МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики, механики и компьютерных наук
им. И. И. Воровича

К. А. Ватульян, В. М. Шутько

Кинематика твердого тела

Учебное пособие

по дисциплине
«теоретическая механика»
для студентов, обучающихся по направлениям
«механика и математическое моделирование»
и «математика»

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2018

УДК 531.13(075.8)
ББК 22.21я73
В217

Печатается по решению кафедры теории упругости, ученого совета Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Юж ного федерального университ ет а

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики ЮФУ, *М. А. Сумбатян*;

зав. кафедрой теоретической и прикладной механики ДГТУ, доктор физико-математических наук, профессор *А. Н. Соловьев*

Ватульян, К. А.

В217 Кинематика твердого тела : учебное пособие / К. А. Ватульян, В. М. Шутько ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2018. – 106 с.
ISBN 978-5-9275-3009-0

Учебное пособие содержит решения наиболее показательных задач раздела «Кинематика твердого тела» дисциплины «Теоретическая механика».

В каждом модуле изложены основные теоретические положения, затем следуют условия задач и анализ их решений.

Является учебным материалом для студентов бакалавриата Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Публикуется в авторской редакции

УДК 531.13(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-9275-3009-0

Оглавление

Введение

Учебное пособие по дисциплине «теоретическая механика» к разделу «кинематика твердого тела» предназначено для студентов направлений «механика и математическое моделирование» и «математика» Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, а также может быть рекомендовано для студентов технических специальностей вузов. Пособие разработано с целью облегчить студентам усвоение теоретического и практического материала на наиболее показательных примерах. Важность раздела «кинематика твердого тела» в курсе теоретической механики обусловлена тем, что знания, полученные студентами при изучении этого раздела, являются базовыми при освоении раздела «динамика твердого тела». Проанализированные в пособии задачи помогут студентам подготовиться к самостоятельной работе, в том числе к выполнению индивидуальных заданий.

Современному студенту хорошо известно, что в Интернете есть сайты, посвященные решению задач практически из всех разделов теоретической механики. Изданы и пособия, в которых решены все или почти все задачи из сборника [1]. Студенту трудно ориентироваться в таких решебниках, если только он не разыскивает решение задачи с конкретным номером. Особенно проявляется это в случаях самоподготовки к итоговой самостоятельной работе. Ни для кого не секрет, что эти сайты и решебники предназначены только для того, чтобы студент мог переписать решение, вместо того, чтобы выполнять задание самостоятельно. Эти источники не имеют обучающего характера. При всем внешнем сходстве с ними, цель предлагаемого пособия принципиально иная: научить студента методам решения задач.

Обратим внимание на то, что в учебных планах многих специальностей сокращены часы, предназначенные для изучения фундаментальных курсов, в том числе дисциплины «теоретическая механика», даже для направления «механика и математическое моделирование». В условиях ограниченного времени преподавателю приходится излагать некоторые темы, сопровождая их всего одним-двумя примерами решения конкретных задач. Восполнять такой недостаток приходится за счет самостоятельной работы студентов. В этих обстоятельствах в помощь студенту нужны методические разработки, помогающие понять постановку конкретной задачи и выбрать способ решения, т. е. найти и разобрать соответствующие определения и теоремы, методику их применения и, что очень важно для студента, правильное использование сопровождающих формул.

Настоящее издание состоит из четырех модулей, освещающих следующие темы: вращение твердого тела около неподвижной оси, плоскопараллельное движение твердого тела. В начале каждого модуля кратко излагаются теоретические положения и приводятся основные соотношения, затем подробно разбираются решения типовых задач. По каждой теме студентам предложены задачи для самостоятельного решения с целью закрепления пройденного материала.

Тексты условий и номера задач в основном соответствуют сорок восьмому изданию (2008) сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского [1]. При решении задач из этого сборника указывается только номер задачи. В остальных случаях приводится ссылка на источник.

1. Вращение твердого тела около неподвижной оси

Пусть движущееся твердое тело закреплено в двух точках. Тогда все точки тела, лежащие на прямой, соединяющей закрепленные точки, во все время движения имеют скорость, равную нулю. Эту прямую называют *осью вращения тела*, на рис. 1.1 это ось OA.

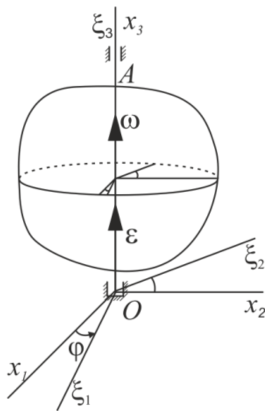


Рис.1.1.

Введем неподвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, приняв за ось Ox_3 ось вращения. Свяжем с телом подвижную систему $O\xi_1\xi_2\xi_3$, где ось $O\xi_3$ совпадает с осью Ox_3 [2]. За движением тела можно следить с помощью вращения плоскости $\xi_1O\xi_3$, т. е. задавая функцию угла поворота

$$\varphi = \varphi(t)\,. \tag{1.1}$$

Итак, в рассматриваемом случае тело имеет одну степень свободы. Уравнение (1.1) это *закон вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси*.

Угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ будем называть вектор, направленный вдоль оси вращения так, что если смотреть на тело с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$, то вращение тела будет происходить против часовой стрелки (рис. 1.1), величина вектора $\omega = \dot{\varphi}$, $[\omega] = \text{рад/с} = \text{с}^{-1}$.

Угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$ называют вектор, также лежащий на оси вращения (рис. 1.1), его величина $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2 = \text{с}^{-2}$.

Таким образом, если вращение происходит ускоренно, то векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ будут сонаправлены, если вращение замедленное, то $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены в разные стороны.

В инженерных задачах часто угловую скорость задают числом оборотов в минуту n, тогда переход осуществляется с помощью формулы

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{1.2}$$

Вращение тела называется *равномерным*, если угловая скорость есть величина постоянная, т. е. $\omega = \omega_0 = const$, $\varepsilon = 0$, закон движения тела имеет вид

$$\varphi = \varphi(0) + \omega_0 t. \tag{1.3}$$

Вращение тела называется *равномерно переменным*, если $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$, в таком случае получаем

$$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon_0 t, \qquad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega(0)t + \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \tag{1.4}$$

Каждая точка тела совершает движение в плоскости, перпендикулярной оси вращения, по дуге окружности. Как известно из раздела «кинематика точки», скорость $\boldsymbol{v}$ направлена по касательной к окружности, ускорение состоит из касательной $\boldsymbol{w}^{\tau}$ и нормальной $\boldsymbol{w}^{n}$ составляющих (рис. 1.2).

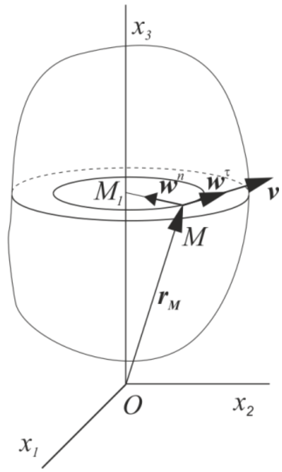


Рис. 1.2

Для скорости и ускорения точки имеют место следующие соотношения

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_M , \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{w}_M^{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_M , \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{w}_M^{n} = \omega^2 \boldsymbol{MM_1} . \tag{1.7}$$

При нахождении численных значений скорости и ускорений пользуются ниже приведенными скалярными соотношениями.

Скорость точки тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, равна величине угловой скорости, умноженной на расстояние от точки до оси вращения:

$$v_M = \omega \cdot MM_1 . \tag{1.8}$$

Касательное ускорение точки тела равно величине углового ускорения, умноженной на расстояние точки до оси вращения:

$$w_M^\tau = \varepsilon \cdot MM_1. \qquad (1.9)$$

Нормальное ускорение равно квадрату угловой скорости, умноженному на расстояние точки до оси вращения:

$$w_M^n = \omega^2 \cdot MM_1. \qquad (1.10)$$

Приведем решение задач из § 13 задачника [1].

Задача 1.1. (13.2)

При пуске в ход паровой турбины угол поворота пропорционален кубу времени. В момент времени $t = 3c$ угловая скорость диска равна $\omega = 27\pi$ рад/с. Написать уравнение вращения диска паровой турбины.

Решение

По условию задачи угол поворота пропорционален кубу времени, введем коэффициент пропорциональности A, тогда $\varphi = At^3$. Угловая скорость $\omega = \dot{\varphi} = 3At^2$.

В момент времени $t = 3c$ угловая скорость $\omega(3) = 3A \cdot 3^2 = 27\pi$, откуда $A = \pi$, следовательно, уравнение вращения имеет вид $\varphi = \pi t^3$.

Ответ. $\varphi = \pi t^3$.

Задача 1.2 (13.4)

Определить угловое ускорение тела, которое начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя и в первые две минуты делает 3600 оборотов.

Решение

При равноускоренном вращении согласно (1.4) $\omega(t)=\omega(0)+\varepsilon_0 t$. Вращение происходит из состояния покоя, т. е. $\omega(0)=0,$ тогда $\omega=\varepsilon_0 t,\ \dot{\varphi}=\varepsilon_0 t$. Интегрируя последнее соотношение при начальном условии $\varphi(0)=0$, получаем закон вращательного движения тела

$$\varphi=\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \tag{1.11}$$

Полный оборот – это поворот на угол 2π рад, значит, 3600 оборотов составляют угол

$$\varphi=2\pi\cdot 3600. \tag{1.12}$$

Приравнивая соотношения (1.11) и (1.12), получаем уравнение для нахождения углового ускорения ε_0 и решаем его:

$$\varepsilon_0=\frac{2\varphi}{t^2}=\frac{2\cdot 2\pi\cdot 3600}{(120)^2}=\frac{4\pi\cdot 3600}{12\cdot 12\cdot 100}=\pi \text{ рад/с}^2.$$

Ответ. $\varepsilon_0=\pi$ рад/с^2.

Задача 1.3 (13.7)

Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную угловую скорость 2π рад/с. Сделав 10 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках остановилось. Определить угловое ускорение ε колеса, считая его постоянным.

Решение

Вращение колеса равномерно переменное, будем использовать уравнения (1.4), в них по условию $\omega(0)=2\pi$ рад/с, кроме того, положим $\varphi(0)=0$. Число оборотов колеса $N=10$, т. е. угол поворота за время T до остановки $\varphi(T)=10\cdot 2\pi=20\pi$ рад.

Из уравнений (1.4) для угла $\varphi(T)$ имеем

$$20\pi = 2\pi T + \frac{\varepsilon T^2}{2}. \quad (1.13)$$

Так как за время T колесо остановилось, то $\omega(T) = 0$, из уравнений (1.4) для угловой скорости получаем $0 = 2\pi + \varepsilon T$, находим угловое ускорение

$$\varepsilon = -\frac{2\pi}{T}, \quad (1.14)$$

как и следовало ожидать, угловое ускорение отрицательное, так как вращение замедленное.

Подставляем полученное значение ε в соотношение (1.13), получаем

$$20\pi = 2\pi T + \frac{(-2\pi)T^2}{T \cdot 2},\ 20\pi = \pi T, \quad (1.15)$$

из уравнения (1.15) находим время движения $T = 20$ с.

Для нахождения углового ускорения используем (1.14)

$$\varepsilon = -\frac{2\pi}{20} = -\frac{\pi}{10} \text{ рад/с}^2.$$

Ответ. $\varepsilon = -\frac{\pi}{10}$ рад/с^2.

Задача 1.4. (13.15)

Маховое колесо радиуса $R = 2$ м вращается равноускоренно из состояния покоя. В момент времени $t_1 = 10\,c$ точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью $v = 100$ м/с. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента $t_2 = 15\,c$.

Решение

Маховое колесо, по условию задачи, вращается равноускоренно, для закона движения колеса и угловой скорости имеем согласно (1.4)

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(0)t + \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}, \quad \omega(t) = \omega(0) + \varepsilon_0 t.$$

Так как колесо начинает движение из состояния покоя, то $\omega(0) = 0$, следовательно, $\omega(t) = \varepsilon_0 t$. Скорость точки, лежащей на ободе колеса, согласно формуле (1.8) $v(t) = \omega(t)R$. В момент времени $t_1 = 10\ c$ получаем $v(t_1) = \omega(t_1)R$ или $v(t_1) = \varepsilon_0 t_1 R$. Отсюда находим угловое ускорение

$$\varepsilon_0 = \frac{v(t_1)}{t_1 R} = \frac{100}{10 \cdot 2} = 5\ \text{с}^{-2}.$$

Закон изменения угловой скорости запишется в виде $\omega(t) = 5t$.

В момент времени $t_2 = 15 c$ вычислим угловую скорость

$$\omega(t_2) = 5 \cdot 15 = 75\ \text{с}^{-1},$$

скорость точки на ободе колеса

$$v(t_2) = \omega(t_2)R = 75 \cdot 2 = 150\ \text{м/с},$$

направлен вектор скорости по касательной к траектории, совпадающей с ободом колеса (рис. 1.3).

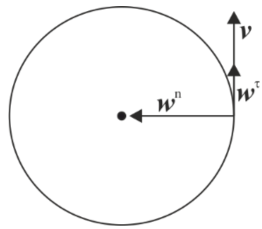


Рис. 1.3.

Составляющие ускорения точки, лежащей на ободе, находим из соотношений (1.9) и (1.10)

$$w^{\tau}(t_2) = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10 \text{ м/с}^2,$$

$$w^{n}(t_2) = (\omega(t_2))^2 R = 75^2 \cdot 2 = 11250 \text{ м/с}^2.$$

Векторы касательного и нормального ускорений показаны на рис. 1.3.

Ответ. $v = 150$ м/с, $w^{\tau} = 10$ м/с^2, $w^{n} = 11250$ м/с^2.

Задача 1.5. (13.18)

Вал радиуса $R = 10$ см приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x – расстояние от места схода нити с поверхности вала до места крепления гири, выраженное в см, t – время в секундах (рис. 1.4). Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t.

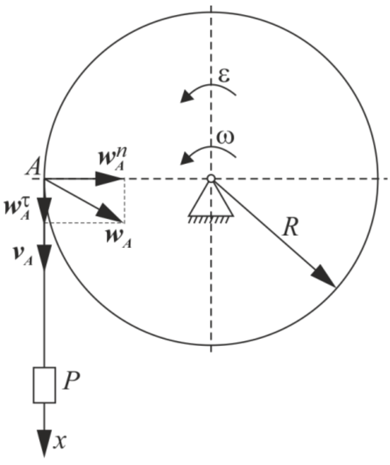


Рис. 1.4.

Решение

Уравнение движения гири $x = 100t^2$, значит, скорость движения гири может быть найдена дифференцированием по времени $\dot{x} = v_P = 200t$.

Скорости точек P и A совпадают, так как это точки нерастяжимой нити, т. е. $v_A = 200t$. С другой стороны, точка A – это точка вала, и её скорость равна $v_A = \omega \cdot R$, откуда получаем угловую скорость вала

$$\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{200t}{10} = 20t \text{ рад/с.}$$

Угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = 20$ рад/с^2.

Полное ускорение точки на поверхности вала:

$$w_A = \sqrt{(w_A^\tau)^2 + (w_A^n)^2}\ . \tag{1.16}$$

Подставляя в выражение (1.16) значения для нормальной и касательной составляющих ускорения $w_A^n = \omega^2 R,\ w_A^\tau = \varepsilon R$, получаем

$$w_A = \sqrt{(20R)^2 + ((20t)^2 R)^2} = 20R\sqrt{1+400t^4} = 200\sqrt{1+400t^4} \text{ см/с}^2.$$

Ответ. $\omega = 20t$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с^2, $w_A = 2\sqrt{1+400t^4}$ м/с^2.

Задача 1.6 (13.12)

Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Санкт-Петербурге, принимая во внимание только суточное вращение Земли вокруг своей оси; широта Санкт-Петербурга 60^0, радиус Земли 6370 км.

Решение

Земля, вращаясь равномерно, совершает один оборот вокруг оси за 24 часа, т. е. за $24 \cdot 60 \cdot 60$ секунд. Найдем угловую скорость суточного вращения Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}0000727 = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

В треугольнике OMK на рис. 1.5 $\angle KOM = 30^0$, значит, расстояние от точки на поверхности Земли до оси вращения $MK = 0,5R$. Используя соотношение (1.8), получаем выражение для скорости точки M:

$$v = \omega \cdot MK = \frac{\pi R}{24 \cdot 1800 \cdot 2} = 231,6 \text{ м/с.}$$

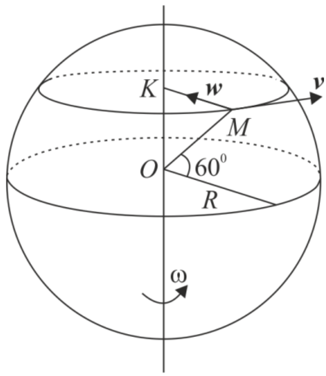


Рис. 1.5

Скорость точки направлена по касательной к траектории (рис. 1.5), очевидно, что траекторией является параллель Земли.

