1 Отражение и преломление волн на свободной границе

Определение Будем называть колебания установившимися, если поле перемещений представимо в виде:

$$u_i(x;t) = u_i(x)e^{-i\omega t},$$

где ω — частота колебаний.

Расмотрим модельную задачу о падении волны на границу полуплоскости. Будем считать, что полуплоскость совершает установившиеся колебания в состоянии плоской деформации.

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_2 = u_2(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Продольный и поперечный потенциалы удовлетворяют уравнениям Гельмгольца вида

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + k_1^2\varphi = 0, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} + k_2^2\psi = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu},\ k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

При этом вектор $\underline{\psi}$ состоит из единственной компоненты

$$\underline{\psi} = \{0, 0, \psi\}$$

и

$$\mathrm{rot}\underline{\psi} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \psi_{,2}\underline{e}_1 - \psi_{,1}\underline{e}_2$$

Представление Ляме приобретает вид:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \tag{3}$$

Из бесконечности на свободную границу падает продольная плоская волна под углом θ. Выражение для неё имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = e^{ik_1(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)}, \\ \psi^{(1)} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

Амплитуда продольной волны равняется единице и выражения для падающей волны удовлетворяет уравнениям (2). Выражение для отражённой волны имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(2)} = Ae^{ik_1(x_1\cos\theta_1 - x_2\sin\theta_1)}, \\ \psi^{(2)} = Be^{ik_2(x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma)}, \end{cases} \tag{5}$$

Продольная волна отразилась под углом θ_1, поперечная – под углом γ, A и B — неизвестные константы. Используя представление Ляме, найдём поле перемещений:

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = e^{ik_1(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)} + Ae^{ik_1(x_1\cos\theta_1 - x_2\sin\theta_1)}, \\ &\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} = Be^{ik_2(x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2} = ik_1\cos\theta e^{ik_1(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)} + Aik_1\cos\theta_1 e^{ik_1(x_1\cos\theta_1 - x_2\sin\theta_1)} - \\ - Bik_2\sin\gamma e^{ik_2(x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma)} \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1} = ik_1\sin\theta e^{ik_1(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)} - Aik_1\sin\theta_1 e^{ik_1(x_1\cos\theta_1 - x_2\sin\theta_1)} - \\ - Bik_2\cos\gamma e^{ik_2(x_1\cos\gamma - x_2\sin\gamma)} \end{aligned} \tag{6}$$

Верхняя граница полуплоскости свободна от напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)|_{x_2=0} = 0 \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = \left[\lambda\left(u_{1,1} + u_{2,2}\right) + 2\mu u_{2,2}\right]|_{x_2=0} = \left[\lambda u_{1,1} + \left(\lambda + 2\mu\right)u_{2,2}\right]|_{x_2=0} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Найдём касательное напряжение:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{12}\big|_{x_2=0} = \mu \left(-k_1^2 \cos\theta \sin\theta e^{ik_1x_1\cos\theta} + Ak_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 e^{ik_1x_1\cos\theta_1}\right. \\
-Bk_2^2 \sin^2\gamma e^{ik_2x_1\cos\gamma} - k_1^2 \cos\theta \sin\theta e^{ik_1x_1\cos\theta} + Ak_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 e^{ik_1x_1\cos\theta_1} + \\
\left.+Bk_2^2 \cos^2\gamma e^{ik_2x_1\cos\gamma}\right)
\end{gathered} \tag{8}
$$

или

$$
\begin{gathered}
\sigma_{12}\big|_{x_2=0} = \mu \left[-2k_1^2 \cos\theta \sin\theta e^{ik_1x_1\cos\theta} + 2Ak_1^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 e^{ik_1x_1\cos\theta_1}\right. \\
\left.+Bk_2^2 \left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right) e^{ik_2x_1\cos\gamma}\right]
\end{gathered} \tag{9}
$$

Найдём нормальное напряжение:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{22}\big|_{x_2=0} = \lambda \left(-k_1^2 \cos^2\theta e^{ik_1x_1\cos\theta} - Ak_1^2 \cos^2\theta_1 e^{ik_1x_1\cos\theta_1} + \right. \\
\left.+Bik_2 \sin\gamma \cos\gamma e^{ik_2\cos\gamma}\right) + (\lambda + 2\mu) \times \left(-k_1^2 \sin^2\theta e^{ik_1x_1\cos\theta} - \right. \\
\left.-Ak_1^2 \sin^2\theta_1 e^{ik_1x_1\cos\theta_1} - Bk_2^2 \sin\gamma \cos\gamma e^{ik_2x_1\cos\gamma}\right)
\end{gathered} \tag{10}
$$

или

$$
\begin{gathered}
\sigma_{22}\big|_{x_2=0} = -k_1^2 \left[\lambda \cos^2\theta + (\lambda + 2\mu) \sin^2\theta\right] e^{ik_1x_1\cos\theta} - \\
-Ak_1^2 \left[\lambda \cos^2\theta_1 + (\lambda + 2\mu) \sin^2\theta_1\right] e^{ik_1x_1\cos\theta_1} - 2\mu Bk_2^2 \sin\gamma \cos\gamma e^{ik_2x_1\cos\gamma}
\end{gathered} \tag{11}
$$

