Министерство образования Российской Федерации

РОСТОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.В.Гусаков, Л.Н.Землянухина,

А.Б.Зинченко, Г.Г.Мермельштейн, Л.И.Сантылова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по курсу "Методы оптимизации"

для студентов механико-математического факультета
дневного и вечернего отделения

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Часть 9

Ростов-на-Дону

2002

Методические указания рекомендованы к печати заседанием кафедры исследования операций механико-математического факультета РГУ : протокол № 10 от 4 июня 2002 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

12. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ (продолжение)

В части 8 методических указаний была рассмотрена основная концепция решения многокритериальной задачи - сведение ее к однокритериальной задаче путем построения линейной свертки или свертки Гермейера. Такой подход позволял в определенных случаях свести многокритериальную задачу к однопараметрической задаче линейного программирования с параметром в целевой функции и найти все множество Парето. В данной части предлагается ознакомиться с иными подходами:

1. методом, основанном на ранжировании критериев и позволяющем найти лексикографически оптимальное решение;
2. методом последовательных уступок, в котором величина уступки является мерой отклонения приоритета частных критериев от жесткого лексикографического и использование которого в ряде случаев сводит многокритериальную задачу к однопараметрической линейной задаче с параметром в правых частях ограничений;
3. методом идеальной точки, результат использования которого существенно зависит от выбираемой метрики.

12.6. Ранжирование критериев

Пусть все критерии можно ранжировать (строго упорядочить) по важности так, что при последовательном рассмотрении критериев вначале используется первый (наиболее важный с точки зрения ЛПР) критерий, затем второй и т.д. Это позволяет на множестве допустимых решений задать лексикографическое отношение предпочтения.

Определение 5. Допустимое решение x' лексикографически предпочтительнее допустимого решения x'' ,если выполняется одно из условий:

$$\begin{aligned} &1)\ f_1(x') > f_1(x''),\\ &2)\ \exists\, i<m:\ f_j(x')=f_j(x'')\ \text{для}\ j=1,\dots,i\ \text{и}\ f_{i+1}(x') > f_{i+1}(x'') \end{aligned} \tag{4}$$

Если $f_i(x') = f_i(x'')$ для всех $i=1,\dots,m$, то допустимые решения x',x'' лексикографически эквивалентны.

Определение 6. Допустимое решение x'' лексикографически оптимальное, если не существует допустимого решения x', для которого выполняется условие (4).

Найти лексикографически оптимальное решение многокритериальной задачи можно, решив следующую последовательность задач:

1) найти $\max f_1(x) = f_1^*$ в области $x \in X$;

2) найти $\max f_2(x) = f_2^*$ в области, задаваемой условиями

$$x \in X;\ f_1(x) = f_1^*; \tag{5}$$

……………………………………………………………

m) найти $\max f_m(x) = f_m^*$ в области, задаваемой условиями

$$x \in X;\ f_i(x) = f_i^*,\quad i = \overline{1, m-1};$$

При этом искомым лексикографически оптимальным является всякое решение последней (m-ой) задачи. Полученное лексикографически оптимальное решение является одной из эффективных точек, однако выбор порядка ранжирования существенно влияет на то, какая из эффективных точек будет найдена.

Так как область допустимых решений очередной задачи представляет собой множество оптимальных решений предшествующих задач, то она быстро сужается до одной точки, лишая свободы выбора при максимизации последующих критериев. Попытка избавиться от этого недостатка предпринята в методе последовательных уступок.

12.7. Метод последовательных уступок (компромиссов)

Здесь так же, как и в предыдущем подходе, вначале производится качественный анализ относительной важности критериев. На основании такого анализа критерии нумеруются в порядке убывания важности.