Ускорение точки на поверхности Земли имеет только нормальную составляющую, так как вращение равномерное, поэтому угловое ускорение $\varepsilon = 0$, касательное ускорение $w^{\tau} = 0$.

Вычислим ускорение, воспользовавшись формулой (1.10):

$$w = w^n = \omega^2 \cdot KM = \frac{\pi^2 \cdot 6370 \cdot 1000}{24^2 \cdot 1800^2 \cdot 2} = 0,0168 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение направлено от точки M к оси вращения по радиусу параллели MK (рис. 1.5).

Ответ. $v = 231,6$ м/с, $w = 0,0168$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.7 (13.5)

Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 с он совершает 12,5 оборотов. Какова его угловая скорость по истечении этих 5 с?

Ответ. $\omega = 10\pi$ рад/с.

Задача 1.8 (13.6)

Маховое колесо через 10 мин после начала движения имеет угловую скорость, равную 4π рад/с. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 минут, если оно начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно?

Ответ. 600 оборотов.

Задача 1.9 (13.8)

С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращавшийся с угловой скоростью 40π рад/с, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

Ответ. 8 с.

Задача 1.10 (13.13)

Маховое колесо радиуса 0,5 м вращается равномерно вокруг своей оси. Скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 м/с. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

Ответ. 38,2 оборота в минуту.

Задача 1.11 (13.14)

Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 см/с. Точка B, взятая на одном радиусе с точкой A на расстоянии $AB = 20$ см, движется со скоростью 10 см/с;. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.

Ответ. $\omega = 2$ рад/с; d = 0,5 м.

Задача 1.12 (13.17)

Касательное ускорение точки обода махового колеса в данный момент $w^{\tau} = 10\sqrt{3}$ м/с^2. Угол наклона полного ускорения этой точки к радиусу равен 60^0. Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r = 0,5$ м. Радиус махового колеса $R = 1$ м.

Ответ. $w^n = 5$ м/с^2.

Задача 1.13 (13.19)

Решить задачу **1.5** в общем виде, выразив ускорение точек обода колеса через пройденное гирей расстояние x, радиус колеса R и ускорение гири $\ddot{x} = w_0 = \text{const}$.

Ответ. $w = w_0\sqrt{1+\dfrac{4x^2}{R^2}}$.

Задача 1.14

Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ставрополе, принимая во внимание только суточное вращение Земли вокруг своей оси; широта Ставрополя 45^0, радиус Земли 6370 км.

Ответ. $v = 327,5$ м/с, $w = 0,0238$ м/с^2.

2. Плоскопараллельное движение твердого тела. Уравнения движения плоской фигуры

Движение твердого тела, при котором все точки тела описывают плоские траектории, плоскости которых параллельны некоторой заданной плоскости, называется **плоскопараллельным**.

При описании такого движения твердого тела достаточно ограничиться изучением движения плоской фигуры (сечение тела плоскостью Π_1, параллельной заданной Π) в ее плоскости (рис. 2.1). Тогда по движению такой плоской фигуры можно восстановить движение всего тела.

Движение плоской фигуры в ее плоскости определяется движением двух ее точек, т. е. движением отрезка, так как положение любой третьей точки по двум строится однозначно (рис. 2.2).

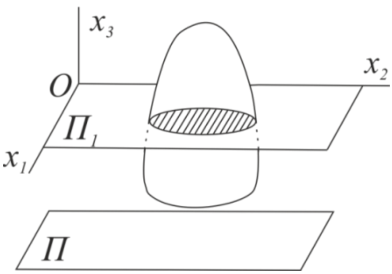


Рис. 2.1

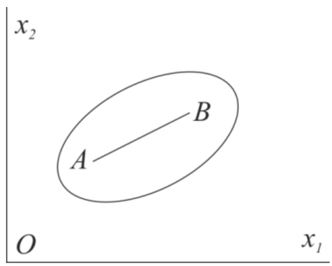


Рис. 2.2

Таким образом, твердое тело при плоскопараллельном движении имеет три степени свободы.

Для описания движения плоской фигуры введем на плоскости неподвижную систему координат $O_1x_1x_2$ и подвижную $O\xi_1\xi_2$, жестко связанную с движущейся фигурой (рис. 2.3). Перемещение подвижной системы будем задавать с помощью трех скалярных функций времени

$$x_{01} = x_{01}(t), \quad x_{02} = x_{02}(t), \quad \varphi = \varphi(t) . \tag{2.1}$$

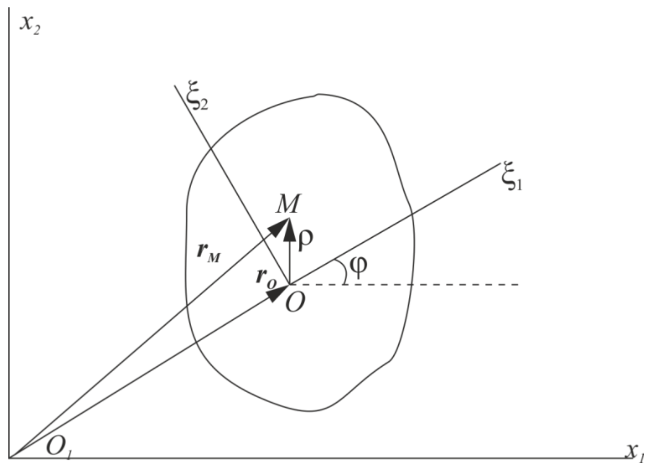


Рис. 2.3

Функции $x_{01}(t)$ и $x_{02}(t)$ определяют поступательное перемещение подвижной системы, поворот подвижной системы задается функцией $\varphi(t)$.

Теорема 1. Плоскопараллельное движение может быть представлено в виде суммы двух движений: поступательного движения вместе с полюсом О и поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через выбранный полюс О [2].

Отметим, что поступательная часть перемещения $\boldsymbol{r}_O(t)$ зависит от выбора полюса *O*, вращательная часть движения не зависит от выбора полюса, так как определяется только углом поворота $\varphi(t)$.

Соотношения (2.1) представляют собой *уравнения плоскопараллельного движения*.

Теорема 2. Перемещение плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент времени может быть произведено либо одним только поворотом около определенного центра, называемого мгновенным центром вращения, либо только поступательным движением [2].

Величина угловой скорости ω в каждый момент времени определяется как производная по времени от функции угла поворота

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t),$$

ω называется *мгновенной угловой скоростью.* Вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен плоскости движения.

Траекторию точки *M* плоской фигуры в неподвижной системе можно задать радиус-вектором точки (рис. 2.3)

$$\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_M(t), \qquad (2.2)$$

который удобно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{r}_M = \boldsymbol{r}_O(t) + \boldsymbol{\rho}(t), \qquad (2.3)$$

здесь $\boldsymbol{\rho}(t)$ – радиус-вектор точки *M* в подвижной системе. Заметим, что вектор $\boldsymbol{\rho}(t)$ при движении тела не изменяет своей величины, а меняет только направление, так как соединяет две точки абсолютно твердого тела.

Ниже приведены решения задач из § 15 задачника [1].

Задача 2.1 (15.5)

Кривошип *OA* паровой машины вращается равномерно. Найти уравнения движения шатуна *AB*. За полюс взять точку *A* на кривошипе; r – длина кривошипа, l – длина шатуна, ω_0 – угловая скорость кривошипа. При $t = 0$ угол $\alpha = 0$ (рис. 2.4).

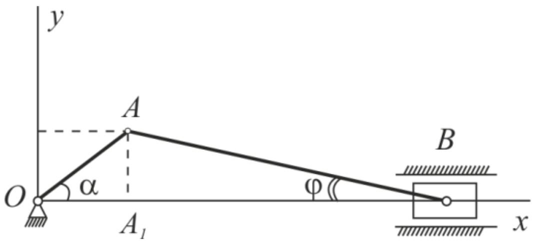


Рис. 2.4

Решение

Кривошип *OA* вращается равномерно около оси *O*, с учетом начального условия $\alpha(0) = 0$ получаем

$$\alpha(t) = \omega_O t .$$

Уравнения движения шатуна *AB* составляем по типу соотношений (2.1), выбрав за полюс точку *A*. Находим в произвольный момент времени координаты точки *A*:

$$x_A = OA \cdot \cos\alpha = r\cos\omega_O t ,$$

$$y_A = OA \cdot \sin\alpha = r\sin\omega_O t .$$

Обозначим угол между шатуном *AB* и осью *Ox* через φ, это и есть угол поворота шатуна, так как при $t = 0$ он лежал на оси *Ox*. Обратим внимание на то, что при вращении кривошипа *OA* против часовой стрелки шатун AB поворачивается вокруг точки A по часовой стрелке. Рассмотрим треугольник ABA_1, найдем $\sin|\varphi| = \dfrac{r\sin\omega_O t}{l}$, с учетом направления вращения, противоположного кривошипу, получаем

$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_O t\right).$$

Ответ. $x_A = r\cos\omega_O t$, $y_A = r\sin\omega_O t$, $\varphi = -\arcsin\left(\dfrac{r}{l}\sin\omega_O t\right)$.

Задача 2.2 (15.3)

Шестеренка радиуса r, катящаяся по неподвижной шестеренке радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равноускоренно с угловым ускорением ε_0 вокруг оси O неподвижной шестеренки. Составить уравнения движения подвижной шестеренки, приняв за полюс ее центр A, если при $t = 0$ угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 0$ и начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$ (рис. 2.5).

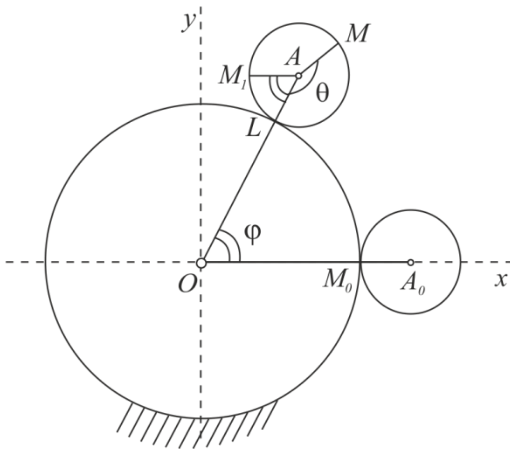


Рис. 2.5

Решение

Кривошип OA вращается равноускоренно около оси O, с учетом начальных условий $\omega_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$ получаем

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Так как за полюс подвижной шестеренки выбран ее центр A, то найдем в произвольный момент времени координаты точки A:

$$x_A = OA \cdot \cos\varphi = (R + r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$$

$$y_A = OA \cdot \sin\varphi = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Найдем угол поворота подвижной шестеренки α. Рассмотрим радиус AM подвижной шестеренки, который при $t = 0$ занимал положение A_0M_0, точка M_0 в этот момент была точкой касания двух шестеренок. Пусть L – точка касания шестеренок в момент t. Проведем радиус AM_1 подвижной шестеренки, параллельный A_0M_0, тогда угол поворота подвижной шестеренки $\alpha = \angle M_1AM = \angle M_1AL + \angle LAM$.

Качение подвижной шестеренки по неподвижной происходит без проскальзывания, следовательно, $\overset{\smile}{M_0L} = \overset{\smile}{LM}$. Угол φ для дуги M_0L является центральным, поэтому $\overset{\smile}{M_0L} = R\varphi$. Аналогично $\overset{\smile}{LM} = r\theta$, где $\theta = \angle LAM$. Из равенства двух дуг имеем $R\varphi = r\theta$, отсюда получаем $\theta = \frac{R}{r}\varphi$.

Углы $\angle M_1AL$ и φ равны как накрест лежащие.

Итак, для угла поворота подвижной шестеренки имеем

$$\alpha = \angle M_1AM = \varphi + \theta = \varphi\left(1 + \frac{R}{r}\right) = \left(1 + \frac{R}{r}\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Вращение и кривошипа, и подвижной шестеренки происходят против часовой стрелки.

Ответ. $x_A = (R+r)\cos\dfrac{\varepsilon_0 t^2}{2}$, $y_A = (R+r)\sin\dfrac{\varepsilon_0 t^2}{2}$,

$$\alpha = \left(1+\frac{R}{r}\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Задача 2.3 (15.6)

Муфты *A* и *B*, скользящие вдоль прямолинейных направляюших, соединены стержнем *AB* длиной *l* (рис. 2.6). Муфта *A* движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_A$. Написать уравнения движения стержня *AB*, предполагая, что муфта *A* начала двигаться от точки *O*. За полюс принять точку *A*. Угол *BOA* равен $\pi-\alpha$.

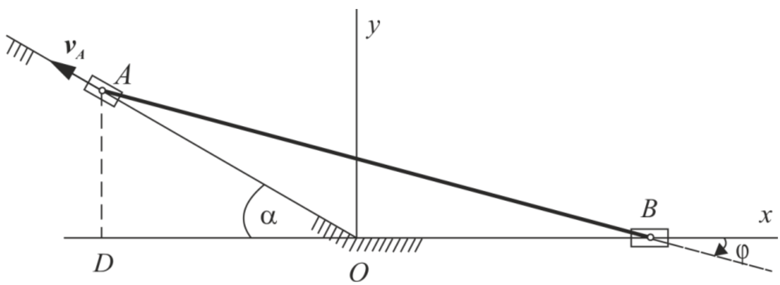


Рис. 2.6

Решение

Муфта *A* движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_A$ от точки *O*, поэтому $OA = v_A t$.

Опустим из точки A перпендикуляр AD на ось Ox. Из ΔOAD находим координаты точки A:

$$x_A = -OD = -OA \cdot \cos\alpha = -v_A t \cos\alpha ,$$

$$y_A = AD = OA \cdot \sin\alpha = v_A t \sin\alpha .$$

При движении муфты A стержень AB поворачивается по часовой стрелке на угол φ относительно оси Ox, с которой он совпадал при $t = 0$.

Из ΔBAD получаем

$$\sin\varphi = \frac{AD}{AB} = \frac{v_A t \sin\alpha}{l} .$$

Ответ. $x_A = -v_A t \cos\alpha$, $y_A = v_A t \sin\alpha$, $\varphi = \arcsin\left(\frac{v_A t}{l}\sin\alpha\right)$.

Задача 2.4 (15.9)

Кривошип OA антипараллелограмма $OABO_1$, поставленного на большое звено OO_1, равномерно вращается с угловой скоростью ω. Приняв за полюс точку A, составить уравнения движения звена AB, если $OA = O_1B = a$ и $OO_1 = AB = b$ $(a < b)$; в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1.

Решение

Кривошип OA равномерно вращается около оси O. Так как в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1, то для угла его поворота получаем

$$\angle O_1OA = \omega t .$$

Составим уравнения движения звена *AB*, выбрав за полюс точку *A* (рис. 2.7).

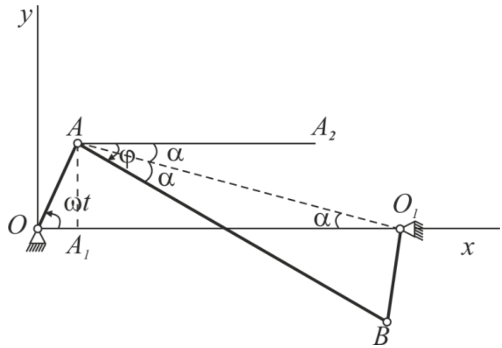


Рис. 2.7

Найдем в произвольный момент времени координаты точки *A*:

$$x_A = OA \cdot \cos \omega t = a \cos \omega t ,$$

$$y_A = OA \cdot \sin \omega t = a \sin \omega t .$$

Проведем из точки *A* луч AA_2, параллельный оси *Ox,* обозначим угол между звеном *AB* и AA_2 через φ , это и есть угол поворота звена, так как при $t = 0$ он лежал на оси *Ox*. Обратим внимание на то, что при вращении кривошипа *OA* против часовой стрелки звено *AB* поворачивается вокруг точки *A* по часовой стрелке.