При $x_2 = 0$ мы имеем два условия для определения неизвестных, в то время как неизвестными являются A, B, θ_1 и γ. Условия (7) могут выполняться только если показатели экспонент — одинаковые. Это приводит нас к равенству

$$
ik_1x_1 \cos\theta = ik_1x_1 \cos\theta_1 = ik_2x_1 \cos\gamma,
$$

следовательно

$$
\theta = \theta_1,
$$

$$
k_1 \cos\theta_1 = k_2 \cos\gamma.
$$

Получаем уравнение для определения угла γ:

$$\cos\gamma = \frac{k_1}{k_2}\cos\theta \tag{12}$$

Вспоминаем определения k_1, k_2:

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda+2\mu}}\Big/\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}} < 1,$$

Следовательно, правая часть (12) всегда меньше единицы и уравнение (12) всегда имеет вещественное решение. Сократим ненулевые экспоненциальные множители в (7) и получим:

$$\begin{cases} -2k_1^2\cos\theta\sin\theta + 2Ak_1^2\cos\theta\sin\theta + Bk_2^2\left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right) = 0 \\ -k_1^2\left[\lambda\cos^2\theta + (\lambda+2\mu)\sin^2\theta\right] - Ak_1^2\left[\lambda\cos^2\theta_1 + (\lambda+2\mu)\sin^2\theta\right] - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2\mu Bk_2^2\sin\gamma\cos\gamma = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Разделим первое уравнение на k_1^2, второе — на $k_1^2\left(\lambda+2\mu\right)$.

$$\begin{cases} 2A\cos\theta\sin\theta + B\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\left(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\right) = 2\cos\theta\sin\theta \\ A\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 2\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}B\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\sin\gamma\cos\gamma = \\ \qquad\qquad\qquad = -\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим соотношение

$$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{\lambda+2\mu-2\mu}{\lambda+2\mu} = 1 - 2\frac{k_1^2}{k_2^2}$$

Следовательно

$$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 - 2\frac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\theta$$

Также
$$\cos^2\gamma - \sin^2\gamma = 2\cos^2\gamma - 1 = 2\frac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\theta - 1$$

Система (14) приобретает вид:

$$\begin{cases} 2A\cos\theta\sin\theta + B\dfrac{k_2^2}{k_1^2}\left(2\dfrac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\theta - 1\right) = 2\cos\theta\sin\theta \\ A\left(1 - 2\dfrac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\theta\right) + 2B\dfrac{k_1}{k_2}\cos\theta\sqrt{1 - \dfrac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\theta} = \\ \qquad\qquad = -\left(1 - 2\dfrac{k_1^2}{k_2^2}\cos^2\theta\right) \end{cases} \tag{15}$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu} / \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{\lambda + \mu + \mu}{\mu} = \frac{\mu(1-2\nu)^{-1} + \mu}{\mu} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$$

Следовательно, соотношение (15) зависит только от угла θ и коэффициента Пуассона. Ниже (1) представлен график зависимости A от θ при различных значениях коэффициента Пуассона. Как видно из графика, при $\nu < \nu^*$ существует два угла θ_1, θ_2 (углы Брюстера, углы полной трансформации), при которых $A = 0$ и продольная волна при отражении полностью переходит в поперечную, при $\nu = \nu^*$ такой угол всего один и если $\nu > \nu^*$ полная трансформация места не имеет.

Рассмотрим теперь отражение поперечной волны. Предположим, что выражение для падающей волны имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = 0, \\ \psi^{(1)} = e^{ik_2(x_1\cos\gamma + x_2\sin\gamma)}, \end{cases} \tag{16}$$

Выражение для отражённой волны имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^{(2)} = Ae^{ik_1(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta)}, \\ \psi^{(2)} = Be^{ik_2(x_1\cos\gamma_1 - x_2\sin\gamma_1)}, \end{cases} \tag{17}$$