Ищем максимальное значение f_1^* первого критерия $f_1(x)$ на всем множестве допустимых решений. Затем назначаем величину «допустимого» снижения (*уступки*) Δ_1 критерия $f_1(x)$ и определяем наибольшее значение f_2^* второго критерия $f_2(x)$ при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше, чем $f_1^* - \Delta_1$. Затем назначаем величину «допустимого» снижения (*уступки*) Δ_2 критерия $f_2(x)$ и определяем наибольшее значение f_3^* третьего критерия $f = f_3(x)$ при условии, что значение второго критерия должно быть не меньше, чем $f_2^* - \Delta_2$ и т. д. При этом оптимальным решением многокритериальной задачи считается всякое решение последней из задач последовательности:

1) найти $\max f_1(x) = f_1^*$ в области $x \in X$;

2) найти $\max f_2(x) = f_2^*$ в области, задаваемой условиями

$$x \in X;\ f_1(x) \ge f_1^* - \Delta_1; \qquad (6)$$

…………………………………………………………………

m) найти $\max f_m(x) = f_m^*$ в области, задаваемой условиями

$$x \in X;\ \ f_i(x) \geq f_i^* - \Delta_i\,, \quad i = \overline{1, m-1};$$

Очевидно, что если все $\Delta_i = 0$, то метод уступок находит только лексикографически оптимальные решения, которые доставляют *первому* по важности критерию наибольшее на X значение. В другом крайнем случае, когда величины уступок очень велики, решения , получаемые по этому методу, доставляют *последнему* по важности критерию наибольшее на X значение. Поэтому величины уступок можно рассматривать как своеобразную меру отклонения приоритета частных критериев от жесткого лексикографического.

Метод последовательных уступок не всегда приводит к получению только эффективных точек, но среди получаемых этим методом точек всегда существует хотя бы одна эффективная. Это следует из следующих утверждений [2].

Утверждение 3. Если $X \subset R^n$ - множество замкнутое и ограниченное, а функции $f_i(x)$ непрерывны, то решением m-й задачи из (6) является, по крайней мере, одна эффективная точка.

Утверждение 4. Если x^* - единственная (с точностью до эквивалентности) точка, являющаяся решением m-й задачи из (6), то она эффективна.

12.8. Примеры решения многокритериальной задачи методом последовательных уступок

Пример 9. Решить методом последовательных уступок многокритериальную задачу из примера 3.

$$f_1(x)=7x_1 \quad +2x_3-x_4+x_5 \to \max,$$

$$f_2(x)=x_1-5x_2-4x_3+x_4 \quad \to \max$$

при ограничениях

$$-x_1+x_2+x_3 \quad =2;$$

$$3x_1-x_2 \quad +x_4 \quad =3;$$

$$5x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=11;$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } i=1,2,...,5.$$

Упорядочим критерии согласно их нумерации, то есть будем в начале работать с критерием $f_1(x)$, а затем с критерием $f_2(x)$.

При решении примера 3 методом искусственного базиса была получена симплекс-таблица (см. табл.3). Возьмем ее в качестве начальной, вычислив относительные оценки для функции $f = f_1(x)$. Получим таблицу 10. Таблица 11 определяет точку, доставляющую функции $f_1(x)$ наибольшее значение f_1^*, равное 16.

Таблица 10.

		7	0	
$c^в$		x_1	x_2	
2	x_3	-1	1	2
-1	x_4	3	-1	3
1	x_5	3	2	6
	f_1	-9	5	7

Таблица 11.

	x_4	x_2	
x_3	1/3	2/3	3
x_1	1/3	-1/3	1
x_5	-1	3	3
f_1	3	2	16

Далее переходим к решению задачи

$$f_2(x)=x_1-5x_2-4x_3+x_4 \quad \to \max$$

при ограничениях исходной задачи, к которым добавлено новое ограничение $f_1(x) \geq f_1^* - \Delta$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 11, \\ 7x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &\geq 16-\Delta, \\ x_i \geq 0 \text{ для } i&=1,2,\dots,5. \end{aligned} \qquad (7)$$

Новое ограничение преобразуем в равенство и заменим переменные x_1, x_3, x_5, используя таблицу 11, выражениями

$$x_1=1/3x_2-1/3x_4+1,$$

$$x_3=-2/3x_2-1/3x_4+3,$$

$$x_5=-3x_2+x_4+3.$$

В результате этих преобразований дополнительно введенное ограничение примет вид $-2x_2-x_4+x_6 = -16+\Delta$. Итак, получили задачу параметрического программирования с параметром в правой части ограничений.