Для нахождения угла поворота φ сделаем дополнительное построение: проведем отрезок AO_1. Покажем, что этим построением угол φ разбит на два равных угла, т. е. $\varphi = 2\alpha$ (рис. 2.7).

Треугольники OAO_1 и BO_1A, равны по трем сторонам: AO_1 – общая сторона, $OA = O_1B$, $OO_1 = AB$. В этих треугольниках против равных сторон лежат равные углы: $\angle OO_1A = \angle O_1AB = \alpha$.

Рассмотрим накрест лежащие углы: $\angle OO_1A = \angle O_1AA_2 = \alpha$.

Итак, $\varphi = \angle A_2AO_1 + \angle O_1AB = 2\alpha$.

Теперь из прямоугольного треугольника AA_1O_1 находим

$$tg\alpha = \frac{AA_1}{A_1O_1} = \frac{AA_1}{OO_1 - OA_1} = \frac{a\sin\omega t}{b - a\cos\omega t}.$$

Угол поворота звена AB (с учетом направления вращения) имеет вид:

$$\varphi = -2\,\mathrm{arc}\,tg\,\frac{a\sin\omega t}{b - a\cos\omega t}.$$

Ответ. $x_A = a\cos\omega t$, $y_A = a\sin\omega t$, $\varphi = -2\,\mathrm{arc}\,tg\,\dfrac{a\sin\omega t}{b - a\cos\omega t}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.5 (15.1)

Линейка эллипсографа приводится в движение кривошипом OC, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси O. В начальный момент линейка AB была расположена горизонтально.

Приняв ползун A за полюс, написать уравнения плоского движения линейки эллипсографа, если $OC = BC = AC = r$ (рис. 2.8).

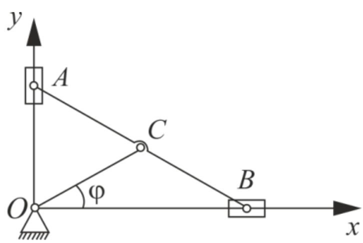


Рис. 2.8

Ответ. $x_A = 2r\cos\omega_O t$, $y_A = 0$, $\varphi_A = -\omega_O t$.

Задача 2.6 (15.2)

Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной прямой (рис. 2.9). Скорость центра C колеса постоянна и равна v. Записать уравнения движения колеса, приняв за полюс точку C. В начальный момент ось y_1, жестко связанная с колесом, была вертикальна, а неподвижная ось y проходила в это время через центр C колеса.

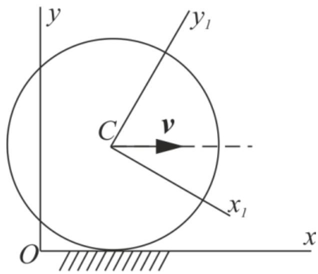


Рис. 2.9

Ответ. $x_C = vt$, $y_C = R$, $\varphi_C = \dfrac{vt}{R}$.

Задача 2.7 (15.4)

Шестеренка радиуса r катится внутри неподвижной шестеренки радиуса R и приводится в движение кривошипом OA. Кривошип вращается равномерно вокруг оси O неподвижной шестеренки с угловой скоростью ω_0 (рис. 2.10), при $t = 0$ угол $\varphi_0 = 0$. Составить уравнения движения подвижной шестеренки, приняв ее центр A за полюс.

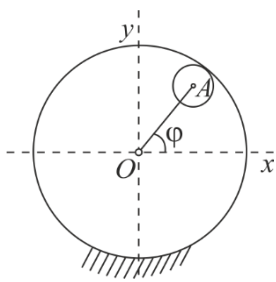


Рис. 2.10

Ответ. $x_A = (R - r)\cos\omega_0 t$, $y_A = (R - r)\sin\omega_0 t$,

$\alpha = -\left(\dfrac{R}{r} - 1\right)\omega_0 t$, знак минус показывает, что шестеренка вращается в сторону, противоположную кривошипу.

Задача 2.8 (15.8)

Кривошип O_1A длины $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω. С кривошипом в точке A шарнирно соединен стержень AB, проходящий все время через качающуюся муфту O, причем $OO_1 = a/2$ (рис. 2.11). Написать уравнения движения стержня AB, приняв за полюс точку A. Найти траекторию (в полярных и декартовых координатах) точки M, находящейся на стержне на расстоянии a от шарнира A.

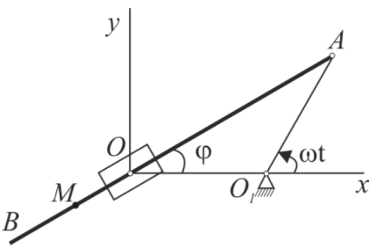


Рис. 2.11

Ответ. $x_A = \dfrac{a}{2}(1 + \cos\omega t)$, $y_A = \dfrac{a}{2}\sin\omega t$, $\varphi = \dfrac{\omega t}{2}$;

для точки M: $\rho = a(\cos\varphi - 1)$, $x^2 + y^2 = a\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3. Плоскопараллельное движение твердого тела. Скорости точек твердого тела

Для нахождения скорости точки M плоской фигуры $\boldsymbol{v}_M$ продифференцируем соотношение (2.3) и получим

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}(t), \tag{3.1}$$

в формуле (3.1) $\boldsymbol{v}_O$ – скорость точки O, т. е. скорость поступательного движения подвижной системы координат, $\boldsymbol{v}_{MO} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ – скорость точки M во вращательном движении вокруг полюса O. Вектор $\boldsymbol{v}_{MO}$ направлен перпендикулярно OM, величина вектора $v_M = \omega \cdot \rho$.

Итак, скорость точки плоской фигуры складывается из скорости выбранного полюса (скорость поступательной части движения фигуры) и скорости, происходящей вследствие вращения фигуры:

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{MO}. \tag{3.2}$$

Определение. Точка плоской фигуры, которая в данный момент времени имеет скорость равную нулю, называется *мгновенным центром скоростей* (МЦС) или *мгновенным центром вращения*.

Если за полюс в каждый момент времени выбирать мгновенный центр вращения P, то из равенства (3.1) получаем

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PM}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) позволяет дать следующую картину распределения скоростей точек плоской фигуры в данный момент времени. Вектор скорости произвольной точки перпендикулярен отрезку, соединяющему точку с МЦС, (рис. 3.1) и имеет величину $v_M = \omega \cdot PM$, т. е. скорости точек пропорциональны их расстояниям от МЦС.

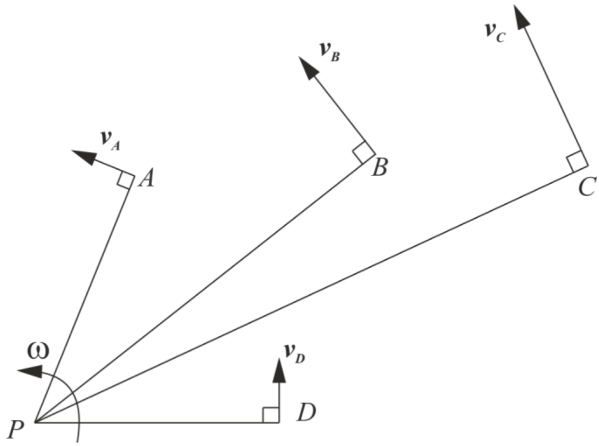
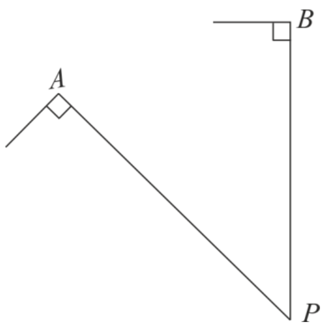


Рис. 3.1

МЦС достаточно легко находится, если известны направления скоростей двух точек плоской фигуры. Это точка пересечения перпендикуляров, восставленных в этих точках к направлениям их скоростей (рис. 3.2).



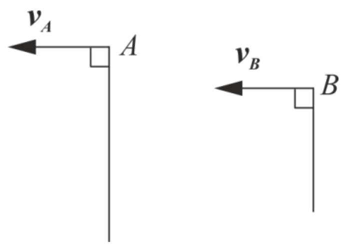


Рис. 3.2

Рис. 3.3

В случае, если перпендикуляры к направлениям скоростей не пересекаются (рис. 3.3), мгновенное движение является поступательным, угловая скорость ω в данный момент времени равна нулю, векторы скоростей всех точек равны.

Пусть перпендикуляры к направлениям скоростей совпадают, в таком случае необходимы дополнительные сведения о величинах скоростей. Если векторы скоростей двух точек равны, то движение поступательное (рис. 3.4). Для случая, если скорости не равны, построение МЦС показано на рис. 3.5.

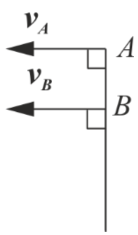


Рис. 3.4

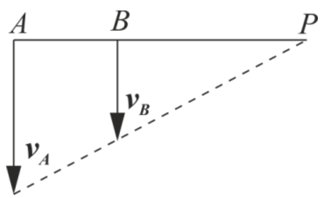


Рис. 3.5

В задаче *о качении колеса по неподвижной поверхности без проскальзывания* мгновенный центр вращения находится в точке касания колеса с поверхностью, так как скорость этой точки равна нулю. Траекторией центра колеса в этой задаче является кривая подобная кривой, ограничивающей поверхность качения. Если скорость центра колеса известна, то для угловой скорости колеса в любой момент времени получаем

$$\omega_k = \frac{v_O}{R}, \qquad (3.4)$$

здесь v_O – скорость центра колеса, R – его радиус. На рис. 3.6 точка Р – это МЦС колеса, угловая скорость вращения колеса обозначена круговой стрелкой вокруг точки P.

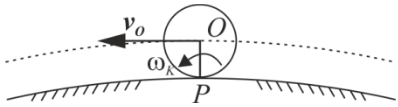


Рис. 3.6

Определение. Геометрическое место МЦС на неподвижной плоскости $O_1x_1x_2$ называется *неподвижной центроидой*. Геометрическое место МЦС на подвижной плоскости $O\xi_1\xi_2$ называется *подвижной центроидой*.

Уравнения неподвижной центроиды в системе координат $O_1x_1x_2$ (см. рис. 2.3) можно записать в параметрическом виде

$$x_1(t) = x_{01}(t) - \frac{\dot{x}_{02}(t)}{\dot{\varphi}(t)}, \quad x_2(t) = x_{02}(t) + \frac{\dot{x}_{01}(t)}{\dot{\varphi}(t)}, \tag{3.5}$$

здесь $x_{01}(t), x_{02}(t)$ – координаты начала подвижной системы, т. е. выбранного полюса O, $\varphi(t)$ – угол поворота подвижной системы.

Приведем уравнения подвижной центроиды в системе координат $O\xi_1\xi_2$ (рис. 2.3) также в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}\left(\dot{x}_{01}(t)\sin\varphi(t) - \dot{x}_{02}(t)\cos\varphi(t)\right), \\ \xi_2(t) &= \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}\left(\dot{x}_{01}(t)\cos\varphi(t) + \dot{x}_{02}(t)\sin\varphi(t)\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Получить уравнения неподвижной и подвижной центроид в явном виде можно, если исключить параметр времени t из вышеприведенных систем (3.5) и (3.6). Однако часто удается записать уравнения центроид, исходя из геометрических соображений (см. второе решение задачи 3.10).

Подвижная и неподвижная центроиды в каждый момент времени касаются друг друга в точке, являющейся в этот момент мгновенным центром вращения. Интерпретацией плоскопараллельного движения является качение подвижной центроиды по неподвижной (рис. 3.7).

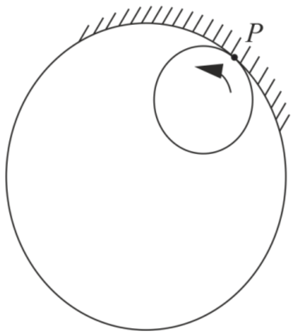


Рис. 3.7

В задачах, решаемых в этом разделе, достаточно часто встречаются плоские механизмы, состоящие из нескольких звеньев. Рекомендуется для таких задач начинать строить решение с того звена, движение которого задано. Затем последовательно рассматривать движение отдельных звеньев. При переходе от одного звена к другому определяют скорости общих для двух звеньев точек. Необходимо обратить внимание на то, что МЦС и угловую скорость нужно находить для каждого звена отдельно. Для отдельного звена механизма часто используется теорема о проекциях скоростей.

Теорема. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой [2].

Теорема о проекциях скоростей геометрически продемонстрирована на рис. 3.8.

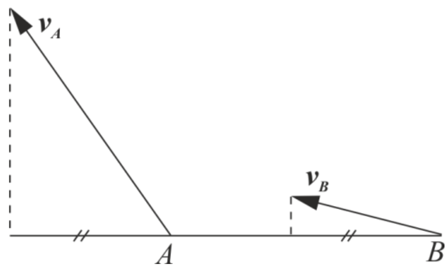


Рис. 3.8

Рассмотрим решения задач из § 16 задачника [1].

Задача 3.1 (16.12)

Точильный станок приводится в движение педалью *OA* = 24 см. Педаль колеблется около оси *O* по закону $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$ рад, угол φ отсчитывается от горизонтали. Точильный камень *K* вращается вокруг оси O_1 с помощью стержня *AB*. Оси *O* и O_1 перпендикулярны плоскости рисунка 3.9. В момент времени $t = 0$ найти скорость точки *D*, лежащей на ободе точильного камня *K* радиуса $R = 2BO_1$, если в этот момент *OA* и O_1B расположены горизонтально.

Решение

Педаль OA колеблется около оси O, найдем ее угловую скорость

$$\omega_{OA}(t) = \dot{\varphi}(t) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2} t = \frac{\pi^2}{12} \cos\frac{\pi}{2} t \ \ \text{с}^{-1}.$$

Вычислим значение угловой скорости педали в заданный момент времени $\omega_{OA}(0) = \dfrac{\pi^2}{12}$.

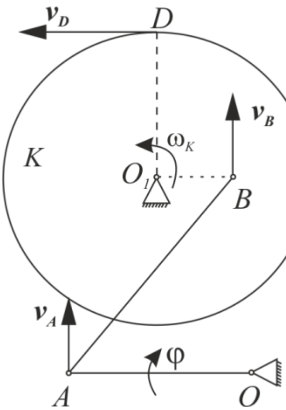


Рис. 3.9

В указанном на рис. 3.9 положении в данный момент времени $t = 0$ найдем скорость точки A как скорость точки тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси O, формула (1.8)

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \frac{\pi^2}{12} \cdot 24 = 2\pi^2 \ \text{см/с},$$

вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен горизонтальной педали (рис. 3.9).

Рассмотрим теперь точку B камня K. Так как камень совершает вращение вокруг оси O_1, то скорость точки B перпендикулярна O_1B. По условию задачи, в данный момент времени O_1B так же, как OA, расположен горизонтально, тогда $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_A$ параллельны и, следовательно, равны. Стержень AB в рассматриваемый момент времени совершает поступательное движение.

Точка D лежит на ободе точильного камня K, вращающегося вокруг своего центра O_1 против часовой стрелки. Радиус камня в два раза больше расстояния O_1B, соответственно для скорости точки D получаем

$$v_D = 2v_A = 4\pi^2 = 39{,}48 \text{ см/с.}$$

Ответ. $v_D = 0{,}395$ м/с, вектор скорости $\boldsymbol{v}_D$ перпендикулярен радиусу O_1D (рис. 3.9).

Задача 3.2 (16.18)

Кривошип OA приводного механизма насоса вращается равномерно с угловой скоростью 2 рад/с. Определить скорость поршня E в положении, указанном на рис. 3.10, если OA = 20 см, O_1B = O_1D.

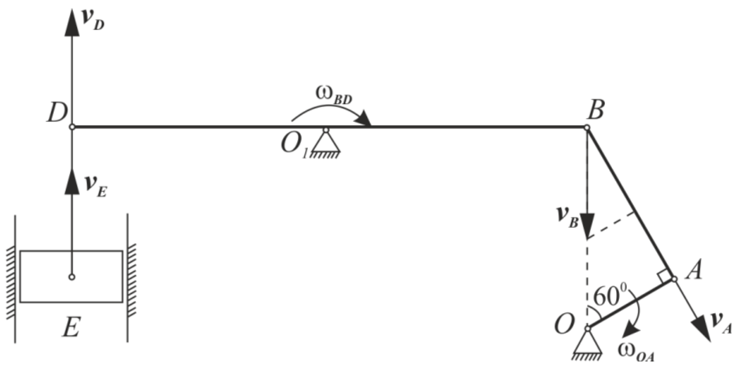


Рис. 3.10

Решение

Находим скорость точки A кривошипа

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с},$$

вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен кривошипу OA, следовательно, направлен вдоль AB. На рис. 3.10 вектор $\boldsymbol{v}_A$ изображен в предположении, что кривошип OA вращается по часовой стрелке.