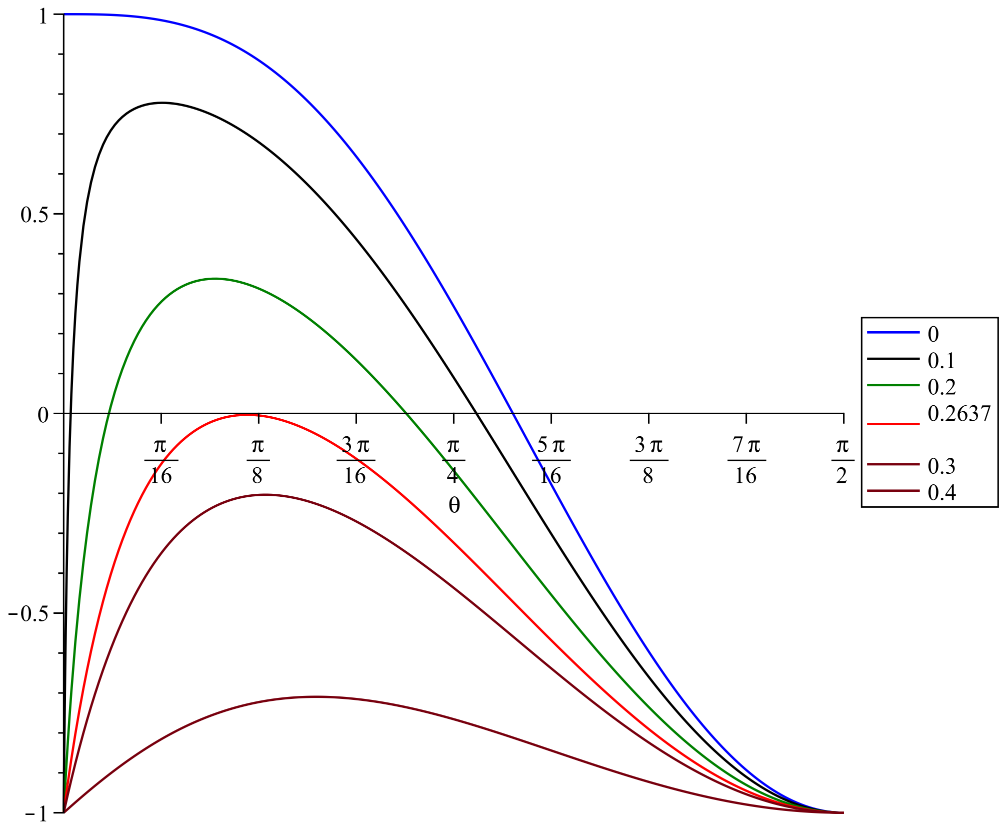

Рис. 1: A в зависимости от θ

Повторяя рассуждения, сделанные для предыдущей задачи, получаем равенство

$$ik_1x_1\cos\theta_1 = ik_2x_1\cos\gamma = ik_2x_1\cos\gamma_1,$$

следовательно

$$\gamma = \gamma_1$$

и

$$\cos\theta = \frac{k_2}{k_1}\cos\gamma \tag{18}$$

Рассмотрим

$$\frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} > 1.$$

Следовательно, (18) не всегда имеет вещественное решение и решение не при каждом значении γ может быть построено в виде плоских волн.

2 Поверхностные волны Релея

Определение Поверхностные волны — волны, амплитуда которых экспоненциально убывает с глубиной.

Рассмотрим полуплоскость $x_2 < 0$. Волновое поле имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2; t), \\ u_2 = u_2(x_1, x_2; t), \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Волновое поле будем искать с помощью волновых потенциалов по формулам:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \tag{20}$$

Волновые потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} = c_1^{-2}\ddot{\varphi}, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} = c_2^{-2}\ddot{\psi}, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)|_{x_2=0} = 0 \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = \left[\lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu)\, u_{2,2}\right]|_{x_2=0} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Рещение задачи ищем в виде бегущих волн:

$$\begin{cases} \varphi = \Phi(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}, \\ \psi = \Psi(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \tag{23}$$

Подставляем (23) в (21):

$$\begin{cases} \left(-k^2\Phi + \Phi''\right) e^{i(kx_1-\omega t)} = -k_1^2 \Phi e^{i(kx_1-\omega t)}, \\ \left(-k^2\Psi + \Psi''\right) e^{i(kx_1-\omega t)} = -k_2^2 \Psi e^{i(kx_1-\omega t)}, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu},\ k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Отбросим ненулевые экспоненциальные множители и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{cases} \Phi'' - \left(k^2 - k_1^2\right) \Phi = 0, \\ \Psi'' - \left(k^2 - k_2^2\right) \Psi = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Строим общее решение (25), ограниченное в бесконечно удалённой точке

$$\begin{cases} \Phi = A e^{\gamma_1 x_2}, \\ \Psi = B e^{\gamma_2 x_2}, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{k^2 - k_1^2},\ \gamma_2 = \sqrt{k^2 - k_2^2}.$$

Найдём поле перемещений

$$\begin{cases} u_1 = \left(ikAe^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 B e^{\gamma_2 x_2}\right) e^{i(kx_1-\omega t)}, \\ u_2 = \left(\gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} - ikBe^{\gamma_2 x_2}\right) e^{i(kx_1-\omega t)}, \end{cases} \tag{27}$$

Найдём напряжения при $x_2 = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_{12}\big|_{x_2=0} = \mu \left[\left(ik\gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2^2 B e^{\gamma_2 x_2}\right) + \right. \\ \qquad \left. + ik\left(\gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} - ikBe^{\gamma_2 x_2}\right)\right] e^{i(kx_1-\omega t)}, \\ \sigma_{22}\big|_{x_2=0} = \left[ik\lambda\left(ikAe^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 B e^{\gamma_2 x_2}\right) + \right. \\ \left. + (\lambda + 2\mu)\left(\gamma_1^2 A e^{\gamma_1 x_2} - ik\gamma_2 B e^{\gamma_2 x_2}\right)\right] e^{i(kx_1-\omega t)}, \end{cases} \tag{28}$$

или

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=0} = \mu \left[2ik\gamma_1 A + \left(\gamma_2^2 + k^2\right) B\right] e^{i(kx_1-\omega t)}, \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = \left\{ \left[-k^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\,\gamma_1^2\right] A - 2\mu ik\gamma_2 \right\} e^{i(kx_1-\omega t)}, \end{cases} \tag{29}$$

Рассмотрим выражения

$$\gamma_2^2 + k^2 = k^2 - k_2^2 + k^2 = 2k^2 - k_2^2$$

$$-k^2\lambda + (\lambda+2\mu)\,\gamma_1^2 = -k^2\lambda + (\lambda+2\mu)\left(k^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}\right) = 2\mu k^2 - \rho\omega^2 = \mu\left(2k^2 - k_2^2\right)$$

Граничные условия (22) приобретают после сокращения ненулевых множителей вид:

$$\begin{cases} 2ik\gamma_1 A + \left(2k^2 - k_2^2\right) B = 0, \\ \left(2k^2 - k_2^2\right) A - 2ik\gamma_2 B = 0, \end{cases} \tag{30}$$

Система (30) — однородная и имеет нетривиальные решения только если её определитель равен нулю. Это приводит к уравнению:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2ik\gamma_1 & 2k^2 - k_2^2 \\ 2k^2 - k_2^2 & -2ik\gamma_2, \end{vmatrix} = 4k^2\gamma_1\gamma_2 - \left(2k^2 - k_2^2\right)^2 = 0 \tag{31}$$