В качестве начальной таблицы для задачи (7) можно использовать таблицу 12, которая получена из таблицы 11 в результате пополнения ее еще одной строкой и пересчета строки относительных оценок. Решим задачу (7) для произвольного параметра $\Delta \geq 0$. Для этого столбец правых частей ограничений в таблице 12 представим в виде двух столбцов z', z'':

$z_i^0 = z_i' + z_i''\Delta$. При выборе главной строки в таблице 12 следует использовать значения из столбца z'. Полученная далее таблица 13 является оптимальной при $\Delta=0$ и при всех значениях Δ, удовлетворяющих условиям

$$3+(-1/9)\,\Delta \ge 0, \quad 1+(-1/9)\,\Delta \ge 0, \quad 3+1/3\,\Delta \ge 0, \quad 0+1/3\,\Delta \ge 0.$$

Из этой системы неравенств получаем $0 \le \Delta \le 9$. При любом фиксированном значении параметра Δ из отрезка [0,9] единственным решением задачи является точка $x^*=(1+(-1/9)\Delta,\ 0,\ 3+(-1/9)\Delta,\ 0+1/3\Delta,\ 3+1/3\Delta)$. А тогда, на основании утверждения 5 эта точка принадлежит множеству Парето.

Таблица 12.

$c^в$		1	-5		
		x_4	x_2	z'	z''
-4	x_3	1/3	2/3	3	0
1	x_1	1/3	-1/3	1	0
0	x_5	-1	3	3	0
0	x_6	3	2	0	1
	f_2	-2	2	-11	0

Таблица 13.

	x_6	x_2	z'	z''
x_3	-1/9	4/9	3	-1/9
x_1	-1/9	-5/9	1	-1/9
x_5	1/3	11/3	3	1/3
x_4	1/3	2/3	0	1/3
f_2	2/3	10/3	-11	2/3

При $\Delta > 9$ таблица 13 не является оптимальной, и нужно выполнить шаг двойственного симплекс-метода с главным элементом, стоящим на пересечение второй строки и первого или второго столбцов. Получим таблицу 14, из которой видно, что при $\Delta > 9$ решениями являются точки, доставляющие функции $f_2(x)$ значение –5. Таблица 14 определяет опорное решение $\tilde{x}=(0,0,2,3,6)$.

Таблица 14.

	x_1	x_2	z'	z''

x_3	-1	1	2	0
x_6	-9	5	-9	1
x_5	3	2	6	0
x_4	3	-1	3	0
f_2	6	0	-5	0

Найдем эти решения. Выберем главным столбец с 0-оценкой. В зависимости от Δ главной строкой будет первая или вторая строка. Если
$(-9+\Delta)/5 > 2$, то главной строкой будет выбрана первая. А значит, следующей будет таблица 15. Она определяет опорное решение $\tilde{\tilde{x}}$ = (0,2, 0 ,5, 2), если
$-19+\Delta\geq 0$. Итак, если $\Delta\geq 19$, то оптимальными решениями являются все точки выпуклой комбинации

$$x^{***}= (1-\alpha)\tilde{x} +\alpha\tilde{\tilde{x}} =(0,\ 2\alpha,\ 2-2\alpha,\ 3+2\alpha,\ 6-4\alpha),\ \text{где}\ \alpha\in[0,1].$$

Таблица 15.

	x_1	x_3	z'	z''
x_2	-1	1	2	0
x_6	-4	-5	-19	1
x_5	5	-2	2	0
x_4	2	1	5	0
f_2	6	0	-5	0

Если $(-9+\Delta)/5 \leq 2$, то главной строкой будет выбрана 2-я. А значит, следующей после таблицы 14 будет таблица 16. Таблица 16 определяет решение $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}$ =(0, $(-9+\Delta)/5$, $(19-\Delta)/5$, $(6+\Delta)/5$, $(48-2\Delta)/5$), если $-19+\Delta\leq 0$. Итак, если $9<\Delta\leq 19$, оптимальными решениями будут все точки выпуклой комбинации

$x^{**}=(1-\alpha)\tilde{x}+\alpha\tilde{\tilde{x}}=(0;\alpha(-9+\Delta)/5;2-\alpha(-9+\Delta)/5;3+\alpha(-9+\Delta)/5;6-2\alpha(-9+\Delta)/5)$, где $\alpha\in[0,1]$.