Коромысло BD совершает вращение вокруг центральной точки O_1. Скорости его концов $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_D$ перпендикулярны коромыслу, направлены в противоположные стороны и равны по величине (рис. 3.10).

Стержень AB совершает плоское движение, применим теорему о проекциях скоростей

$$\boldsymbol{v}_A\big|_{AB} = \boldsymbol{v}_B\big|_{AB}, \qquad v_A = v_B \cos 30°,$$

найдем скорость точки B

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{40 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 46{,}19 \text{ см/с}.$$

Направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_B$ указывает, что коромысло BD совершает вращение по часовой стрелке.

Стержень DE в конфигурации данного момента времени движется поступательно (вместе с поршнем E), так как скорости $\boldsymbol{v}_D$ и $\boldsymbol{v}_E$ направлены вдоль одной и той же прямой (рис. 3.10).

Итак, скорость поршня $v_E = v_D = v_B = 46{,}19$ см/с.

Ответ. $v_E = 0{,}46$ м/с.

Задача 3.3 (16.24)

Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма $OABD$. В положении, указанном на рис. 3.11, рычаг *OL* имеет угловую скорость $\omega_{OL} = 2$ рад/с. Определить скорость поршня *D* и угловую скорость звена *AB*, если *OA* = 15 см.

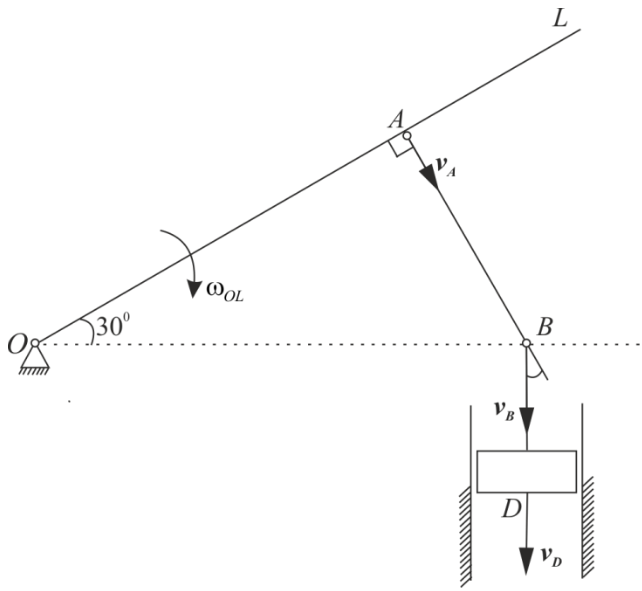


Рис. 3.11

Решение

В данный момент времени в указанном на рис. 3.11 положении найдем скорость точки *A* как скорость точки тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси *O*, формула (1.8)

$$v_A = \omega_{OL} \cdot OA = 2 \cdot 15 = 30 \text{ см/с},$$

направлена скорость $\boldsymbol{v}_A$ по перпендикуляру к *OL*, т. е. вдоль звена *AB*.

Рассмотрим поршень D, он совершает поступательное движение вдоль прямой BD, поэтому скорость $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_B$ и направлена по этой же прямой.

Звено AB совершает плоскопараллельное движение, применим теорему о проекциях скоростей

$$\boldsymbol{v}_A\big|_{AB} = \boldsymbol{v}_B\big|_{AB}, \qquad v_A = v_B \cos 30^\circ,$$

и найдем скорость точки B

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = \frac{30 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3} = 34,6 \text{ см/с},$$

следовательно,

$$v_D = v_B = 34,6 \text{ см/с}.$$

Для звена AB построим мгновенный центр скоростей, проведя перпендикуляры в точке A к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и в точке B к $\boldsymbol{v}_B$ до их взаимного пересечения. Оказалось, что точка O является в данном положении механизма мгновенным центром скоростей для стержня AB, найдем его угловую скорость

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{OA} = \omega_{OL} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ. $v_D = 0,35$ м/с, $\omega_{AB} = 2$ с$^{-1}$.

Задача 3.4 (16.32)

В суммирующем механизме две параллельные рейки 1 и 2 движутся в одну сторону с постоянными скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Между рейками зажат диск радиуса r, катящийся по рейкам без скольжения. Показать, что скорость средней рейки 3, присоединенной к оси C диска, равна полусумме скоростей реек 1 и 2. Найти также угловую скорость диска (рис. 3.12).

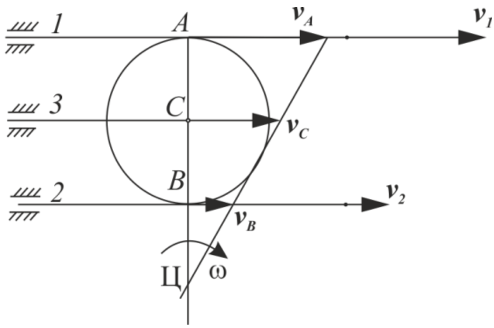


Рис. 3.12

Решение

Так как диск катится по рейкам без скольжения, то скорости точек касания диска с рейками $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ равны скоростям соответствующих точек реек $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_2$. Пусть $v_1 > v_2$, тогда можно построить мгновенный центр скоростей для диска, это точка *Ц* на рис. 3.12. Обозначим через ω угловую скорость диска, запишем для скоростей $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$:

$$v_A = \omega \cdot AЦ = \omega \cdot (BЦ + 2r)\,, \tag{3.7}$$

$$v_B = \omega \cdot BЦ\,. \tag{3.8}$$

Исключим неизвестную угловую скорость, разделив соотношение (3.7) на соотношение (3.8):

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{BЦ + 2r}{BЦ} = 1 + \frac{2r}{BЦ}\,. \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.9) находим расстояние от точки *B* до мгновенного центра скоростей *Ц* (рис. 3.11)

$$BЦ = \frac{2rv_B}{v_A - v_B} = \frac{2rv_2}{v_1 - v_2},$$

тогда угловая скорость диска может быть получена из соотношения (3.8)

$$\omega = \frac{v_B}{BЦ} = \frac{v_A - v_B}{2r} = \frac{v_1 - v_2}{2r}.$$

Скорость средней рейки v_3 равна скорости оси диска v_C

$$v_3 = v_C = \omega \cdot CЦ = \frac{v_1 - v_2}{2r} \cdot (r + BЦ) = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Случай $v_1 = v_2$ соответствует поступательному движению диска, тогда $v_3 = v_1 = v_2$, угловая скорость $\omega = \frac{v_1 - v_2}{2r} = 0$.

Ответ. $v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2}$, $\omega = \frac{v_1 - v_2}{2r}$.

Задача 3.5 (16.33)

Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Прикрепленный к концу этой нити груз *K* опускается по вертикали вниз по закону $x = 2t^2$ м. Найти угловую скорость блока 1. Определить также скорости точек *C, D, B* и *E*, лежащих на ободе подвижного блока, в момент $t_1 = 1$ с в положении, указанном на рис. 3.13. Радиус подвижного блока 1 равен 0,2 м, а диаметр *CD* перпендикулярен диаметру *BE*.

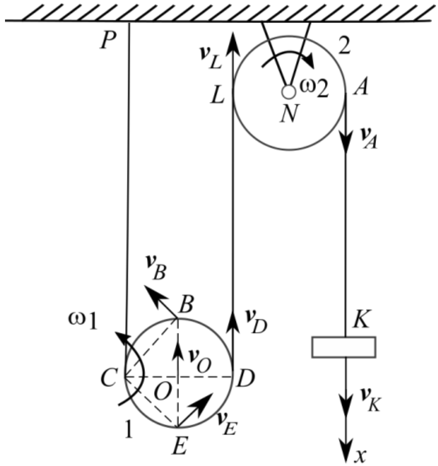


Рис. 3.13

Решение

Из закона движения груза K найдем его скорость

$$v_K = \dot{x} = 4t \text{ м/с},$$

в момент времени $t_1 = 1$ с вычисляем

$$v_K\left(t_1\right) = 4 \text{ м/с}.$$

Так как нить нерастяжима и не проскальзывает вдоль блоков, то при $t_1 = 1$ с получаем численно

$$v_A = v_L = v_D = 4 \text{ м/с},$$

как векторы, $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_L, \boldsymbol{v}_D$ изображены на рис. 3.13.

Такую же величину скорости имеют все точки движущихся участков нити AK и LD и все точки обода неподвижного блока 2, совершающего вращение вокруг закрепленной оси N.

Найдем угловую скорость блока 2, который вращается в направлении часовой стрелки

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{v_A}{r} = \frac{4}{0,2} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Для подвижного блока 1 мгновенным центром скоростей является точка *C*, $v_C = 0$, как и скорости всех точек неподвижной части нити *PC*. Вычислим угловую скорость неподвижного блока 1

$$\omega_1 = \frac{v_D}{CD} = \frac{v_D}{2r_1} = \frac{v_D}{2r}, \quad \omega_1(t_1) = \frac{4}{2 \cdot 0,2} = 10 \text{ с}^{-1},$$

вращение вокруг оси *C* происходит против часовой стрелки.

Скорость точки *O* в два раза меньше скорости точки *D*

$$v_O = \omega_1 r_1 = \frac{v_D}{2r} \cdot r = \frac{v_D}{2} = 2 \text{ м/с}.$$

Найдем скорости точек *B* и *E*

$$v_B = \omega_1 \cdot CB, \quad v_E = \omega_1 \cdot CE,$$

так как $CB = CE = r\sqrt{2}$, то численно скорости v_B и v_E равны

$$v_B = v_E = 10 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ м/с}.$$

Векторы $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_E$ изображены на рис. 3.13, лежат они соответственно на перпендикулярах к *CB* и *CE*, направление определяем согласно направлению угловой скорости.

Ответ. $v_C = 0$, $v_D = 2$ м/с, $v_B = v_E = 2\sqrt{2}$ м/с, $\omega_1 = 10$ с$^{-1}$.

Задача 3.6 (16.35)

Кривошип *OA* вращается вокруг оси *O* с угловой скоростью $\omega_0 = 2,5$ рад/с и приводит в движение насаженную на его конец *A* шестеренку радиуса $r_1 = 5$ см. Шестеренка катится по неподвижному колесу радиуса $r_2 = 15$ см и с центром в точке *O*. Определить величину и направление скоростей точек *A, B, C, D* и *E* подвижной шестеренки, если диаметр *CE* перпендикулярен диаметру *BD* (рис. 3.14).

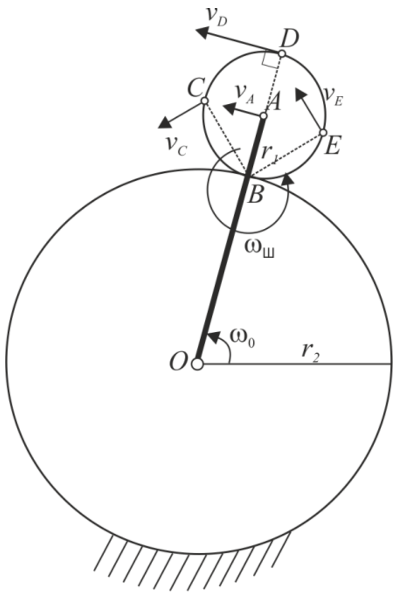


Рис. 3.14

Решение

Кривошип *OA* вращается равномерно около оси *O.* Найдем скорость точки *A*

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_0 \cdot (r_2 + r_1) = 2{,}5 \cdot 20 = 50 \text{ см/с.}$$

Для подвижной шестеренки точка касания с неподвижным колесом является МЦС, это точка *B*, следовательно, $v_B = 0$.

Скорость точки A как точки шестеренки может быть представлена в виде

$$v_A = \omega_ш \cdot BA,$$

здесь $\omega_ш$ – угловая скорость подвижной шестеренки, найдем ее

$$\omega_ш = \frac{v_A}{BA} = \frac{v_A}{r_1} = \frac{50}{5} = 10 \text{ с}^{-1}$$

и изобразим на рис. 3.14 круговой стрелкой вокруг точки B.

Точка D находится на расстоянии $2r_1$ от МЦС, значит

$$v_D = 2v_A = 100 \text{ см/с}.$$

Для точек C и E определяем расстояния до МЦС

$$BC = BE = r_1\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ см},$$

находим величины скоростей

$$v_C = v_E = 50\sqrt{2} = 70{,}7 \text{ см/с}.$$

Как векторы $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_D, \boldsymbol{v}_C, \boldsymbol{v}_E$ изображены на рис. 3.14.

Ответ. $v_A = 0{,}5$ м/с, $v_B = 0$, $v_D = 1$ м/с, $v_C = v_E = 0{,}71$ м/с.

Задача 3.7 (задание К-4, № 30 [3])

Для заданного положения механизма найти скорости точек B, C и D. Схема механизма помещена на рис. 3.15, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

OA, см	AB, см	BC, см	r, см	ω_{OA}, с$^{-1}$
16	60	14	10	1,5

Решение

Механизм состоит из кривошипа *OA*, шатуна *AB* и колеса с центром в точке *B*, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 3.15).

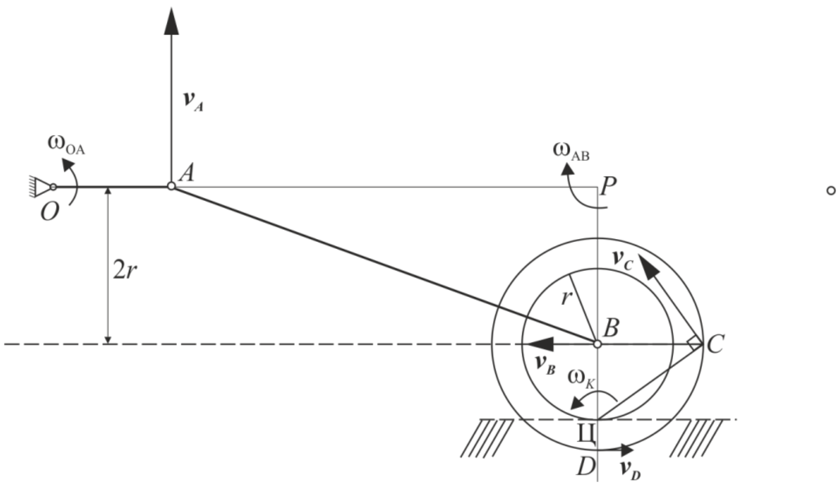


Рис. 3.15

Кривошип *OA* совершает вращение вокруг неподвижной оси *O*. Найдем скорость точки *A* при заданном положении механизма

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1{,}5 \cdot 16 = 24 \text{ см/с},$$

вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен к кривошипу *OA* (рис. 3.15), направление (вверх) задается направлением против часовой стрелки угловой скорости кривошипа *OA*.

Колесо катится по прямолинейному рельсу, траектория центра колеса *B* – прямая, параллельная рельсу, вектор скорости точки *B* направлен вдоль этой прямой. Построим мгновенный центр скоростей как точку пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к соответствующим скоростям, это точка P на рис. 3.15. Из треугольника ABP находим расстояния от точек A и B до мгновенного центра скоростей

$$PB = 2r = 20 \text{ см},$$

$$PA = \sqrt{AB^2 - PB^2} = \sqrt{60^2 - 20^2} = 40\sqrt{2} = 56{,}57 \text{ см}.$$

Вычислим угловую скорость шатуна AB, используя тот факт, что точка A является общей и для шатуна, и для кривошипа

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{24}{56{,}57} = 0{,}4243\,\text{с}^{-1},$$

при этом направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_A$ определяет направление мгновенного вращения шатуна AB вокруг центра P по часовой стрелке.

Находим скорость центра колеса B как точки шатуна

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 0{,}4243 \cdot 20 = 8{,}486 \text{ см/с},$$

вектор $\boldsymbol{v}_B$ направлен вдоль траектории налево согласно направлению угловой скорости шатуна AB.

Колесо катится по прямолинейному рельсу без проскальзывания, следовательно, скорость точки касания колеса с рельсом равна нулю. На рис. 3.15 точка касания обозначена $Ц$, это мгновенный центр скоростей для колеса.

