элементарные функции комплексного переменного (продолжение). **[4a]** Комплексный логарифм $\mathrm{Ln}\, z$ как функция, обратная к комплексной экспоненте. Многозначность логарифма, примеры вычисления значения логарифма. Смысл соотношения $\mathrm{Ln}(a + b) = \mathrm{Ln}\, a + \mathrm{Ln}\, b$. Парадокс Бернулли и его объяснение. **[4b]** Однозначные ветви логарифма, главное значение логарифма $\ln z$. Точки ветвления логарифма как пример точек ветвления бесконечного порядка. Понятие о римановых поверхностях, построение римановых поверхностей для функций $z^{1/n}$ и $\mathrm{Ln}\, z$. **[5a]** Общее определение операции возведения в степень для комплексных чисел: $a^b = \exp(b\, \mathrm{Ln}\, a)$, доказательство того, что в общем случае соотношение $a^b a^c = a^{b+c}$ не имеет места. Функция e^z и ее связь с ранее введенной функцией $\exp z$. Степенная z^b и показательная a^z функции, число однозначных ветвей этих функций и их точки ветвления. Обратные тригонометрические функции: $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arctg}\, z$, вывод формулы для арккосинуса.

Часть 2. Аналитические функции комплексного переменного

Дифференцируемые функции комплексного переменного. **[5b]** Два эквивалентных определения дифференцируемой в точке функции комплексного переменного. Непрерывность дифференцируемой функции. Критерий дифференцируемости в точке функции комплексного переменного в терминах условий Коши-Римана, следствие. **[6a]** Примеры недифференцируемых функций: $f(x + iy) = x - iy$, $g(z) = |z|$. Аналитическая функция: определение. Простейшие свойства аналитических функций (без доказательства): арифметические свойства, производная суперпозиции, производная обратной функции. Примеры аналитических функций: $\exp z$, $\sin z$, $\mathrm{Ln}\, z$, a^z z^b.

Криволинейный интеграл в комплексной плоскости. **[6b]** Интеграл от комплекснозначной функции: определение и свойства (без доказательства). Гладкий путь в комплексной плоскости: определение. Замена параметра для гладкого пути: определение, теорема о том, что пути, полученные путем замены параметра, образуют класс эквивалентности. Ориентированная гладкая кривая в комплексной плоскости: определение. Простая кривая, замкнутая крива, кусочно-гладкая кривая: определения. Кривая, противоположно ориентированная к данной кривой: определение. Примеры ориентированных кривых. Криволинейный интеграл по ориентированной гладкой кривой: определение, **[7a]** доказательство корректности определения (независимость значения интеграла от выбора параметризации кривой). Свойство интеграла по противоположно ориентированной кривой. Интеграл по кусочно-гладкой кривой: определение. Оценка модуля интеграла по кусочно-гладкой кривой.

Первообразная функции комплексного переменного. Определение первообразной функции, теорема Ньютона-Лейбница, **[7b]** следствия (о том, что для функции, имеющей первообразную в области, интеграл не зависит от формы кривой, а интеграл по замкнутой кусочно-гладкой кривой равен нулю). Достаточное условие существования первообразной в терминах значения интеграла по произвольной замкнутой кусочно-гладкой кривой.

Аппроксимация интеграла по кривой интегралом по ломаной. Вписанная в кривую ломаная, расстояние между точкой и множеством, δ-окрестность множества: определения. Две теоремы об аппроксимации: теорема об аппроксимации интеграла от непрерывной функции по кусочно-гладкой кривой интегралом по вписанной в нее ломаной и теорема об аппроксимации интеграла по границе области интегралом по замкнутой ломаной, лежащей внутри области (обе теоремы без доказательства).

Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши. **[8a]** Односвязная область: определение, примеры. Интегральная теорема Коши (о том, что для аналитической функции в односвязной области интеграл по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру равен нулю). Пример, показывающий, что условие односвязности области является существенным (функция $1/z$ в $\mathbf{C}\backslash\{0\}$). **[8b]** Следствие1 (вариант теоремы Коши для интеграла по кусочно-гладкой границе односвязной области при условии, что функция является аналитической в области и непрерывной в ее замыкании). Следствие 2 (вариант теоремы Коши для интеграла по границе области, если граница состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых, ориентированных надлежащим образом). Интегральная формула Коши.