В случае, когда оптимальное решение не единственно, не обязательно все эти решения являются эффективными точками, но среди них всегда есть хотя бы одна эффективная. Чтобы выделить из найденных оптимальных решений эффективные, сравним в этих точках значения критериев. Так как все эти решения получены при максимизации функции $f_2(x)$, то относительно второго критерия эти точки эквивалентны. Найдем значения функции $f_1(x)$:

$f_1(x^{***})=2(2-2\alpha)-(3+2\alpha)+6-4\alpha=7-10\alpha$, где $\alpha\in[0,1]$ и $\Delta\geq19$;

$f_1(x^{**})=2(2-\alpha(-9+\Delta)/5)-(3+\alpha(-9+\Delta)/5)+6-2\alpha(-9+\Delta)/5=$

$=7+(\alpha(-9+\Delta)/5)(-2-1-2)=7-(-9+\Delta)\alpha$, где $\alpha\in[0,1]$ и $9<\Delta\leq19$.

При $\alpha=0$ получаем $x^{***}=\tilde{x}$ и $x^{**}=\tilde{x}$ и, значит, $f_1(x^{***})<f_1(\tilde{x})$ $f_1(x^{**})<f_1(\tilde{x})$, если $\alpha\in(0,1]$. Итак, точки x^{***},x^{**}, только вычисленные при $\alpha=0$ являются эффективными.

Таблица 16.

	x_1	x_6	z'	z''
x_3	4/5	-1/5	19/5	-1/5
x_2	-9/5	1/5	-9/5	1/5
x_5	33/5	-2/5	48/5	-2/5
x_4	6/5	1/5	6/5	1/5
f_2	6	0	-5	0

Окончательный результат формулируется следующим образом. В качестве решения многокритериальной задачи будут получены :

1) при $0\leq\Delta\leq9$ точка из множества Парето (эффективная точка)

$$x^*=(1+(-1/9)\Delta,\ 0,\ 3+(-1/9)\Delta,\ 0+1/3\Delta,\ 3+1/3\Delta),$$

2) при $\Delta \geq 19$ эффективная точка $\tilde{x}=(0,0,2,3,6)$ и точки, не принадлежащие множеству Парето, но слабо эффективные,

$$x^{***}=(1-\alpha)\tilde{x}+\alpha\tilde{\tilde{x}}=(0,\ 2\alpha,\ 2-2\alpha,\ 3+2\alpha,\ 6-4\alpha),\ \text{где}\ \alpha\in(0,1],$$

3) при $9<\Delta\leq 19$ эффективная точка $\tilde{x}=(0,0,2,3,6)$ и точки, не принадлежащие множеству Парето, но слабо эффективные, $x^{**}=(1-\alpha)\tilde{x}+\alpha\tilde{\tilde{\tilde{x}}}=$

$=\ (0;\alpha(-9+\Delta)/5;2-\alpha(-9+\Delta)/5;3+\alpha(-9+\Delta)/5;6-2\alpha(-9+\Delta)/5)$, где $\alpha\in(0,1]$.

■

Пример 10. Методом последовательных уступок найти решение задачи примера 2, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_2,f_1\}$, и $\Delta_2=1$.

Первая задача из последовательности (6) в данном случае имеет вид:

$$f_2(x)=4x_1-x_2\ \to\ \max,$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&-x_1+x_2\leq 1,\\ &x_1+x_2\geq 3,\\ &x_1-2x_2\leq 0,\\ &x_1\leq 4,\quad x_2\leq 3.\end{aligned}$$

Решение этой задачи можно найти графически. Из рисунка 14 видно, что максимум критерия $f_2(x)$ на множестве X достигается в вершине $x^5=(4,2)$ и $f_2^*=f_2(x^5)=14$.

Пример 10. Методом последовательных уступок найти решение задачи примера 2, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_2,f_1\}$, и $\Delta_2 = 1$.