С помощью найденной скорости точки B вычисляем угловую скорость колеса

$$\omega_K = \frac{v_B}{BЦ} = \frac{v_B}{r} = \frac{8{,}486}{10} = 0{,}8486\,\text{с}^{-1},$$

направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_B$ определяет направление мгновенного вращения колеса вокруг центра $Ц$ против часовой стрелки (рис. 3.15).

Чтобы найти скорость точки *C* как точки колеса, найдем ее расстояние до МЦС колеса

$$CЦ = \sqrt{BЦ^2 + CB^2} = \sqrt{10^2 + 14^2} = \sqrt{296} = 17,20 \text{ см.}$$

Определяем скорость точки *C*

$$v_C = \omega_K \cdot CЦ = 0,8486 \cdot 17,2 = 14,60 \text{ см/с,}$$

вектор $\boldsymbol{v}_C$ перпендикулярен отрезку *ЦC*, направление задается угловой скоростью колеса.

Расстояние от точки *D*, лежащей на внешнем ободе колеса, до МЦС колеса равно разности $DЦ = BD - BЦ = BC - r = 14 - 10 = 4$ см.

Определяем скорость точки *D*

$$v_D = \omega_K \cdot DЦ = 0,8486 \cdot 4 = 3,394 \text{ см/с,}$$

вектор $\boldsymbol{v}_D$ перпендикулярен отрезку *ЦD*, направление также определяется направлением угловой скорости колеса.

Скорости $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_D$ изображены на рис. 3.15

Ответ. $v_B = 0,085$ м/с, $v_C = 0,15$ м/с, $v_D = 0,034$ м/с.

Задача 3.8 (5.24 [4])

В планетарном механизме (рис. 3.16) колесо 1 неподвижно. Кривошип *OD* вращается вокруг оси, проходящей через точку *O*, по произвольному закону $\varphi(t)$. Выяснить, при каких соотношениях между радиусами колес, колесо 3 будет двигаться поступательно.

Решение

Кривошип *OD* вращается около оси *O* с угловой скоростью

$$\omega_K = \dot{\varphi}(t) .$$

Найдем скорость точки *B* как точки кривошипа

$$v_B = \omega_K \cdot OB = \omega_K \cdot (R_1 + R_2)\ . \tag{3.10}$$

На рис. 3.16 v_B перпендикулярна кривошипу.

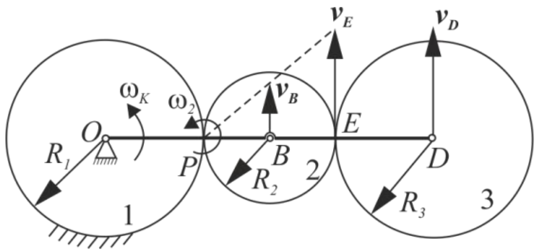


Рис. 3.16

Колесо 2 катится без проскальзывания по неподвижному колесу 1. Точка касания *P* этих колес является для колеса 2 мгновенным центром скоростей. Найдем угловую скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{v_B}{PB} = \frac{\omega_K \cdot (R_1 + R_2)}{R_2}\ , \tag{3.11}$$

вращается колесо 2 вокруг *P* против часовой стрелки.

Вычислим теперь скорость точки касания колеса 2 и колеса 3, на рис. 3.16 это точка *E*

$$v_E = \omega_2 \cdot 2R_2 = 2v_B = 2\omega_K (R_1 + R_2)\ . \tag{3.12}$$

Скорости точек *B* и *E* параллельны и направлены в одну сторону.

Найдем скорость точки *D*

$$v_D = \omega_K \cdot OD = \omega_K \cdot (R_1 + 2R_2 + R_3)\ . \tag{3.13}$$

Вектор v_D также перпендикулярен кривошипу и сонаправлен с вектором v_B .

Точки E и D принадлежат колесу 3. Согласно условию задачи колесо 3 совершает поступательное движение, тогда скорости всех его точек равны, следовательно, $v_E = v_D$. Приравняем правые части соотношений (3.12) и (3.13)

$$2\omega_K(R_1 + R_2) = \omega_K \cdot (R_1 + 2R_2 + R_3) .$$

Отсюда получаем $R_1 = R_3$ при любом значении R_2.

Ответ. $R_1 = R_3$, радиус R_2 произволен.

Задача 3.9 (5.25 [4])

Для планетарного механизма, рассмотренного в предыдущей задаче **3.8**, считая, что $R_1 = 0,3$ м, $R_2 = R_3 = 0,2$ м, определить угловую скорость колеса 3 и скорость точки A на ободе колеса 3 (рис. 3.17), если в данный момент времени угловая скорость кривошипа равна 1 рад/с.

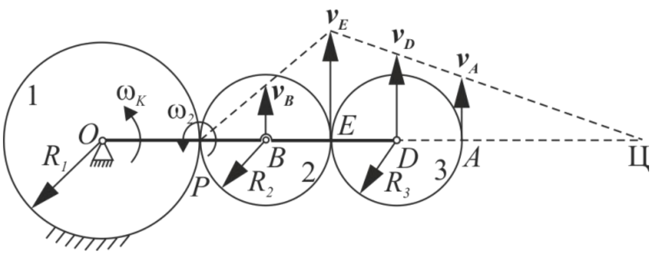


Рис. 3.17

Решение

Воспользуемся решением предыдущей задачи. Для этого обратимся к формулам (3.10–3.13) и положим в них $\omega_K = 1\,\text{с}^{-1}$.

Вычислим скорости точек *B*, *E*, *D* и угловую скорость колеса 2

$$v_B = \omega_K \cdot (R_1 + R_2) = 1 \cdot (0,3 + 0,2) = 0,5 \text{ м/с},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_K \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{1 \cdot (0,3 + 0,2)}{0,2} = 2,5 \text{ с}^{-1},$$

$$v_E = 2 v_B = 1 \text{ м/с},$$

$$v_D = \omega_K \cdot (R_1 + 2R_2 + R_3) = 1 \cdot (0,3 + 0,4 + 0,2) = 0,9 \text{ м/с}.$$

Векторы скоростей точек *B*, *E* и *D* изображены на рис. 3.17, точка P является МЦС для колеса 2.

Для колеса 3 известны скорости двух точек *D* и *E* , тогда согласно уравнению (3.2) имеем

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{ED},$$

или в скалярном виде в проекции на перпендикуляр к кривошипу

$$v_E = v_D + v_{ED} = v_D + \omega_3 \cdot R_3.$$

Находим угловую скорость колеса 3

$$\omega_3 = \frac{v_E - v_D}{R_3} = \frac{1 - 0,9}{0,2} = 0,5 \text{ с}^{-1}.$$

МЦС колеса 3 расположен на продолжении диаметра *EA* со стороны меньшей скорости, см. рис. 3.5.

Для определения скорости точки *A* составим уравнение по аналогии с (3.12)

$$v_E = v_A + v_{EA} = v_A + \omega_3 \cdot 2R_3,$$

отсюда получаем

$$v_A = v_E - \omega_3 \cdot 2R_3 = 1 - 0,5 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}.$$

Заметим, что можно определить и расстояние до мгновенного центра скоростей *Ц* колеса 3

$$AЦ = \frac{v_A}{\omega_3} = \frac{0,8}{0,5} = 1,6 \text{ м},$$

т. е. точка *Ц* находится на расстоянии четырех диаметров колеса 3 справа от точки A.

Ответ. $\omega_3 = 0{,}5\,\text{с}^{-1}$, $v_A = 0{,}8$ м/с.

Задача 3.10 (17.4)

Стержень *AB* движется таким образом, что одна из его точек *A* описывает окружность радиуса *r* с центром в точке *O*. Сам стержень проходит постоянно через данную точку *N* (качающаяся муфта), лежащую на той же окружности (рис. 3.18). Найти его центроиды.

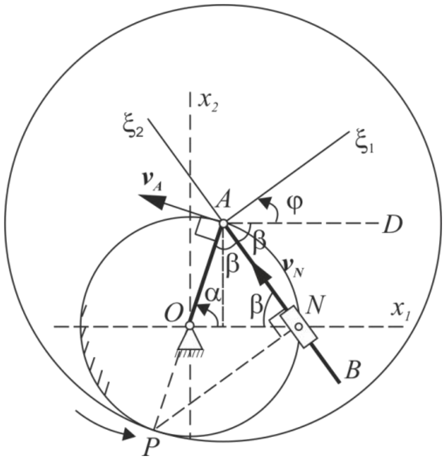


Рис. 3.18

Решение

Введем на плоскости неподвижную систему координат Ox_1x_2 и подвижную $A\xi_1\xi_2$, жестко связанную с движущимся стержнем *AB,* ось $A\xi_1$ перпендикулярна стержню, ось $A\xi_2$ направлена вдоль стержня (рис. 3.18).

Обозначим через φ угол, который 1-я подвижная ось составляет с прямой *AD*, параллельной 1-й неподвижной оси. Таким образом, это угол поворота стержня *AB* вместе с подвижной системой координат. Пусть угол β дополняет φ до прямого, иными словами, $\beta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ – это угол между стержнем *AB* и осью $A\xi_1$. Тогда $\angle ONA=\beta$ как накрест лежащий. Рассмотрим равнобедренный $\Delta\, ONA$, в нем $OA=ON=r$, следовательно, $\angle OAN=\angle ONA=\beta$, теперь найдем угол поворота кривошипа *OA*

$$\angle NOA=\alpha=\pi-2\beta=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=2\varphi\ ,$$

Перемещение подвижной системы будем задавать с помощью трех скалярных функций времени, см. уравнения (2.1).

$$\begin{aligned} x_{A1}&=r\cdot\cos\alpha=r\cdot\cos 2\varphi,\\ x_{A2}&=r\cdot\sin\alpha=r\cdot\sin 2\varphi,\\ \varphi&=\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\tag{3.14}$$

Обратимся к параметрическим уравнениям неподвижной центроиды (3.5), которые в рассматриваемой задаче имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1(t)&=x_{A1}(t)-\frac{\dot{x}_{A2}(t)}{\dot{\varphi}(t)},\\ x_2(t)&=x_{A2}(t)+\frac{\dot{x}_{A1}(t)}{\dot{\varphi}(t)}. \end{aligned}\tag{3.15}$$

Вычислим производные функций (3.14)

$$\begin{aligned} \dot{x}_{A1}&=-2r\cdot\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi},\\ \dot{x}_{A2}&=2r\cdot\cos 2\varphi\cdot\dot{\varphi},\\ \dot{\varphi}(t)&=\omega. \end{aligned}\tag{3.16}$$

Подставим значения производных (3.16) в уравнения (3.15)

$$x_1 = r\cdot\cos 2\varphi - \frac{2r\cdot\cos 2\varphi\cdot\dot\varphi}{\dot\varphi} = -r\cdot\cos 2\varphi,$$
$$x_2 = r\cdot\sin 2\varphi + \frac{-2r\cdot\sin 2\varphi\cdot\dot\varphi}{\dot\varphi} = -r\cdot\sin 2\varphi. \tag{3.17}$$

Из параметрических уравнений (3.17) исключаем параметр φ и получаем уравнение неподвижной центроиды

$$\left(x_1\right)^2 + \left(x_2\right)^2 = r^2, \tag{3.18}$$

неподвижная центроида – это окружность радиуса r с центром в начале неподвижной системы координат O (рис. 3.18), по которой перемещается точка A.

Для нахождения подвижной центроиды в системе координат $O\xi_1\xi_2$ будем использовать уравнения (3.6)

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\dot\varphi(t)}\left(\dot x_{A1}(t)\sin\varphi(t) - \dot x_{A2}(t)\cos\varphi(t)\right),$$
$$\xi_2(t) = \frac{1}{\dot\varphi(t)}\left(\dot x_{A1}(t)\cos\varphi(t) + \dot x_{A2}(t)\sin\varphi(t)\right). \tag{3.19}$$

Подставим соотношения (3.16) в уравнения (3.19)

$$\xi_1 = \frac{1}{\dot\varphi}\left(-2r\cdot\sin 2\varphi\cdot\dot\varphi\cdot\sin\varphi - 2r\cdot\cos 2\varphi\cdot\dot\varphi\cdot\cos\varphi\right) = -2r\cdot\cos\varphi,$$
$$\xi_2 = \frac{1}{\dot\varphi}\left(-2r\cdot\sin 2\varphi\cdot\dot\varphi\cdot\cos\varphi + 2r\cdot\cos 2\varphi\cdot\dot\varphi\cdot\sin\varphi\right) = -2r\cdot\sin\varphi. \tag{3.20}$$

Из параметрических уравнений (3.20) исключаем параметр φ и получаем уравнение подвижной центроиды

$$\left(\xi_1\right)^2 + \left(\xi_2\right)^2 = (2r)^2, \tag{3.21}$$

подвижная центроида – это окружность радиуса $2r$ с центром в начале подвижной системы координат A (рис. 3.18).

Тот же самый результат можно получить геометрическим методом. Построим МЦС для стержня AB, проведя перпендикуляры к скоростям в точках A и N до их взаимного пересечения в точке P. Скорость точки N стержня AB направлена вдоль самого стержня, следовательно, отрезок NP перпендикулярен стержню. Скорость точки A является касательной к окружности радиуса r и с центром в O, тогда прямая AP является продолжением радиуса AO. Рассмотрим ΔPNA, он прямоугольный, гипотенуза AP – диаметр. Вывод: точка P обладает следующими свойствами: 1) расстояние от P до O есть величина постоянная, равная r, 2) расстояние от P до A есть величина постоянная, равная $2r$.

Таким образом, подтверждены результаты (3.18) и (3.21), центроиды – окружности. Окружность радиуса $2r$ катится по внутренней неподвижной окружности радиуса r.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.11 (16.7)

Стержень *AB* движется, опираясь все время своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые, принятые за оси *Ox* и *Oy*. Найти координаты *x* и *y* мгновенного центра скоростей в тот момент, когда угол *OAB* равен 60°, длина стержня 1 м (рис. 3.19).

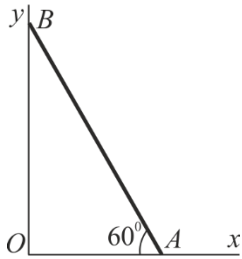


Рис. 3.19

Ответ. x = 0,5 м; y = 0,866 м.

Задача 3.12 (16.11)

Стержень *AB* длины 0,5 м движется в плоскости рис. 3.20.

Рис. 3.20

Скорость $\boldsymbol{v}_A$ образует угол 45° с осью x, совмещенной со стержнем. Скорость v_B точки B образует угол 60° с осью х. Найти модуль скорости точки B и угловую скорость стержня, если $v_A = 2$ м/с.

Ответ. $v_B = 2{,}82$ м/с, $\omega = 2{,}06$ рад/с.

Задача 3.13 (16.15)

В кривошипном механизме кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью, равной $\omega_{OA} = 6\pi$ рад/с. Длина кривошипа OA = 40 см, длина шатуна AB = 2 м.

Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки M при четырех положениях кривошипа, для которых угол AOB соответственно равен 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ (рис. 3.21).

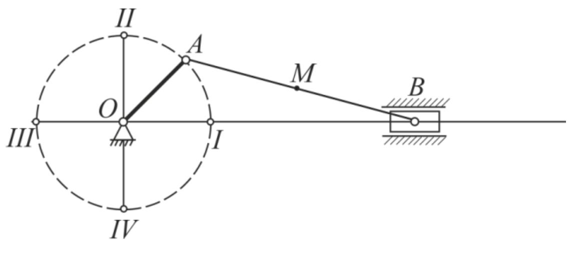


Рис. 3.21

Ответ. I. $\omega_{AB} = -\frac{6}{5}\pi$ рад/с; $v_M = 3{,}77$ м/с.

II $\omega_{AB} = 0$; $v_M = 7{,}54$ м/с.

III. $\omega_{AB} = \dfrac{6}{5}\pi$ рад/с; $v_M = 3{,}77$ м/с.

IV. $\omega_{AB} = 0$; $v_M = 7{,}54$ м/с.

Знак минус в выражении ω указывает, что шатун вращается в сторону, противоположную кривошипу.

Задача 3.14 (16.17)

Определить скорость точки K четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рис. 3.22.

Кривошип OA длиной 20 см имеет в данный момент угловую скорость 2 рад/с. Точка K расположена в середине стержня BO_1.