Заведём переменную

$$\eta = \frac{k_2^2}{k^2} = \frac{c^2}{c_2^2}$$

Рассмотрим уравнение

$$R(\eta) = \frac{\Delta}{k^4} = 4\sqrt{1-\eta}\sqrt{1-\theta\eta} - (2-\eta)^2 = 0,$$

где

$$\theta = \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} < 1$$

Найдем

$$R(0) = 4 - 4 = 0,$$

$$R(1) = 0 - 1 = -1,$$

Найдём

$$R'(\eta) = -2\left(\frac{\sqrt{1-\theta\eta}}{\sqrt{1-\eta}} + \theta\frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\theta\eta}}\right) + 2(2-\eta),$$

Следовательно

$$R'(0) = -2\,(1+\theta) + 4 = 2(1-\theta) > 0,$$

Итак, $R(0) = 0$, $R(1) = -1$ и $R'(0) > 0$, следовательно по крайней мере в одной точке $R(\eta) = 0$.

Обозначим корень через η_R.

$$\eta_R = \frac{c_R^2}{c_2^2},$$

следовательно,

$$c_R = \sqrt{\eta_R}c_2 < c_2,$$

то есть скорость поперхностной волны меньше скорости поперечной волны. Можно рассмотреть

$$\theta = \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},$$

и тогда получается, что скорость поверхностных волн зависит только от коэффициента Пуассона.

Существует приближенная формула

$$\frac{c_R}{c_2} = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1+\nu}$$

с погрешностью 0,3%.

Значение скорости поверхностных волн находится в отрезке $(0,8 \div 0,95)c_2$.

Рассмотрим кинематику поверхностных волн. Решение системы (30) может быть построено в виде

$$A = \left(2k^2 - k_2^2\right) D,\ B = -2ik\gamma_1 D, \tag{32}$$

где D — произвольная вещественная константа.

Подставляем (32) в выражение для волнового поля (27):

$$\begin{cases} u_1 = ik\left[\left(2k^2 - k_2^2\right)e^{\gamma_1 x_2} - 2\gamma_1\gamma_2 e^{\gamma_2 x_2}\right] De^{i(kx_1-\omega t)}, \\ u_2 = \gamma_1\left[\left(2k^2 - k_2^2\right)e^{\gamma_1 x_2} - k^2 e^{\gamma_2 x_2}\right] De^{i(kx_1-\omega t)}, \end{cases} \tag{33}$$

Пусть $D = 1$. Тогда выражение для волнового поля принимает вид:

$$\begin{cases} u_1 = iR_1(x_2)e^{i(kx_1-\omega t)}, \\ u_2 = R_2(x_2)e^{i(kx_1-\omega t)}, \end{cases} \tag{34}$$

R_1, R_2 — вещественнозначные функции. Возьмём вещественные части выражений (34):

$$\begin{cases} \Re u_1 = -R_1(x_2)\sin(kx_1 - \omega t), \\ \Re u_2 = R_2(x_2)\cos(kx_1 - \omega t), \end{cases} \tag{35}$$

Разделим первое уравнение на $R_1(x_2)$, второе — на $R_2(x_2)$, возведём их в квадрат и сложим друг с другом:

$$\left[\frac{\Re u_1}{R_1(x_2)}\right]^2 + \left[\frac{\Re u_2}{R_2(x_2)}\right]^2 = 1 \tag{36}$$

Получаем, что уравнения траекторий частиц представляют из себя элипсы, полуоси которых экспоненциально убывают с глубиной.

Если найти компоненты вектора Умова-Пойнтинга, то $P_2 = 0$, $P_1 \neq 0$, то есть перенос энергии происходит только в горизонтальном направлении. Львиная доля энергии волны сосредоточена в приповерхностном слое толщины $\lambda = 2\pi/k_R$.

Скорость поверхностных волн Релея не подвержена дисперсии.

Определение Говорят, что волна подвержена дисперсии, если её скорость зависит от частоты колебаний.

3 Волны Лява

3.1 Антиплоский сдвиг

Рассмотрим уравнение Ляме

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\underline{u} + \mu\Delta\underline{u} + \underline{F} = \rho\ddot{\underline{u}} \tag{37}$$

Предположим, что поле перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3; t) = 0, \\ u_2(x_1, x_2, x_3; t) = 0, \\ u_3(x_1, x_2, x_3; t) = u(x_1, x_2; t) \end{cases} \tag{38}$$

Найдём $\mathrm{div}\underline{u}$:

$$\mathrm{div}\underline{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 0$$

Подставим (38) в (37):

$$\begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \\ \mu\left(u_{,11} + u_{,22}\right) + F_3 = \rho\ddot{u} \end{cases} \tag{39}$$

Два первых уравнения дают условия физической реализации: $F_1 = F_2 = 0$, третье — обычное волновое уравнение.