Первая задача из последовательности (6) в данном случае имеет вид:

$$f_2(x)=4x_1 - x_2 \to \max ,$$

при ограничениях

$$-x_1 + x_2 \le 1 ,$$

$$x_1 + x_2 \ge 3,$$

$$x_1 - 2x_2 \le 0 ,$$

$$x_1 \le 4 , \quad x_2 \le 3 .$$

Решение этой задачи можно найти графически. Из рисунка 14 видно, что максимум критерия $f_2(x)$ на множестве X достигается в вершине $x^5=(4,2)$ и $f_2^* = f_2(x^5)=14$.

Графическое решение примера 10

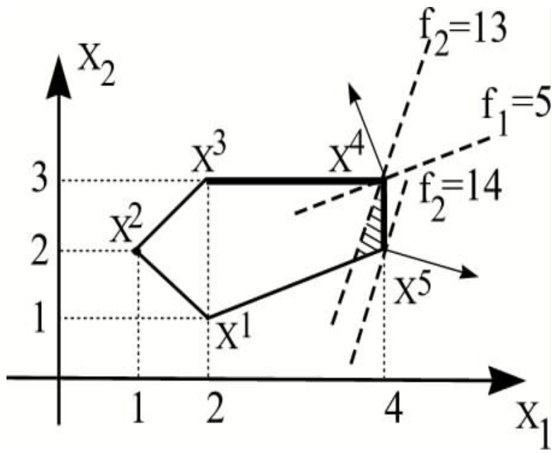

Рис.14.

Добавим к ограничениям задачи условие $f_2 \ge f_2^* - \Delta$ и сформулируем вторую задачу последовательности (6):

$$f_1=-x_1+3x_2 \to \max,$$

$-x_1 + x_2 \le 1$,

$x_1 + x_2 \ge 3$,

$x_1 - 2x_2 \le 0$,

$4x_1 - x_2 \ge 13$,

$x_1 \le 4$, $\quad x_2 \le 3$.

Ее решением (рис.14) будет вершина x^4=(4,3) и $f_1^* = f_1(x^4)$=5. Так как оптимальное решение последней задачи единственно, то в силу утверждения 5, x^4 принадлежит множеству Парето.

Отметим, что при $\Delta \in [0,1]$ методом последовательных уступок будет найдена одна из точек отрезка $[x^4, x^5]$, а при $\Delta > 1$, одна из точек отрезка $[x^3, x^4]$. Все эти точки и только они принадлежит множеству Парето.

■

12.9. Метод идеальной точки

Предположим, что X ограниченное замкнутое множество, тогда все задачи $f_i^* = \max\limits_{x \in X} f_i(x)\ (i = \overline{1,m})$ имеют решения. Полученную точку $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*)$ назовем идеальной [5], так как ни по одному критерию нельзя получить большее значение. Обычно идеальная точка не принадлежит множеству F. Если она все-таки принадлежит множеству F, то именно точка $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*)$ будет решением многокритериальной задачи в пространстве критериев R^m. Введем понятие расстояния между двумя точками $\rho(a,b)$ в пространстве R^m:

$$c_s(a,b) = \left[\sum_{i=1}^{m} |a_i - b_i|^s \right]^{1/s}.$$

При s=1 получаем

$$c_1(a,b)=\sum_{i=1}^{m}|a_i-b_i|.$$

При s=2 имеем обычное евклидово расстояние

$$c_2(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2}.$$

И наконец, при s=∞ получим равномерную (нормальную) метрику

$$c_\infty(a,b)=\max_i|a_i-b_i|.$$

Теперь решение многокритериальной задачи можно свести к решению обычной однокритериальной задачи оптимизации

$$c(f(x),f^*)\to\min_{x\in X} \tag{8}$$

Связь между решениями задачи (8) и эффективными точками устанавливает следующее утверждение.

Утверждение 5. Для всякого $s\in[1,\infty)$ любое решение задачи (8) является эффективной точкой, то есть множество оптимальных решений задачи (8) вложено во множество Парето.