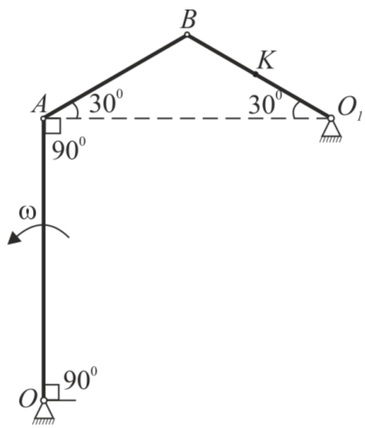


Рис. 3.22

Ответ. $v_K = 0{,}2$ м/с.

Задача 3.15 (16.34)

Груз *K*, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой *L*, опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка *L* катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить скорости точек *C*, *A*, *B*, *O* и *E* катушки в момент $t = 1$с в положении, указанном на рис. 3.23, а также угловую скорость катушки, если *AD* перпендикулярно *OE*, а *OD* = 2*OC* = 0,2 м.

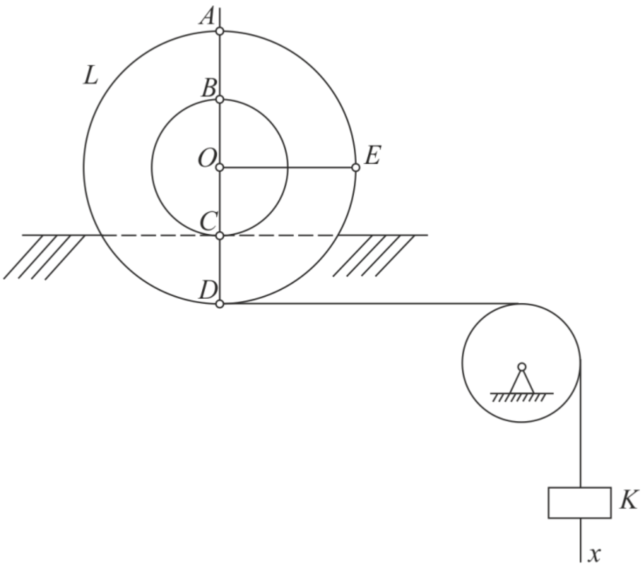


Рис. 3.23

Ответ. $v_C = 0$, $v_A = 6$ м/с, $v_B = 4$ м/с, $v_O = 2$ м/с, $v_O = 2$ м/с, $v_E = 4,46$ м/с, $\omega = 20$ рад/с.

Задача 3.16 (16.37)

Кривошип OA = 20 см вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью 2 рад/с. На его конец A насажена шестеренка 2 радиуса 10 см, находящаяся во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1, соосным с кривошипом OA. Определить скорости точек B, C, D и E, лежащих на ободе шестеренки 2, если BD перпендикулярно OC (рис. 3.24).

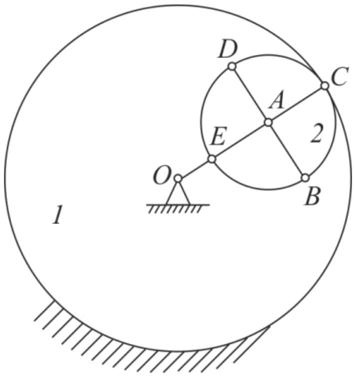


Рис. 3.24

Ответ. $v_C = 0$, $v_B = v_D = 0,4\sqrt{2}$ м/с, $v_E = 0,8$ м/с.

Задача 3.17 (17.1)

В задаче 3.11 (рис. 3.19) найти центроиды при движении стержня AB.

Ответ. Подвижная центроида – окружность радиуса 0,5 м с центром в середине AB; неподвижная центроида – окружность радиуса 1 м с центром в точке O.

4. Плоскопараллельное движение твердого тела. Ускорения точек твердого тела

Для нахождения ускорения точки тела при плоскопараллельном движении используются соотношения, получающиеся дифференцированием выражения (3.1):

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\rho} - \omega^2\boldsymbol{\rho}, \tag{4.1}$$

или в ином обозначении

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{w}_{MO}. \tag{4.2}$$

Таким образом, ускорение точки плоской фигуры складывается из ускорения выбранного полюса $\boldsymbol{w}_O$ (ускорение поступательной части движения фигуры) и ускорения $\boldsymbol{w}_{MO}$, возникающего вследствие вращения фигуры вокруг этого полюса. Естественно, что $\boldsymbol{w}_{MO}$ должно состоять из касательного и нормального ускорений, которые в этом разделе (в отличие от раздела, посвященного вращению вокруг неподвижной оси) будем называть соответственно вращательным и центростремительным

$$\boldsymbol{w}_{MO} = \boldsymbol{w}_{MO}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{MO}^{\text{цс}}. \tag{4.3}$$

Следовательно, при решении задач на нахождение ускорений точек тела целесообразно использовать векторные соотношения

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{w}_{MO}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{MO}^{\text{цс}}, \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{w}_{MO}^{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{OM}, \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{w}_{MO}^{\text{цс}} = \omega^2\boldsymbol{MO} \tag{4.6}$$

и соответствующие скалярные формулы

$$w_{MO}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot OM\ , \tag{4.7}$$

$$w_{MO}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot OM\ . \tag{4.8}$$

При этом вектор $\boldsymbol{w}_{MO}^{\text{цс}}$ направлен из точки *M* к полюсу *O*, вектор $\boldsymbol{w}_{MO}^{\text{вр}}$ ему перпендикулярен, направление определяется знаком углового ускорения ε. Нахождение величины ускорения по формулам (4.4-6), так же как и величины скорости по (3.3), удобно осуществлять методом проектирования каждого слагаемого на два взаимно ортогональные направления.

Отметим, что в некоторых задачах, где заранее известно направление вектора $\boldsymbol{w}_M$, осуществлять решение удобно с помощью построения многоугольника ускорений по формуле (4.4). Искомый вектор будет замыкающим после последовательного построения правой части соотношения (4.4). См. задачи 4.2, 4.5.

Векторное соотношение (4.4) можно использовать для нахождения общих характеристик плоской фигуры (угловой скорости ω и углового ускорения ε) в случае, если известны ускорения двух точек тела, например, $\boldsymbol{w}_A$ и $\boldsymbol{w}_B$. Одну из этих точек примем за полюс, тогда ускорение другой представим в виде:

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{AB} + \omega^2 \boldsymbol{BA}\ . \tag{4.9}$$

Спроектируем векторное уравнение (4.9) на два взаимно ортогональные направления, получим два скалярных уравнения для определения неизвестных ω и ε . См. задачу 4.1.

Точка тела, ускорение которой в данный момент времени равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений* (МЦУ).

Если за полюс в каждый момент времени выбирать мгновенный центр ускорений *C*, то из равенства (4.2) получаем

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_{MC} = \boldsymbol{w}_{MC}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{MC}^{\text{цс}} = \boldsymbol{w}_M^{\tau} + \boldsymbol{w}_M^{n}, \tag{4.10}$$

то есть распределение ускорений в плоской фигуре в данный момент времени такое, как если бы тело совершало вращение вокруг мгновенного центра ускорений *C*.

Мгновенный центр ускорений (МЦУ) легко определяется, если известно ускорение какой-либо точки плоской фигуры $\boldsymbol{w}_M$ и общие характеристики тела: угловая скорость ω и угловое ускорение ε. Сформулируем правило построения МЦУ (рис. 4.1).

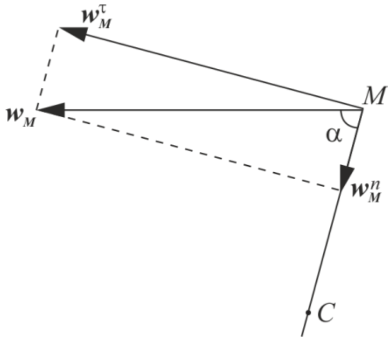


Рис. 4.1

Из точки *M* построим луч под углом α к вектору $\boldsymbol{w}_M$ таким, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{4.11}$$

знак углового ускорения ε определяет направление (против или по часовой стрелке) угла α.

На этом луче отложим отрезок *MC*, длина которого вычисляется следующим образом:

$$MC = \frac{w_M}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \tag{4.12}$$

полученная точка C – МЦУ (рис. 4.1).

В предыдущем разделе отдельно обсуждалась задача *о качении колеса по неподвижной поверхности без проскальзывания.* Обратимся к выражению (3.4) для угловой скорости колеса

$$\omega_K = \frac{v_O}{R}, \tag{4.13}$$

поскольку соотношение (4.13) выполняется в любой момент времени, то продифференцируем его по времени

$$\dot{\omega}_K = \frac{\dot{v}_O}{R}, \tag{4.14}$$

получаем выражение для углового ускорения

$$\varepsilon_K = \frac{w_O^\tau}{R}. \tag{4.15}$$

Итак, в задаче о качении колеса для нахождения общих характеристик (угловой скорости ω и углового ускорения ε) достаточно знать скорость и касательное ускорение центра колеса.

Рассмотрим задачи из § 18 задачника [1].

Задача 4.1 (18.34)

Однородный стержень *AB* длиной 12 см совершает плоское движение. Ускорения его концов перпендикулярны к *AB* и направлены в одну сторону (рис. 4.2а), причем $\boldsymbol{w}_A = 24$ см/с^2, $\boldsymbol{w}_B = 12$ см/с^2.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня, а также ускорение его центра тяжести.

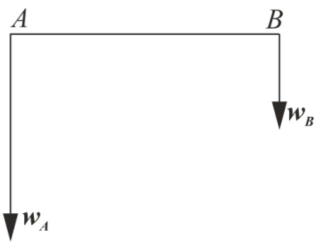


Рис. 4.2а

Решение

Примем за полюс точку *A*, тогда ускорение точки *B* представим согласно (4.4) в виде:

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}. \qquad (4.16)$$

Изобразим на рис. 4.2б в точке *B* правую часть соотношения (4.16). Сравним рис. 4.2а и рис. 4.2б, сумма трех векторов в точке *B* должна дать один известный.

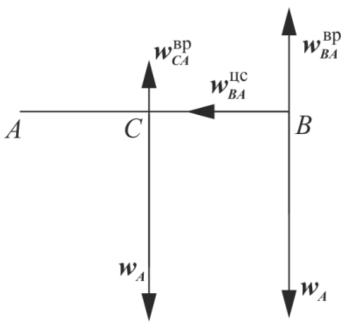


Рис. 4.2б

Спроектируем векторное уравнение (4.16) на направление стержня и перпендикуляр к нему:

$$0 = w_{BA}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot AB\,, \tag{4.17}$$

$$w_B = w_A - w_{BA}^{\text{вр}} = w_A - \varepsilon \cdot AB\,. \tag{4.18}$$

Из соотношения (4.17) следует, что $\omega = 0$, а из (4.18) получаем

$$\varepsilon = \frac{w_A - w_B}{AB} = \frac{24-12}{12} = 1 \text{ с}^{-2}.$$

Для нахождения ускорения центра тяжести C однородного стержня AB (AC=CB=6 см) также будем использовать соотношение (4.4), приняв за полюс точку A:

$$\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{CA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{CA}^{\text{цс}}.$$

Вычислим величины ускорений за счет вращения вокруг полюса A:

$$w_{CA}^{\text{цс}} = \omega^2 \cdot AC = 0\,,$$

$$w_{CA}^{\text{вр}} = \varepsilon \cdot AC = 6 \text{ см/с}^2.$$

Векторы составляющих ускорения точки C изображены на рис. 4.2б, следовательно, ускорение точки C перпендикулярно к AB и направлено в сторону ускорений точек A и B, находим его величину

$$w_C = w_A - w_{CA}^{\text{вр}} = 24 - 6 = 18 \text{ см/с}^2.$$

Ответ. $\omega = 0$, $\varepsilon = 1$ с$^{-2}$, $w_C = 0{,}18$ м/с^2.

Задача 4.2 (18.10)

Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма $OABD$. В положении, указанном на рис. 4.3, рычаг OL имеет угловую скорость $\omega_{OL} = 2$ рад/с и угловое ускорение $\varepsilon_{OL} = 4$ рад/с^2, OA = 15 см. Определить ускорение поршня D и угловое ускорение звена AB.

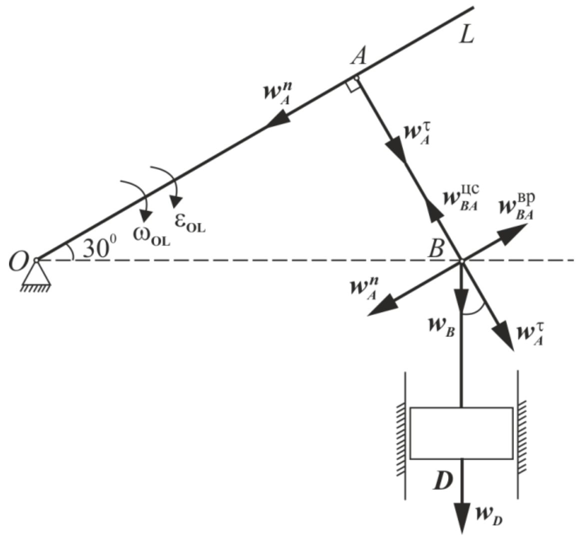


Рис. 4.3

Решение

При решении задачи 3.3 в данный момент времени в указанном на рис. 4.3 положении были найдены скорость поршня D и угловая скорость звена AB. Воспользуемся полученными результатами: $v_D = 34,6$ см/с, $\omega_{AB} = 2$ с$^{-1}$, при этом точка O является в данном положении механизма мгновенным центром скоростей для звена AB.

Найдем ускорения точек механизма. Точка A рычага может перемещаться по дуге окружности радиуса OA, ее ускорение состоит из касательной и нормальной составляющих

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n,$$

находим их численно

$w_A^\tau = \varepsilon_{OL} \cdot OA = 4 \cdot 15 = 60$ см/с^2, $w_A^n = \omega_{OL}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 15 = 60$ см/с^2,

на рис. 4.3 вектор касательного ускорения точки A сонаправлен со скоростью этой точки (рис. 3.10), так как угловое ускорение и угловая скорость рычага OL направлены в одну сторону, вектор нормального ускорения направлен от точки A к центру вращения O.

Поршень D совершает поступательное движение вдоль прямой BD, поэтому ускорение $\boldsymbol{w}_D = \boldsymbol{w}_B$ и направлено по этой же прямой.

Ускорение точки B будем находить как сумму ускорения поступательного движения звена AB вместе с полюсом A и ускорения за счет вращения стержня AB вокруг полюса A, согласно формуле (4.4) запишем

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}. \tag{4.19}$$

Вектор центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ при вращении звена AB вокруг полюса A направлен от точки B к A (вдоль BA – рис. 4.3) и численно его величину можно найти, так как известна угловая скорость. Предварительно вычислим длину звена BA

$$AB = OA \cdot tg 30^0 = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ см.}$$

Для центростремительного ускорения по формуле (4.8) получаем

$$w_{BA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 5\sqrt{3} = 34,64 \text{ см/с}^2.$$

Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ при повороте звена AB вокруг полюса A перпендикулярен центростремительному, на рис. 4.3 строим так, как если бы звено вращалось вокруг A против часовой стрелки. Величину его сможем вычислить только после того как найдем угловое ускорение звена ε_{AB}, поскольку для него согласно (4.7) имеет место соотношение

$$w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{AB} \cdot AB\ . \qquad (4.20)$$

Проектируем векторное уравнение (4.19) на два взаимно ортогональные направления, одно из них выберем по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^{\tau}$, другое – по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^{n}$:

$$w_B \cos 30^o = w_A^{\tau} - w_{BA}^{\text{цс}}\ , \qquad (4.21)$$

$$w_B \sin 30^o = w_A^{n} - w_{BA}^{\text{вр}}\ . \qquad (4.22)$$

Уравнение (4.21) дает возможность найти w_B

$$w_B = \frac{1}{\cos 30^o}(w_A^{\tau} - w_{BA}^{\text{цс}}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(60 - 20\sqrt{3}) = 29,28 \text{ см/с}^2.$$

Из уравнения (4.22) определяем $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$

$$w_{BA}^{\text{вр}} = w_A^{n} - w_B \sin 30^o = 60 - 20(\sqrt{3} - 1) = 45,36 \text{ см/с}^2,$$

тогда на основании (4.20) получаем ε_{AB}

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{20(4 - \sqrt{3})}{5\sqrt{3}} = 5,238 \text{ с}^{-2}.$$

Угловое ускорение ε_{AB} оказалось положительным, следовательно, направление вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ было выбрано верно.