Рассмотрим теперь закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{40}$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений следующие:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu u_{,1}, \\ \sigma_{23} = \mu u_{,2} \end{cases} \tag{41}$$

Рассмтрим теперь двуслойное полупространство, состоящее из слоя $0 \leq x_1 \leq H$, где H — толщина слоя и полупространства $x_2 < 0$. Параметры слоя — λ, μ. Параметры полупространства — λ^*, μ^*. Волновое поле в слое имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3 = u(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \tag{42}$$

Волновое поле в полупростанстве следующее:

$$\begin{cases} u_1^* = u_2^* = 0, \\ u_3^* = u^*(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \tag{43}$$

Уравнение для u в слое имеет вид:

$$\mu \left(-k^2 u + u'' \right) = -\rho \omega^2 u \tag{44}$$

Уравнение для u^* в полупространстве следующее:

$$\mu^* \left[-k^2 u^* + (u^*)'' \right] = -\rho^* \omega^2 u^* \tag{45}$$

Верхняя поверхность слоя свободна от напряжений:

$$\sigma_{23}|_{x_2 = H} = 0 \tag{46}$$

Следовательно

$$\mu u'|_{x_2 = H} = 0 \tag{47}$$

На границе слоя и полупространства выполняются условия сопряжения вида:

$$\begin{cases} u_3|_{x_2=0} = u_3^*|_{x_2=0}\,, \\ \sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{23}^*|_{x_2=0} \end{cases} \tag{48}$$

или

$$\begin{cases} u|_{x_2=0} = u^*|_{x_2=0}\,, \\ \mu u'|_{x_2=0} = \mu^* \left(u^*\right)'\big|_{x_2=0} \end{cases} \tag{49}$$

Рассмотрим уравнение (44). Перегруппируем слагаемые:

$$u'' + \left(k_2^2 - k^2\right) u = 0, \tag{50}$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

Общее решение уравнения:

$$u = A\cos\gamma x_2 + B\sin\gamma x_2, \tag{51}$$

где

$$\gamma = \sqrt{k_2^2 - k^2}.$$

Рассмотрим уравнение (44). Перегруппируем слагаемые:

$$\left(u^*\right)'' - \left[k^2 - \left(k_2^*\right)^2\right] u^* = 0, \tag{52}$$

где

$$\left(k_2^*\right)^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu^*}$$

Его общее решение, ограниченное в бесконечно удалённой точке:

$$u^* = Ce^{\gamma^* x_2}, \tag{53}$$

где

$$\gamma^* = \sqrt{k^2 - (k_2^*)^2}.$$

Подставляем решения (51) и (53) в граничные условия (47) и (49):

$$\begin{cases} \mu\gamma\left(-A\sin\gamma H + B\cos\gamma H\right) = 0, \\ A = C, \\ \mu\gamma B = \mu^*\gamma^* C \end{cases} \tag{54}$$

Из последнего равенства получаем:

$$B = \frac{\mu^*}{\mu}\frac{\gamma^*}{\gamma}C$$

Подставляем выражения для A и C в первое уравнение системы (54). Оно сводится к равенству:

$$\sin\gamma H = \frac{\mu^*}{\mu}\frac{\gamma^*}{\gamma}\cos\gamma H, \tag{55}$$

или

$$\mathrm{tg}\gamma H = \frac{\mu^*}{\mu}\frac{\gamma^*}{\gamma}, \tag{56}$$

Уравнение (56) является дисперсионным уравнением волн Лява. Раскроем радикалы

$$\mathrm{tg}\left(\sqrt{k_2^2 - k^2}H\right) = \frac{\mu^*}{\mu}\frac{\sqrt{k^2 - (k_2^*)^2}}{\sqrt{k_2^2 - k^2}}, \tag{57}$$

Потребуем положительности подкоренных выражений:

$$k_2 > k > k_2^*$$

Отсюда получаем условие существования волн Лява:

$$c_2^* > c_2$$

Преобразуем (57):

$$\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{c^2}{c_2^2}-1}kH\right)=\frac{\mu^*}{\mu}\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{(c_2^*)^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{c_2^2}-1}}, \tag{58}$$

Уравнение (58) может быть решено аналитически относительно k:

$$k=\frac{1}{H\sqrt{\frac{c^2}{c_2^2}-1}}\left[\mathrm{arctg}\frac{\mu^*}{\mu}\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{(c_2^*)^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{c_2^2}-1}}+n\pi\right],\ n\in\mathbf{Z}$$

На рисунке 2 представлен график дисперсионных кривых для волн Лява в случае, когда материал слоя — медь и $c_2 = 2258.52$ м/с, материал полупространства — сталь и $c_2^* = 3188.52$ м/с, H=1 м. По горизонтальной оси откладывается параметр k, по вертикальной — c.