Для линейных многокритериальных задач удобнее использовать метрику $c_1(a,b)=\sum_{i=1}^{m}|a_i-b_i|$, так как получаемая при этом однокритериальная задача тоже оказывается линейной задачей следующего вида:

$$\varphi=-\sum_{i=1}^{m}f_i(x)\to\min_{x\in X}$$

Пример 11. Найти решение следующей двухкритериальной задачи методом идеальной точки:

$$f_1(x)=7x_1 \quad +2x_3-x_4+x_5 \rightarrow \max$$

$$f_2(x)=x_1-5x_2-4x_3+x_4 \qquad \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$-x_1+x_2 \ +x_3 \qquad\qquad =2,$$

$$3x_1-x_2 \qquad +x_4 \qquad =3,$$

$$5x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=11,$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } i=1,2,...,5.$$

Если использовать метрику при s=1, то метод идеальной точки требует решения следующей однокритериальной задачи

$$\varphi(x) = -f_1(x)-f_2(x) = -8x_1+3x_2+4x_3-x_5 \qquad \rightarrow \min$$

или, что эквивалентно,

$$\varphi^{\bullet} = 8x_1-3x_2-4x_3+x_5 \qquad \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$-x_1+x_2 \ +x_3 \qquad\qquad =2 \ ,$$

$$3x_1-x_2 \qquad +x_4 \qquad =3,$$

$$5x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=11,$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } i=1,2,...,5.$$

Для нахождения первого опорного решения применим метод искусственного базиса. Вспомогательная задача имеет вид

$$F= -(w_1+w_2) \rightarrow \max \ ;$$

$$-x_1+x_2 \ +x_3 \qquad\qquad + w_1 \ = 2 \ ,$$

$$3x_1-x_2 \qquad +x_4 \qquad + w_2 = 3,$$

$$5x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 \qquad =11,$$

$$x_i \geq 0 \text{ для } i=1,2,...,5, w_1, w_2 \geq 0.$$

Оптимальное решение этой задачи определяется найденной ранее таблицей 3 из примера 2. Добавим в эту таблицу строку оценок, отвечающую целевой функции $\varphi^\bullet$

Таблица 17.

	x_1	x_2	
x_3	-1	1	2
x_4	3	-1	3
x_5	3	2	6
$\varphi^\bullet$	-3	5	2

Таблица 18.

	x_4	x_2	
x_3	1/3	2/3	3
x_1	1/3	-1/3	1
x_5	-1	3	3
$\varphi^\bullet$	1	4	16

Итак, получено оптимальное решение многокритериальной задачи в виде точки (1,0,3,0,3), обозначаемой в примере 2 как x^2, и принадлежащей множеству Парето. Очевидно, что из двух вершин множества F , являющихся эффективными значениями, выбрана более близкая к идеальной точке в смысле принятой метрики.

■

Пример 12. Используя равномерную метрику, методом идеальной точки найдем решение следующей двухкритериальной задачи (см. пример 2):

$$f_1=-x_1+3x_2 \rightarrow \max$$

$$f_2=4x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0, \quad x_1 \leq 4, \quad x_2 \leq 3.$$

Так как для данной задачи $f_1^*=7$, $f_2^*=14$, то соответствующая однокритериальная задача в пространстве критериев имеет вид:

$$\varphi(f)=\max\{|7-f_1|\ ;\ |14-f_2|\}\to\min_{f\in F}\ .$$

Графическое решение этой задачи представлено на рис.15.

Графическое решение примера 12

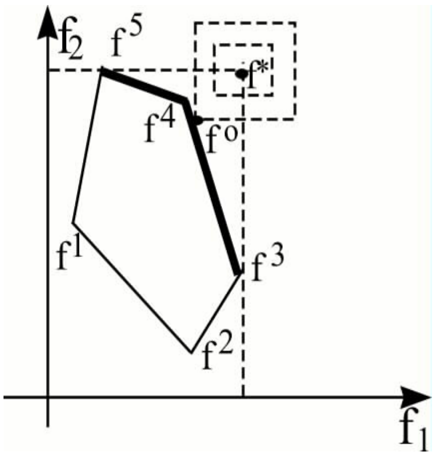

Рис.15

Как видно из рисунка, линии уровня функции $\varphi(f)$ имеют вид квадратов с центром в идеальной точке $f^*=(7,14)$. Интересующая нас точка f^0 удовлетворяет условию $f_1-7=f_2-14$ и принадлежит отрезку (f^3,f^4) в пространстве критериев, а соответствующая ей в пространстве решений точка x^0 - отрезку (x^3,x^4). Исходя из этих условий, находим $x^0=(19/5;3)$, $f^0=(26/5;61/5)$. ■