Однако направление вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ можно было определить заранее, построив многоугольник ускорений по формуле (4.19).

На рис. 4.4 отложим от точки B последовательно друг за другом векторы $\boldsymbol{w}_A^{\tau}$, $\boldsymbol{w}_A^{n}$ и $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ с соблюдением масштаба их величин. Через конец вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ (а это начало вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$) проведем прямую, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$, до пересечения с прямой, по которой перемещается поршень D

и на которой должен располагаться вектор ускорения $\boldsymbol{w}_B$. Построенная точка пересечения – это конец вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$, следовательно, подтверждено направление этого вектора, выбранное на рис. 4.3.

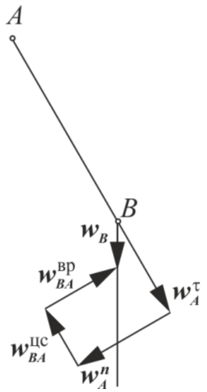


Рис. 4.4

Замыкающий вектор многоугольника ускорений, т. е. вектор, начинающийся в точке B и заканчивающийся в конце вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$, есть левая часть соотношения (4.19), а именно, искомый вектор ускорения $\boldsymbol{w}_B$ (рис. 4.4).

Ответ. $w_D = 0,29$ м/с^2, $\varepsilon_{AB} = 5,24$ с$^{-2}$.

Задача 4.3 (18.15)

Ползун B кривошипно-ползунного механизма OAB движется по дуговой направляющей. Определить касательное и нормальное ускорения ползуна B в положении, указанном на рис. 4.5, если OA = 10 см,

$AB = 20$ см. Кривошип OA вращается, имея в данный момент угловую скорость $\omega_{OA} = 1$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon_{OA} = 0$.

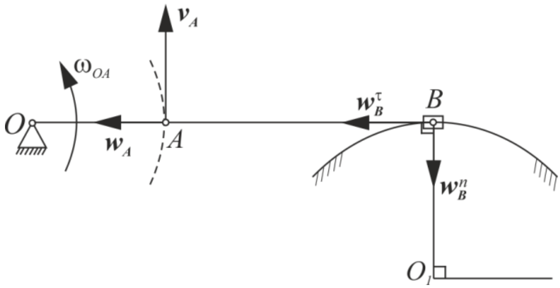


Рис 4.5

Решение

Кривошип OA совершает вращение вокруг неподвижной точки O. Найдем скорость точки A при заданном положении механизма

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 10 = 10 \text{ см/с},$$

вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен к кривошипу OA (рис. 4.5), направление (вверх) задается направлением против часовой стрелки угловой скорости кривошипа OA.

Точка A кривошипа может перемещаться по дуге окружности радиуса OA, ее ускорение состоит из касательной и нормальной составляющих

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n,$$

находим их численно

$$w_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0, \quad w_A^n = (\omega_{OA})^2 \cdot OA = 10 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 4.5 вектор ускорения $\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^n$ направлен от точки A к центру вращения O.

Ползун B движется по дуговой направляющей, вектор его скорости $\boldsymbol{v}_B$ и вектор касательного ускорения w_B^τ должны располагаться на прямой AB, вектор нормального ускорения w_B^n должен быть направлен по прямой BO_1 (рис. 4.5).

Построим мгновенный центр скоростей для шатуна AB как точку пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям, это точка B, следовательно, $\boldsymbol{v}_B = 0$. Этот факт позволяет найти нормальное ускорение ползуна B

$$w_B^n = \frac{(v_B)^2}{BO_1} = 0.$$

Воспользуемся тем, что В – мгновенный центр скоростей для шатуна AB, тогда

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AB,$$

что дает возможность найти угловую скорость шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ рад/с.}$$

С целью найти касательное ускорение ползуна B посмотрим на точку B как на точку шатуна, совершающего плоское движение, обратимся к формуле (4.4)

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}. \tag{4.23}$$

Вектор центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ при вращении шатуна AB вокруг полюса A направлен от точки B к A (вдоль BA). Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ при повороте шатуна AB вокруг полюса A

перпендикулярен центростремительному, т. е. перпендикулярен шатуну (рис. 4.6).

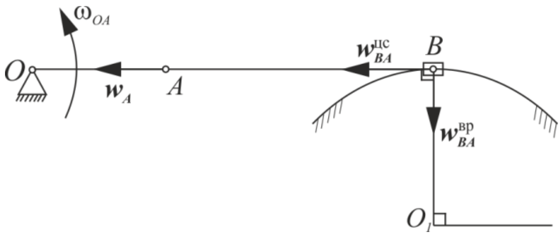


Рис 4.6

Спроектируем соотношение (4.23) на два взаимно перпендикулярные направления: прямая *ВА* и прямая BO_1

$$w_B^{\tau} = w_A + w_{BA}^{цс}. \tag{4.24}$$

$$w_B^{n} = w_{BA}^{вр}. \tag{4.25}$$

Вычислим центростремительное ускорение точки *B* за счет вращения шатуна *AB* около центра *A*

$$w_{BA}^{цс} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}5^2 \cdot 20 = 5 \text{ см/с}^2,$$

подставим значение центростремительного ускорения в уравнение (4.24)

$$w_B^{\tau} = w_A + w_{BA}^{цс} = 10 + 5 = 15 \text{ см/с}^2.$$

Заметим, что уравнение (4.25) позволяет определить угловое ускорение шатуна *AB*

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{w_B^n}{AB} = 0\ .$$

Ответ. $w_B^{\tau} = 0{,}15$ м/с^2, $w_B^n = 0$.

Задача 4.4 (18.16)

Определить угловое ускорение шатуна *AB* кривошипно-ползунного механизма, рассмотренного в предыдущей задаче 4.3, если в положении, указанном на рис. 4.7, угловое ускорение кривошипа *OA* равно 2 с$^{-2}$.

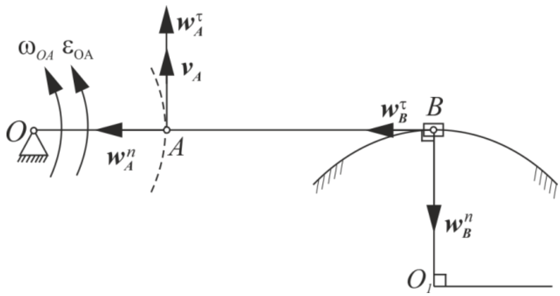


Рис 4.7

Решение

Воспользуемся решением предыдущей задачи:

$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10$ см/с, вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен кривошипу *OA* (рис. 4.7);

B – мгновенный центр скоростей для шатуна *AB*, $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{AB} = 0{,}5$ рад/с;

ускорение точки *A* состоит из касательной и нормальной составляющих $\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n$, $w_A^n = (\omega_{OA})^2 \cdot OA = 10$ см/с^2.

Однако по сравнению с предыдущей задачей теперь для касательного ускорения точки *A* получаем

$$w_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 4.7 вектор нормального ускорения $\boldsymbol{w}_A^n$ направлен от точки A к центру вращения O, как и в задаче 4.3, а $\boldsymbol{w}_A^\tau$ сонаправлен со скоростью $\boldsymbol{v}_A$, так как угловая скорость ω_{OA} и угловое ускорение ε_{OA} кривошипа OA имеют одинаковое направление.

Ползун B движется по дуговой направляющей, вектор его касательного ускорения w_B^τ должен располагаться на прямой AB, вектор нормального ускорения w_B^n должен быть направлен по прямой BO_1 (рис. 4.7), $w_B^n = 0$, так как $\boldsymbol{v}_B = 0$.

Посмотрим теперь на точку B как на точку шатуна, совершающего плоское движение, обратимся к формуле (4.23)

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}.$$

Вектор центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ при вращении шатуна AB вокруг полюса A направлен от точки B к A (вдоль BA). Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ при повороте шатуна AB вокруг полюса A перпендикулярен центростремительному, т. е. перпендикулярен шатуну (рис. 4.8), на этот рисунок перенесены и $\boldsymbol{w}_A^\tau$, и $\boldsymbol{w}_A^n$.

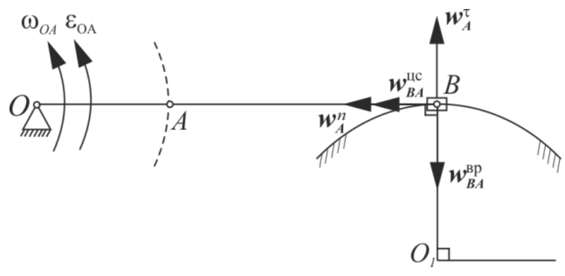


Рис. 4.8

Спроектируем соотношение (4.23) на два взаимно перпендикулярные направления: прямая *BA* и прямая BO_1

$$w_B^{\tau} = w_A^n + w_{BA}^{\text{цс}}, \tag{4.26}$$

$$w_B^n = w_{BA}^{\text{вр}} - w_A^{\tau} = 0 . \tag{4.27}$$

Центростремительное ускорение точки *B* за счет вращения шатуна *AB* около центра *A*

$$w_{BA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}5^2 \cdot 20 = 5 \ \text{см/с}^2,$$

подставим значение центростремительного ускорения в уравнение (4.26)

$$w_B^{\tau} = w_A^n + w_{BA}^{\text{цс}} = 10 + 5 = 15 \ \text{см/с}^2.$$

Уравнение (4.27) позволяет определить угловое ускорение шатуна *AB*

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{w_A^{\tau}}{AB} = \frac{20}{20} = 1\,\text{с}^{-2}.$$

Ответ. $\varepsilon_{AB} = 1\,\text{с}^{-2}$.

Задача 4.5 (18.27)

Колесо радиуса *R* катится без скольжения по плоскости. Центр *O* колеса движется с постоянной скоростью v_O. В точке *A* с ним шарнирно соединен стержень *AB* длины $l = 3R$. Другой конец стержня скользит по плоскости. В положении, указанном на рис. 4.9 ($\angle AOP = 120°$), определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *AB*, а также линейные скорость и ускорение его точки *B*.

Решение

Колесо радиуса *R* катится без скольжения по плоскости, следовательно, скорость точки касания колеса с плоскостью равна нулю. На рис. 4.9 точка касания обозначена *P*, это мгновенный центр скоростей для колеса. С помощью заданной скорости центра колеса v_O вычисляем угловую скорость колеса (4.13)

$$\omega_K = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R},$$

направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_O$ определяет направление мгновенного вращения колеса вокруг центра *P* против часовой стрелки (рис. 4.9).

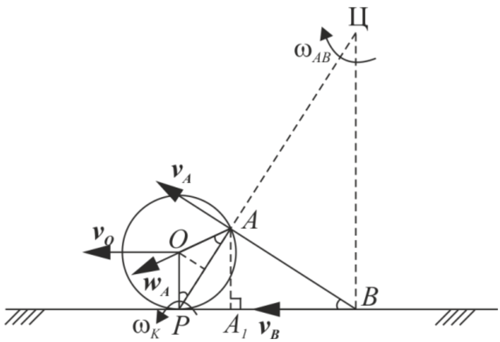


Рис 4.9

Чтобы найти скорость точки *A* как точки колеса, найдем ее расстояние *PA* до МЦС колеса. Рассмотрим равнобедренный треугольник *AOP*, в нем $\angle OAP = \angle OPA = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$, тогда

$$PA = 2 \cdot R\cos 30° = R\sqrt{3}.$$

Определяем скорость точки *A*

$$v_A = \omega_k \cdot PA = \frac{v_O}{R} \cdot R\sqrt{3} = v_O\sqrt{3},$$

вектор $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен отрезку *PA*, направление задается угловой скоростью колеса. Покажем, что вектор $\boldsymbol{v}_A$ лежит на продолжении отрезка *AB*.

Опустим перпендикуляр AA_1 на плоскость качения. Найдем из прямоугольного треугольника PAA_1 катеты

$$PA_1 = PA \cdot \cos 60° = R\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad AA_1 = PA \cdot \sin 60° = R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AA_1B, по теореме Пифагора найдем BA_1

$$BA_1 = \sqrt{AB^2 - A_1A^2} = \sqrt{(3R)^2 - (1{,}5R)^2} = 3R\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь обратимся к треугольнику ABP, вычислим его сторону PB

$$PB = PA_1 + A_1B = R\frac{\sqrt{3}}{2} + 3R\frac{\sqrt{3}}{2} = 2R\sqrt{3},$$

используя теорему синусов, найдем

$$\sin \angle PAB = \frac{PB}{AB}\sin 60° = \frac{2R\sqrt{3}}{3R} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

следовательно, треугольник ABP является прямоугольным, в нем $\angle PAB = 90°$, $\angle APB = 60°$, $\angle ABP = 30°$.

Итак, вектор $\boldsymbol{v}_A$ лежит на прямой AB (рис. 4.9). Применим к стержню AB, совершающему плоское движение, теорему о проекциях скоростей $v_A = v_B \cos 30°$, и найдем скорость конца B стержня, скользящего по плоскости

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30°} = 2v_O.$$

Для стержня AB построим мгновенный центр скоростей, проведя перпендикуляры в точке A к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и в точке B к $\boldsymbol{v}_B$ до их взаимного пересечения в точке *Ц* (рис. 4.9). Заметим, что перпендикуляр к скорости $\boldsymbol{v}_A$ – это продолжение прямой PA.

Найдем угловую скорость стержня

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{ЦB} = \frac{2v_O}{6R} = \frac{v_O}{3R},$$

так как из треугольника $PBЦ$ следует

$$ЦB = PB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6R .$$

По условию задачи центр O колеса движется прямолинейно с постоянной скоростью v_O, следовательно, равны нулю ускорение точки O ($w_O = 0$) и угловое ускорение колеса (4.15)

$$\varepsilon_K = \frac{w_O}{R} = 0 .$$

Мгновенный центр ускорений колеса в этом случае – его центр O.

Определим ускорение точки A колеса, для этого будем использовать соотношение (4.10)

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_{AO} = \boldsymbol{w}_{AO}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{AO}^{\text{цс}} = \boldsymbol{w}_A^{\tau} + \boldsymbol{w}_A^{n} , \tag{4.28}$$

Найдем величины слагаемых в правой части (4.28):

$$w_A^{\tau} = w_{AO}^{\text{вр}} = \varepsilon_K \cdot OA = 0 ,$$

$$w_A^{n} = w_{AO}^{\text{цс}} = \omega_K^2 \cdot OA = \left(\frac{v_O}{R}\right)^2 \cdot R = \frac{(v_O)^2}{R} ,$$

итак, для ускорения точки A, общей для колеса и стержня, имеем

$$w_A = w_A^{n} = \frac{(v_O)^2}{R} ,$$

направлен вектор w_A от точки A к O (вдоль радиуса колеса—рис. 4.9).

От колеса переходим к рассмотрению стержня и нахождению его кинематических характеристик.

Ускорение точки B, которое может быть направлено только вдоль плоскости качения (как и скорость v_B), будем находить как сумму ускорения поступательного движения стержня AB вместе с полюсом A и ускорения за счет вращения стержня AB вокруг полюса A. Согласно формуле (4.4) запишем

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}. \qquad (4.29)$$

Вектор центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ при вращении стержня AB вокруг полюса A направлен от точки B к A (вдоль BA), его величину можно найти, так как уже определена угловая скорость ω_{AB}

$$w_{BA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \left(\frac{v_O}{3R}\right)^2 \cdot 3R = \frac{(v_O)^2}{3R}.$$

Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$, чтобы определить его направление, построим многоугольник ускорений по формуле (4.29). На рис. 4.10 отложим от точки B последовательно друг за другом векторы $\boldsymbol{w}_A$ и $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ с соблюдением масштаба их величин. Через конец вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$, который должен быть началом вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$, проведем прямую, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ до пересечения с прямой, по которой перемещается конец B стержня и на которой должен располагаться вектор ускорения $\boldsymbol{w}_B$. Построенная точка пересечения – это конец вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$. Замыкающий вектор многоугольника ускорений, т. е. вектор, начинающийся в точке B и заканчивающийся в конце вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$, есть левая часть соотношения (4.29), т. е. искомый вектор ускорения $\boldsymbol{w}_B$ (рис. 4.10).