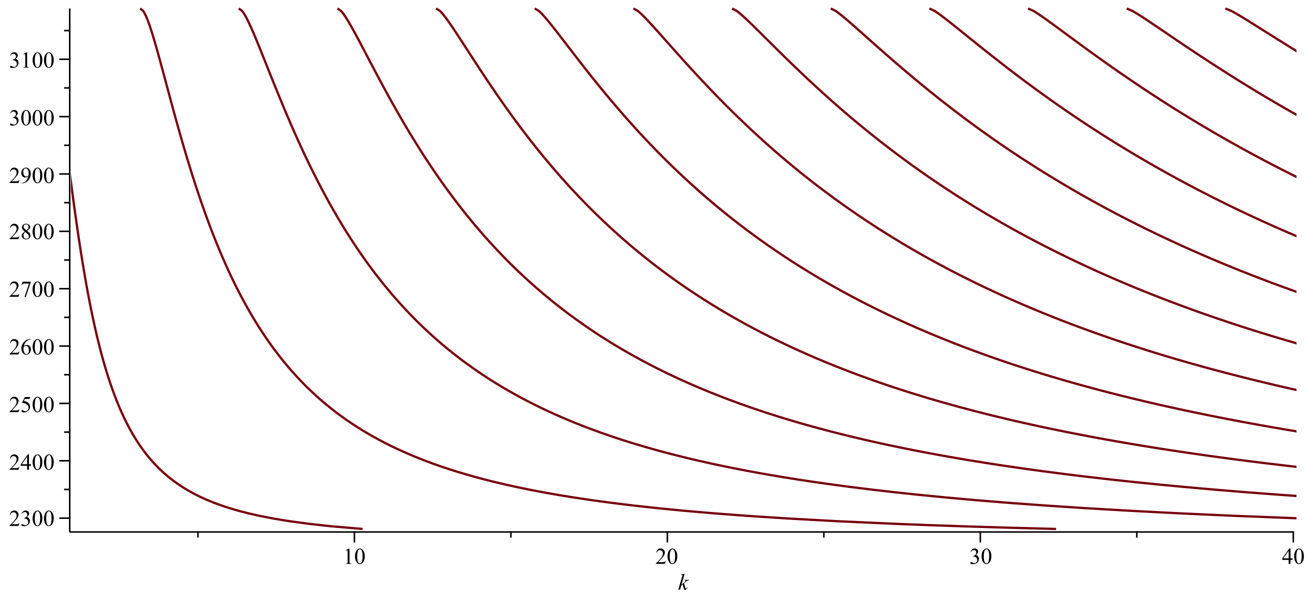

Рис. 2: Дисперсионные кривые

Все дисперсионные кривые на рисунке 2 находятся между двумя горизонтальными прямыми $c = c_2$ и $c = c_2^*$. Также дисперсионные кривые изображают в осях (ω, k):

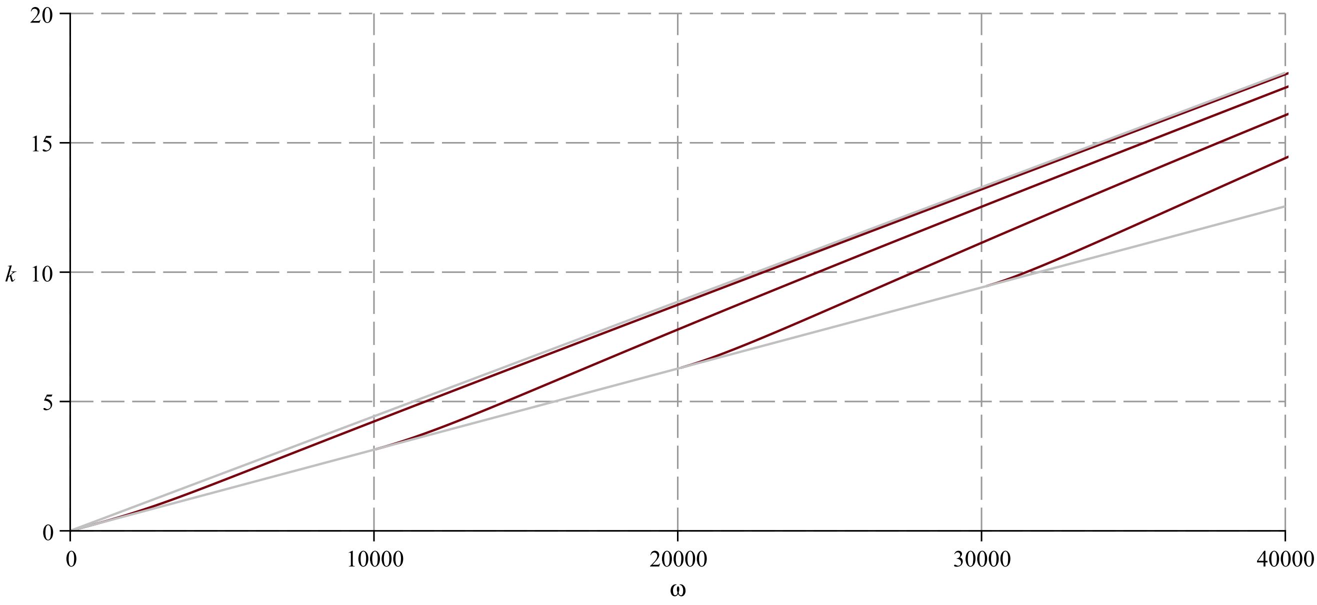

Рис. 3: Дисперсионные кривые

4 SH-колебания в слое

Рассмотрим упругий слой толщины $2H$, $-H \leq x_2 \leq H$. Границы слоя свободны от напряжений:

$$\sigma_{23}|_{x_2=\pm H} = 0 \tag{59}$$

Решение будем искать в виде бегущих волн:

$$u_3 = U(x_2)e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{60}$$

Уравнение колебаний слоя имеет вид:

$$\mu\left(u_{3,11} + u_{3,22}\right) = \rho\ddot{u}_3, \tag{61}$$

где μ — модуль сдвига, ρ — плотность слоя. После подстановки (60) в (61) получаем:

$$\mu\left(-k^2U + U''\right)e^{i(kx_1-\omega t)} = -\rho\omega^2 U e^{i(kx_1-\omega t)}, \tag{62}$$

Отбросим ненулевой экспоненциальный множитель и перегруппируем слагаемые:

$$U'' - \left(k^2 - k_2^2\right) U = 0. \tag{63}$$

Здесь

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

Граничные условия (59) принимают вид:

$$\mu U'|_{x_2=\pm H} = 0 \tag{64}$$

Общее решение (63) имеет вид:

$$U = A\mathrm{ch}\gamma x_2 + B\mathrm{sh}\gamma x_2, \tag{65}$$

где

$$\gamma = \sqrt{k^2 - k_2^2}.$$

Подставляем общее решение (65) в (64) и получаем:

$$\begin{cases} \mu\gamma\left(A\mathrm{sh}\gamma H + B\mathrm{ch}\gamma H\right) = 0, \\ \mu\gamma\left(-A\mathrm{sh}\gamma H + B\mathrm{ch}\gamma H\right) = 0 \end{cases} \tag{66}$$

Разбиваем задачу на две:

1. Симметричная задача ($A \neq 0$, $B = 0$).