12.10. Упражнения

Упражнение 1. Доказать утверждение 1.

Упражнение 2. Построить множество Парето для следующей двухкритериальной задачи:

$$f_1(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$f_2(x) = \min\{3x_1 + 2x_2, 6x_2\} \to \max$$

при ограничениях $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Упражнение 3. Построить множество Парето для следующей двухкритериальной задачи:

$$\begin{matrix} f_1(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \max \\ f_2(x) = 3x_1 + x_2 \to \max \end{matrix}; \text{ при ограничениях } \begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Упражнение 4. Построить множество Парето для следующей двухкритериальной задачи:

$$\begin{matrix} f_1(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \\ f_2(x) = -x_1 + 3x_2 \to \max \end{matrix}; \text{ при ограничениях } \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Найти решение задачи:

1) используя линейную свертку критериев при $\alpha_1 = 4/9, \quad \alpha_2 = 5/9$.

2) используя свертку критериев Гермейера при $\alpha_1 = 1/3, \quad \alpha_2 = 2/3$.

3) методом последовательных уступок, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$, и Δ =4.

4) методом идеальной точки с равномерной метрикой.

Упражнение 5. Построить множество Парето для следующей двухкритериальной задачи:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x_1 - x_2 \to \max \\ f_2(x) &= -x_1 + x_2 \to \max \end{aligned};$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Найти решение задачи:

1) используя линейную свертку критериев при $\alpha_1 = 2/5, \quad \alpha_2 = 3/5$.

2) используя свертку Гермейера при $\alpha_1 = 1/2, \quad \alpha_2 = 1/2$.

3) методом последовательных уступок, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1, f_2\}$, и $\Delta = 1$.

4) методом идеальной точки с равномерной метрикой.

12.11. Индивидуальные задания

Задание 1. Решить двухкритериальную задачу:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (c^1, x) \to \max \\ f_2(x) &= (c^2, x) \to \max \end{aligned}$$

при ограничениях $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6a, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \le 3a, \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 \le 2a, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Варианты исходных данных :

- векторы $c^1, c^2 \Rightarrow$ 1) $c^1 = (1,2,1),\ c^2 = (2,1,-1)$;

  2) $c^1 = (1,3,1),\ c^2 = (3,1,-1)$;

  3) $c^1 = (-1,2,1),\ c^2 = (3,1,1)$;

  4) $c^1 = (1,1,3),\ c^2 = (3,2,1)$;

- параметр a $\Rightarrow$ 1) a=1; 2) a=2 ; 3) a=3 ; 4) a=4;
- значения коэффициентов взять из таблицы 19.

Таблица 19

№ варианта	b_1	b_2	b_3	d_1	d_2	d_3
1	1	1	0	1	0	0
2	1	1	0	0	1	0
3	1	0	1	1	0	0
4	1	0	1	0	0	1
5	0	1	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1

Задание 2. Решить двухкритериальную задачу:

$$\begin{array}{l} f_1(x) = x_1 + ax_2 \rightarrow \max \\ f_2(x) = \min\{bx_1 + 2x_2, dx_2\} \rightarrow \max \end{array}\text{; при ограничениях} \begin{cases} x_1 + a\,x_2 \le 6a, \\ x_1 + \ \ x_2 \le b, \\ x_1 - d\,x_2 \le d, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варианты исходных данных получаются комбинированием параметров.