Разложение аналитической функции в степенной ряд. **[9a]** Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (без доказательства), следствие о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда. Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда внутри его круга сходимости. Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд, **[9b]** следствие о радиусе сходимости этого ряда, формула для коэффициентов ряда, следствие о бесконечной дифференцируемости аналитической функции, представление аналитической функции в виде ряда Тейлора. Теорема Морера (критерий аналитичности в терминах равенства нулю интеграла по любому замкнутому контуру односвязной области). Теорема Вейерштрасса для последовательности аналитических функций (о том, что если последовательность аналитических функций равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в области, то предельная функция является аналитической в области), следствие для рядов.

Нули аналитической функции. Теорема о нулях аналитической функции. **[10a]** Представление аналитической функции в окрестности изолированного нуля, следствие об отсутствии других нулей в окрестности изолированного нуля. Теорема о сгущении нулей (аналитическая функция, имеющая точку сгущения нулей, является тождественно равной нулю в своей области определения), следствия (теорема единственности, принцип аналитического продолжения). Примеры применения теоремы единственности: 1) существование не более одной аналитической функции, совпадающей с требуемой функцией вещественного переменного на вещественном промежутке; 2) распространение соотношений, доказанных для вещественного промежутка, на комплексную плоскость. Пример ситуации, когда теорема единственности неприменима (построение аналитической функции f такой, что $f(n\pi) = 0$, n — целое).

Ряд Лорана. **[10b]** Ряд Лорана: определение. Теорема о разложении функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана, формула для коэффициентов ряда Лорана. **[11a]** Пример разложения в ряд Лорана. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Особые точки однозначного характера: определение, примеры особых точек, не являющихся особыми точками однозначного характера. Классификация особых точек в терминах существования предела, примеры. **[11b]** Регулярная и главная часть ряда Лорана: определения. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Критерий того, что особая точка является устранимой, в терминах разложения в ряд Лорана, следствие (о том, что особая точка ограниченной функции является устранимой). Критерий того, что особая точка является полюсом, в терминах разложения в ряд Лорана; следствие о представлении функции в окрестности полюса кратности m. Критерий того, что особая точка является существенно особой точкой, в терминах разложения в ряд Лорана. **[12a]** Теоремы Сохоцкого и Пикара о свойствах существенно особых точек (теорема Пикара без доказательства).

Теория вычетов и ее применение. Вычет аналитической функции в точке: определение в терминах ряда Лорана и в терминах интеграла по контуру. Пример вычисления вычета (вычет функции $e^{1/z}$ в точке 0). Две формулы для вычисления вычета в случае простого полюса, **[12b]** пример. Формула для вычисления вычета в случае кратного полюса. Простейший вариант основной теоремы теории вычетов (случай ограниченной односвязной области). Вычет в бесконечно удаленной точке: определение, теорема о вычете в бесконечно удаленной точке (для функции, аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек однозначного характера). **[13a]** Общий вариант основной теоремы теории вычетов. Вычисление вещественных тригонометрических интегралов с применением теории вычетов, пример: интеграл от 0 до 2π от функции $1/(1 - 2a\cos\varphi + a^2)$, $0 < a < 1$. **[13b]** Вычисление вещественных несобственных интегралов от рациональных функций, примеры: интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $(x^2 + 1)^{-4}$, интеграл от 0 до $+\infty$ от функции $1/(1 + x^{2n})$, где n — положительное целое число. **[14a]** Лемма Жордана и вычисление интегралов Фурье, **[14b]** примеры: интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\cos(5x)\,(x - 1)/(x^2 - 2x + 5)$, интеграл от 0 до $+\infty$ от функции $\sin(\alpha x)/x$, где α — ненулевое вещественное число.

Принцип аргумента и теорема Руше. **[15a]** Теорема об интегрировании логарифмической производной (о значении интеграла по контуру Γ от функции $f'(z)/f(z)$, если f аналитична в односвязной области за исключением конечного числа полюсов). Следствие о приращении аргумента функции f при обходе контура Γ (принцип аргумента), его геометрическая интерпретация, примеры. **[15b]** Теорема Руше (о числе нулей функций $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ в односвязной области, если на границе области модуль f строго больше модуля g, а f и g аналитические функции без особых точек). Доказательство основной теоремы алгебры с использованием теоремы Руше. Пример использования теоремы Руше для определения числа корней полинома в области (полином $z^9 - 6z^4 + z^3 - 2z^2 + 1$ в круге $|z| < 1$). Применение принципа аргумента для локализации и приближенного вычисления корней уравнения $f(z) = 0$.

Литература

1. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1966.
2. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть I. Функции одного переменного. — М.: Наука, 1985.