   В этом случае граничные условия сводятся к одному равенству

$$\mathrm{sh}\gamma H = 0 \tag{67}$$

   Решим уравнение (67):

$$\mathrm{sh}\gamma H = i \sin i\gamma H = 0, \tag{68}$$

следовательно

$$i\gamma H = \pi n,\ n \in \mathbf{Z} \tag{69}$$

Делим (69) на H, умножаем на i и возводим обе части в квадрат:

$$k^2 - k_2^2 = -\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2,\ n \in \mathbf{Z} \tag{70}$$

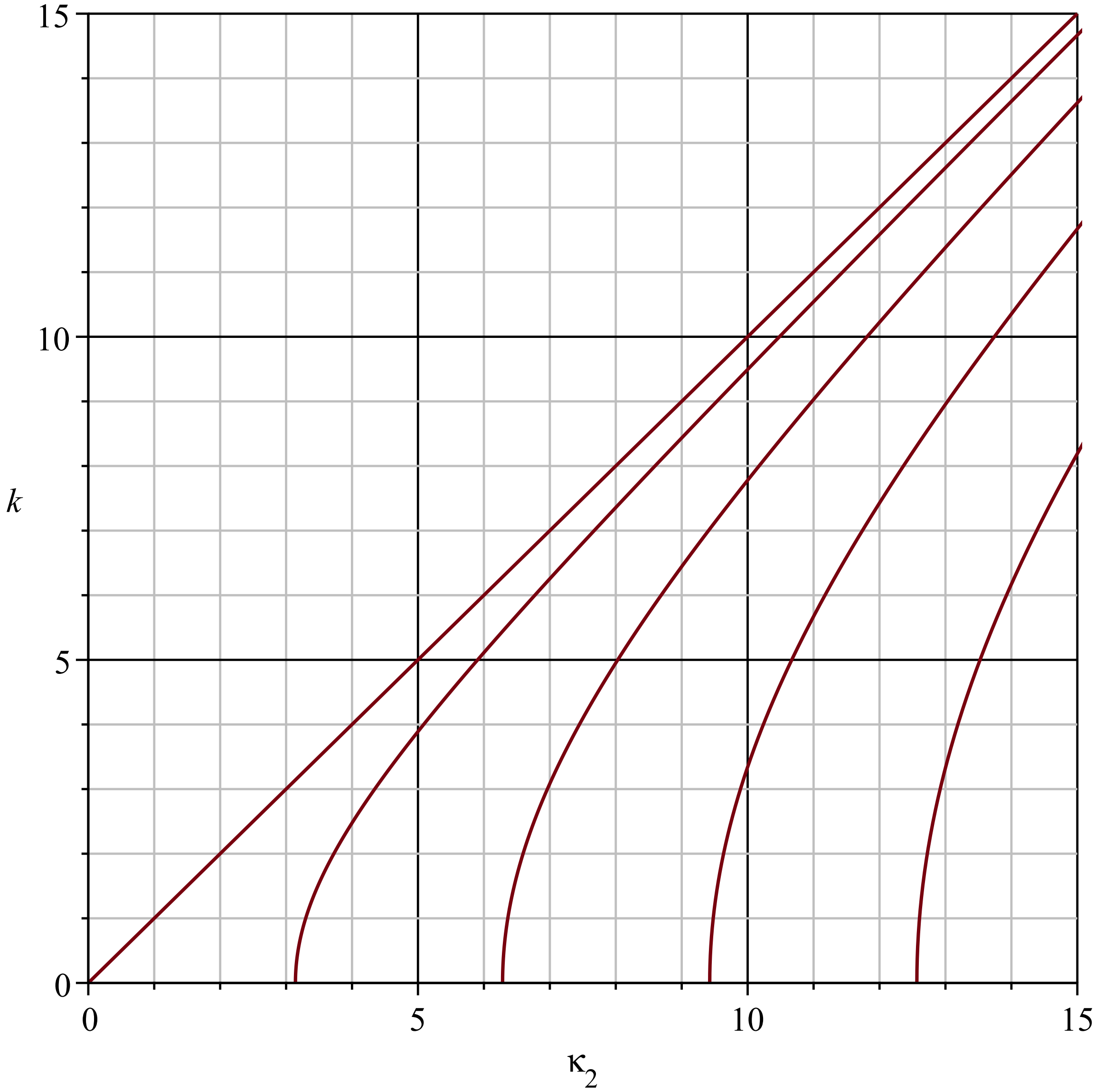

Рис. 4: График дисперсионных кривых для симметричной задачи

При $k = 0$ получаем набор корней уравнения:

$$k_2^{(n)} = \frac{\pi n}{H},\ n \in \mathbf{Z}$$

или

$$\omega_n^{(1)} = \frac{\pi n c_2}{H},\, n \in \mathbf{Z}$$

$\omega_n^{(1)}$ называются критическими частотами или частотами толщинного резонанса.

Уравнение (70) описывает семейство гипербол (рисунок 5).