$$a \in \{3,4,5\}\ , b \in \{9,10,12\}, d \in \{4,5,6\}$$

Задание 3. Решить двухкритериальную задачу:

$$f_1(x)=(c^1,x)\to\max \qquad ;\ \text{при ограничениях}\ \begin{cases} Ax\le b; \\ x\ge 0. \end{cases}$$
$$f_2(x)=(c^2,x)\to\max$$

Варианты исходных данных:

- матрица A $\Rightarrow$ 1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
- вектор b $\Rightarrow$ 1) (10,2,20,2) 2) (12,4,22,4) 3) (20,7,20,7)
- вектор c^1 $\Rightarrow$ 1) (–2,1) 2) (–3,2) 3) (–3,1)
- вектор c^2 $\Rightarrow$ 1) (3, 1) 2) (4,1) 3) (5,1)

Задание 4. Для следующей двухкритериальной задачи:

$$f_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2 \to \max$$

$$f_2=c_{21}x_1+c_{22}x_2 \to \max$$

$$Ax\le b,$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$$

1) Построить графически множество Парето.
2) Найти множество Парето, используя линейную свертку критериев.
3) Определить множество Парето методом последовательных уступок.
4) Найти решение задачи методом идеальной точки, используя равномерную метрику.
5) Нормализовать критерии, воспользовавшись соотношением $f_i^0=(f_i-f_i^{\nabla})/(f_i^*-f_i^{\nabla})$, где f_i^* и f_i^{∇} - максимальное и минимальное значения критерия f_i на множестве допустимых решений X. Найти решение задачи, используя свертку Гермейера, при $\alpha_1=1/2,\quad \alpha_2=1/2$.

6) Найти решение задачи методом последовательных уступок, считая, что критерии упорядочены по важности в последовательности $\{f_1,f_2\}$, и $\Delta=(f_1^*-f_1^\nabla)/2$, где f_1^* и f_1^∇ максимальное и минимальное значения критерия f_1 на множестве допустимых решений X.

Необходимые значения матриц C, A и вектора b взять из таблицы 20.

Таблица 20.

№	C	A	b	№	C	A	B
1	3 1 -1 -1	-1 1 1 -1 0 1	2 1 3	2	2 1 -1 -2	1 1 1 0 -1 1	4 3 2
3	1 2 -2 -1	-1 1 2 -1 1 0	2 2 2	4	-1 3 -1 -2	1 -1 0 1 -1 1	2 2 1
5	-1 3 -3 -2	-1 1 1 -2 0 1	1 2 2	6	-2 3 -1 -2	2 -1 -1 1 1 0	4 1 3
7	2 -1 -1 -2	1 -1 -1 1 1 0	1 1 2	8	-3 4 -2 -1	-1 1 1 0 -1 2	1 4 4
9	2 1 -1 -1	-1 2 1 -1 0 1	2 2 3	10	2 1 -1 -3	1 -1 1 1 0 1	2 4 2
11	1 2 -2 -1	1 -1 2 -1 0 1	1 4 4	12	1 2 -1 -1	-1 1 1 0 1 -1	1 3 1
13	1 2 3 1	1 -2 -1 1 -2 -1	2 1 -2	14	-1 5 -2 3	-1 -1 3 2	-1 6
15	-1 5 3 -7	5 3 2 5	15 10	16	10 -2 -14 6	3 2 -1 -2	6 -2
17	8 -3 15 3	3 5 5 6	15 30	18	5 -1 -7 3	-1 -2 3 2	-2 6
19	-3 4 2 -10	6 -5 3 5	30 15	20	-2 10 6 -14	2 3 -2 -1	6 -2

Литература

1. Горстко А.Б., Жак С.В. Исследование операций. Методические указания. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1980. С. 18-26.
2. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. – М.: Сов. Радио, 1975.
3. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. - М.: Наука, 1971. С.58-61.
4. Современное состояние теории исследования операций. Под ред. Моисеева Н.Н.. - М.: Наука, 1979. С .117-146.
5. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. - М.: Наука, 1982. С. 75-77, 198-228.
6. Землянухина Л.Н., Зинченко А.Б., Сантылова Л.И.. Линейное программирование и смежные вопросы. Часть 4. Методические указания. Ростов-на-Дону:РГУ.1998.-36с.