2. Антисимметричная задача ($A = 0$, $B \neq 0$). В этом случае граничные условия сводятся к одному равенству

$$\mathrm{ch}\gamma H = 0 \tag{71}$$

Решим уравнение (71):

$$\mathrm{ch}\gamma H = \cos i\gamma H = 0, \tag{72}$$

следовательно

$$i\gamma H = \pi\left(2n+1\right),\, n \in \mathbf{Z} \tag{73}$$

Делим (73) на H, умножаем на i и возводим обе части в квадрат:

$$k^2 - k_2^2 = -\left[\frac{\pi\left(2n+1\right)}{2H}\right]^2,\, n \in \mathbf{Z} \tag{74}$$

При $k = 0$ получаем набор корней уравнения:

$$k_2^{(n)} = \frac{\pi\left(2n+1\right)}{2H},\, n \in \mathbf{Z}$$

или

$$\omega_n^{(2)} = \frac{\pi\left(2n+1\right)c_2}{2H},\, n \in \mathbf{Z}$$

— ещё одно семейство критических частот.

Уравнение (74) описывает семейство гипербол.

Определение Частные решения уравнений колебаний с однородными граничными условиями будем называть модами колебаний. Моды делятся на рас-

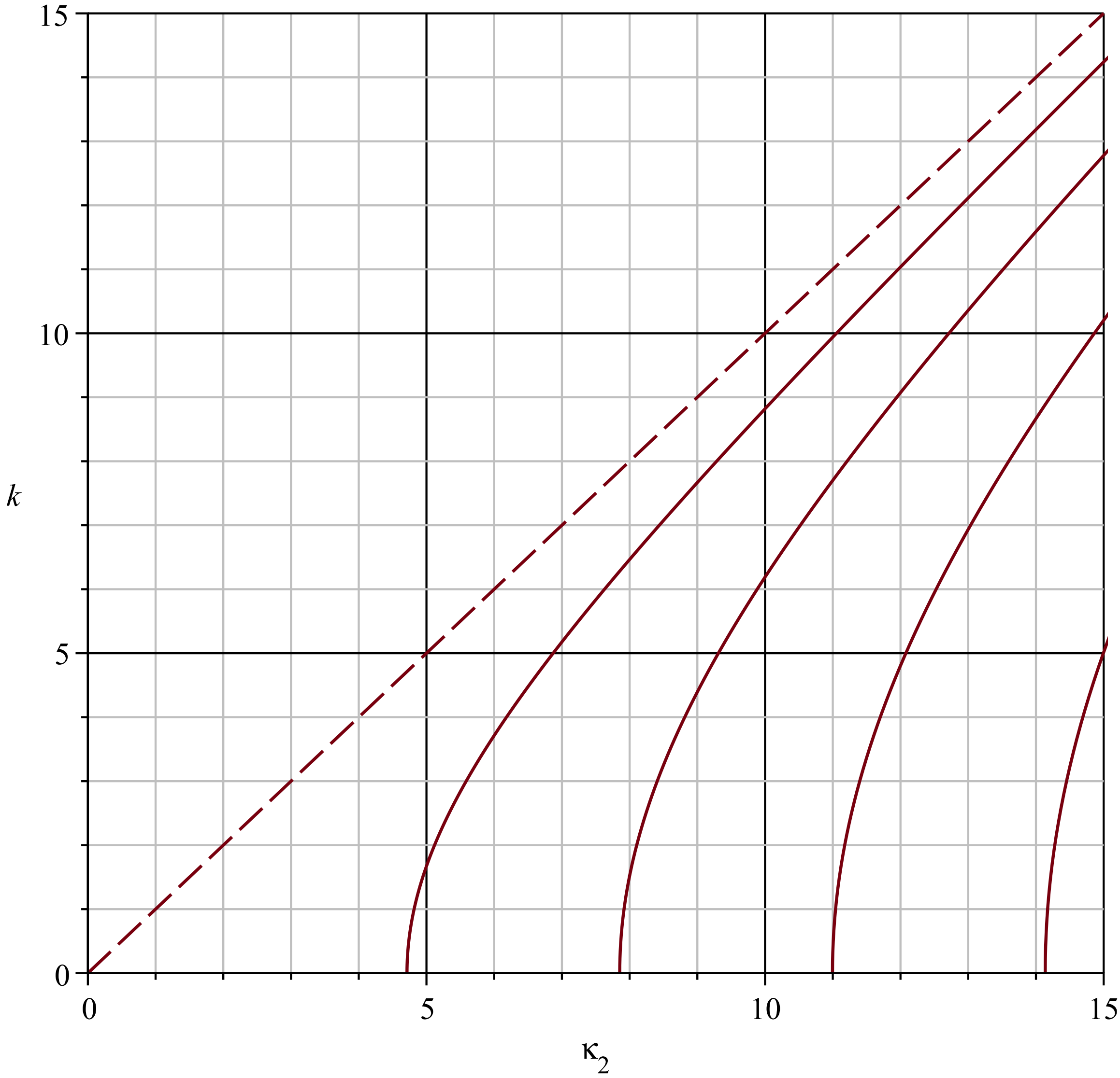

Рис. 5: График дисперсионных кривых для антисимметричной задачи

пространяющиеся и нераспространяющиеся.

Если $\omega = const$, то дисперсионные уравнения (70) и (74) определяют счётное множество значений k, из которых конечное число вещественных и бесконечное число чисто мнимых.

Если $k \in \mathbf{R}$, решение получаем в виде распространяющихся волн, если $k = i\delta$ ($\delta \in \mathbf{R}$), амплитуда экспоненциально растёт (или убывает). Те значения ω, при которых $k = 0$, называются критическими частотами (или частотами запирания, или частотами толщинных резонансов). Решение при $k = 0$ представляет собой стоячую волну. Антисимметричных бегущих волн при $\omega < \omega_1^{(2)}$ не существует.