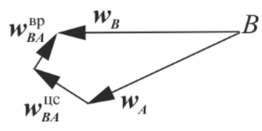


Рис. 4.10

Спроектируем векторное уравнение (4.29), или, что то же самое, многоугольник ускорений, на два взаимно ортогональные направления, одно из них выберем по направлению вектора $\boldsymbol{w}_B$, другое – по прямой *ВЦ*:

$$w_B = w_A \cos 30° + w_{BA}^{\text{цс}} \cos 30° - w_{BA}^{\text{вр}} \cos 60°\,, \tag{4.30}$$

$$0 = w_A \sin 30° - w_{BA}^{\text{цс}} \sin 30° - w_{BA}^{\text{вр}} \sin 60°\,. \tag{4.31}$$

Из уравнения (4.31) определяем вращательное ускорение $w_{BA}^{\text{вр}}$

$$w_{BA}^{\text{вр}} = \left(w_A - w_{BA}^{\text{цс}}\right)\frac{\sin 30°}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{(v_O)^2}{R}\,,$$

тогда находим угловое ускорение стержня ε_{AB}

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\left(\frac{v_O}{R}\right)^2.$$

Подставим $w_{BA}^{\text{вр}}$ в соотношение (4.30) и определим величину вектора $\boldsymbol{w}_B$

$$w_B = \left(w_A + w_{BA}^{\text{цс}}\right)\cos 30° - w_{BA}^{\text{вр}} \cos 60° = \frac{5\sqrt{3}}{9}\frac{(v_O)^2}{R}\,.$$

Ответ. $\omega_{AB} = \dfrac{v_O}{3R}$, $\varepsilon_{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}\left(\dfrac{v_O}{R}\right)^2$, $v_B = 2v_O$, $w_B = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}\dfrac{(v_O)^2}{R}$.

Задача 4.6 (18.25)

Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз *K*, прикрепленный к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону $x = 2t^2$ м. Определить ускорение точек *C*, *B* и *D*, лежащих на ободе подвижного блока 1, в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с в положении, указанном на рис. 4.11, если $OB \perp CD$, а радиус подвижного блока 1 равен 0,2 м.

Решение

Из известного закона движения груза K определим скорость точки K:

$$v_K(t) = \dot{x}(t) = 4t \text{ м/с.}$$

Так как нить нерастяжимая, то скорость всех движущихся точек нити одинаковая

$$v_D(t) = v_K(t) = 4t \text{ м/с.}$$

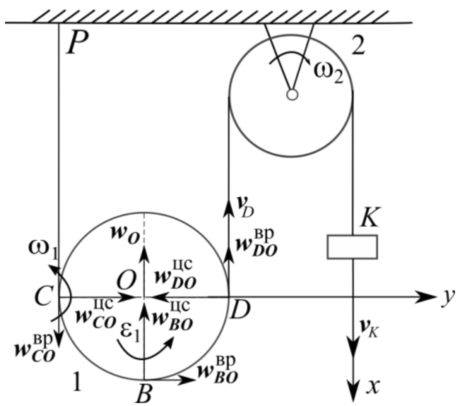


Рис. 4.11

Для подвижного блока 1 мгновенным центром скоростей является точка C, $v_C = 0$, как и скорости всех точек неподвижной части нити PC.

С другой стороны, скорость точки D определяется как скорость точки блока 1 при вращении вокруг МЦС – точки C: $v_D = \omega_1 \cdot CD = 2r_1\omega_1$, откуда можно получить

$$\omega_1(t) = \frac{v_D(t)}{2r_1} = \frac{4t}{2 \cdot 0,2} = 10t \text{ с}^{-1},$$

для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с

$$\omega_1\left(0,5\right) = 5\,\text{с}^{-1}.$$

Угловое ускорение блока 1 можно получить как производную угловой скорости

$$\varepsilon_1(t) = \dot{\omega}_1(t) = 10\,\text{с}^{-2},$$

направление углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости (против часовой стрелки), так как в рассматриваемый момент времени они одинаковы по знаку.

Скорость центра блока в два раза меньше скорости точки D

$$v_O(t) = \omega_1(t)\cdot r_1 = \frac{v_D(t)}{2r_1}\cdot r_1 = 2t \ \text{м/с}.$$

Как векторы $\boldsymbol{v}_K, \boldsymbol{v}_D, \boldsymbol{v}_O$ изображены на рис. 3.12, в разделе 3 решалась аналогичная задача 3.5.

Ускорение центра блока получим дифференцированием по времени скорости

$$w_O(t) = \dot{v}_O(t) = 2 \ \text{м/с}^2.$$

Теперь будем искать ускорения точек C, B и D как точек блока 1, совершающего плоское движение. Это движение представим в виде суммы двух движений: поступательного движения вместе с полюсом O и вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через выбранный полюс O, для этого воспользуемся соотношением (4.4):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_D &= \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{w}_{DO}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{DO}^{\text{цс}}, \\ \boldsymbol{w}_B &= \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{w}_{BO}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BO}^{\text{цс}}, \\ \boldsymbol{w}_C &= \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{w}_{CO}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{CO}^{\text{цс}}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

В формулах (4.32), согласно (4.7) и (4.8), $w_{DO}^{\text{вр}} = w_{BO}^{\text{вр}} = w_{CO}^{\text{вр}} = \varepsilon_1 \cdot r_1$, $w_{DO}^{\text{цс}} = w_{BO}^{\text{цс}} = w_{CO}^{\text{цс}} = \omega_1^2 \cdot r_1$, направления векторов указаны на рис. 4.11. Векторы вращательных ускорений определяются направлением ε_1 против часовой стрелки, векторы центростремительных ускорений направлены к полюсу *O*.

Введем ось *y* перпендикулярно оси *x* и с направлением из *O* в *D*, составим проекции ускорений $\boldsymbol{w}_D, \boldsymbol{w}_B, \boldsymbol{w}_C$ на эти оси и вычислим их в момент времени $t_1 = 0,5$ с:

$$w_{Dx} = -w_O - w_{DO}^{\text{вр}} = -2 - 10 \cdot 0,2 = -4 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{Dy} = -w_{DO}^{\text{цс}} = -25 \cdot 0,2 = -5 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{Bx} = -w_O - w_{BO}^{\text{цс}} = -2 - 5 = -7 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{By} = w_{BO}^{\text{вр}} = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{Cx} = -w_O + w_{CO}^{\text{вр}} = -2 + 2 = 0 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{Cy} = w_{CO}^{\text{цс}} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Найдем теперь величины ускорений точек *C*, *B* и *D* при $t_1 = 0,5$ с:

$$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6,4 \text{ м/с}^2,$$

$$w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} = 7,3 \text{ м/с}^2,$$

$$w_C = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $w_D = 6,4$ м/с^2, $w_B = 7,3$ м/с^2, $w_C = 5$ м/с^2.

Задача 4.7 (задание К-5, № 16 [3])

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловую скорость и угловое ускорение шестерни, которой эти точки принадлежат. Качение шестерни происходит без скольжения. Схема механизма помещена на рис. 4.12, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

OA, см	r, см	ω_{OA}, с$^{-1}$	ε_{OA}, с$^{-2}$
55	20	2	5

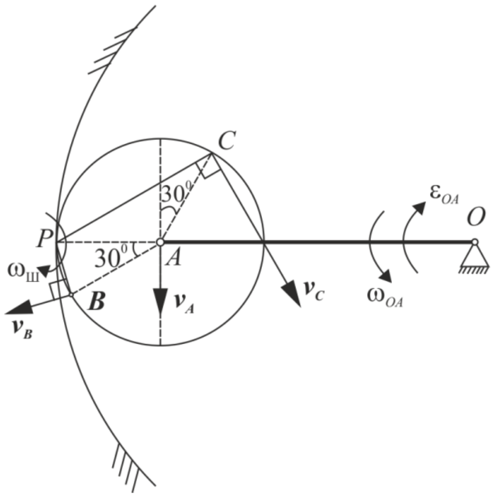


Рис. 4.12

Решение

Механизм состоит из кривошипа OA и шестерни, насаженной на его конец A и находящейся во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом, соосным с кривошипом OA. Кривошип OA совершает вращение вокруг неподвижной точки O. Найдем скорость точки A при заданном положении механизма

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 55 = 110 \text{ см/с},$$

вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен к кривошипу OA (рис. 4.12), направление (вниз) задается направлением против часовой стрелки угловой скорости кривошипа OA.

Мгновенный центр скоростей шестерни находится в точке P касания с неподвижным колесом. Угловая скорость шестерни

$$\omega_{ш} = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{r} = \frac{110}{20} = 5,5 \text{ с}^{-1}.$$

Найдем расстояния от точек B и C до МЦС, будем использовать для этого теорему косинусов

$$BP = \sqrt{r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 30°} = 20\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 10,35 \text{ см},$$

$$CP = \sqrt{r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 120°} = 20\sqrt{3} = 34,64 \text{ см}.$$

Вычисляем величины скоростей

$$v_B = \omega_{ш} \cdot BP = 5,5 \cdot 10,35 = 56,94 \text{ см/с},$$

$$v_C = \omega_{ш} \cdot CP = 5,5 \cdot 34,64 = 190,5 \text{ см/с},$$

откладываем на рис. 4.12 векторы $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ перпендикулярно PB и PC в сторону, соответствующую направлению вращения шестерни (по часовой стрелке вокруг центра P).

Переходим к нахождению ускорений точек механизма. Точка A кривошипа может перемещаться по дуге окружности радиуса OA, ее ускорение состоит из касательной и нормальной составляющих

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^{\tau} + \boldsymbol{w}_A^{n},$$

находим их численно

$$w_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 55 = 275 \text{ см/с}^2,$$

$$w_A^{n} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 55 = 220 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 4.13 вектор касательного ускорения точки A направлен противоположно скорости этой точки, так как угловое ускорение и угловая скорость кривошипа *OA* направлены в разные стороны, вектор нормального ускорения направлен от точки *A* к центру вращения *O*. Зная теперь касательное ускорение центра шестерни, найдем ее угловое ускорение по формуле (4.15)

$$\varepsilon_{ш} = \frac{w_A^{\tau}}{r} = \frac{275}{20} = 13,75\ c^{-2},$$

направление углового ускорения шестерни не совпадает с направлением угловой скорости, вращение шестерни замедленное, на рис. 4.13 стрелка $\varepsilon_{ш}$ нарисована против часовой стрелки.

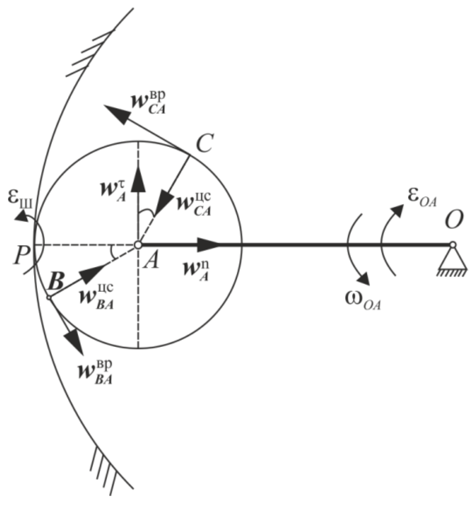


Рис. 4.13

Ускорение точки *B* будем находить как сумму ускорения поступательного движения шестерни вместе с полюсом *A* и ускорения за счет вращения вокруг полюса *A*

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A^{\tau} + \boldsymbol{w}_A^{n} + \boldsymbol{w}_{BA}^{вр} + \boldsymbol{w}_{BA}^{цс}. \tag{4.33}$$

Вектор центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ при вращении шестерни вокруг полюса A направлен от точки B к A и численно его величину можно найти

$$w_{BA}^{\text{цс}} = \omega_{\text{ш}}^2 \cdot r = 5{,}5^2 \cdot 20 = 605 \text{ см/с}^2.$$

Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ при повороте вокруг полюса A перпендикулярен центростремительному, направление против часовой стрелки задает угловое ускорение $\varepsilon_{\text{ш}}$, численно получаем

$$w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{\text{ш}} \cdot r = 13{,}75 \cdot 20 = 275 \text{ см/с}^2,$$

векторы $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ и $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ изображены на рис. 4.13 без соблюдения масштаба.

Ускорение точки B найдем методом проекций уравнения (4.33) на два взаимно ортогональные направления, одно из них выберем по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^n$, другое – по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^\tau$:

$$w_{B1} = w_A^n + w_{BA}^{\text{цс}} \cos 30° + w_{BA}^{\text{вр}} \sin 30° =$$
$$= 220 + 605 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 275 \cdot \frac{1}{2} = 881{,}4 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{B2} = w_A^\tau + w_{BA}^{\text{цс}} \sin 30° - w_{BA}^{\text{вр}} \cos 30° =$$
$$= 275 + 605 \cdot \frac{1}{2} - 275 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 339{,}3 \text{ см/с}^2,$$

величина вектора ускорения точки B

$$w_B = \sqrt{w_{B1}^2 + w_{B2}^2} = \sqrt{881{,}4^2 + 339{,}3^2} = 944{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Аналогично находим ускорение точки C, выбрав по-прежнему за полюс точку A,

$$\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{w}_A^\tau + \boldsymbol{w}_A^n + \boldsymbol{w}_{CA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{CA}^{\text{цс}}. \qquad (4.34)$$

Величины вращательного $\boldsymbol{w}_{CA}^{\text{вр}}$ и центростремительного ускорений $\boldsymbol{w}_{CA}^{\text{цс}}$ имеют то же самое значение, что и для точки *B*, так как и *C*, и *B* лежат на ободе шестерни:

$$w_{CA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{\text{ш}} \cdot r = w_{BA}^{\text{вр}} = 275 \text{ см/с}^2.$$

$$w_{CA}^{\text{цс}} = \omega_{\text{ш}}^2 \cdot r = w_{BA}^{\text{цс}} = 605 \text{ см/с}^2,$$

направления показаны на рис. 4.13.

Для нахождения ускорения точки *C* спроектируем уравнение 4.34) на те же самые два взаимно ортогональные направления (направления векторов $\boldsymbol{w}_A^n$ и $\boldsymbol{w}_A^\tau$):

$$w_{C1} = w_A^n - w_{CA}^{\text{цс}} \sin 30° - w_{CA}^{\text{вр}} \cos 30° =$$
$$= 220 - 605 \cdot \frac{1}{2} - 275 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -320,7 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{C2} = w_A^\tau - w_{CA}^{\text{цс}} \cos 30° + w_{CA}^{\text{вр}} \sin 30° =$$
$$= 275 - 605 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 275 \cdot \frac{1}{2} = -111,4 \text{ см/с}^2,$$

величина вектора ускорения точки *C*

$$w_C = \sqrt{w_{C1}^2 + w_{C2}^2} = \sqrt{320,7^2 + 111,4^2} = 339,5 \text{ см/с}^2.$$

Ответ. $v_B = 0,57$ м/с, $v_C = 1,91$ м/с, $w_B = 9,44$ м/с^2, $w_C = 3,4$ м/с^2.

Задача 4.8 (задание К-5, № 25 [3])

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек *B* и *C*. Схема механизма помещена на рис. 4.14, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

OA, см	AB, см	AC, см	ω_{OA}, с$^{-1}$	ε_{OA}, с$^{-2}$
20	70	20	1	2

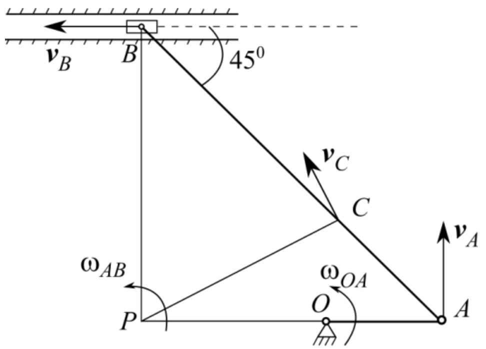


Рис. 4.14

Решение

Механизм состоит из кривошипа OA, шатуна AB и ползуна B. Кривошип OA совершает вращение вокруг неподвижной точки O. Найдем скорость точки A при заданном положении механизма

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см/с},$$

вектор скорости $\boldsymbol{v}_A$ перпендикулярен к кривошипу OA (рис. 4.14), направление (вверх) задается направлением против часовой стрелки угловой скорости кривошипа OA.

Скорость ползуна B направлена вдоль направляющих реек. Построим мгновенный центр скоростей как точку пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям, это точка P

на рис. 4.14. Из треугольника *ABP* находим расстояния от точек *A* и *B* до мгновенного центра скоростей

$$PA = PB = 70\frac{\sqrt{2}}{2} = 35\sqrt{2} \text{ см.}$$

Вычислим угловую скорость шатуна *AB*, используя тот факт, что точка *A* является общей и для шатуна, и для кривошипа

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} = \frac{20}{35\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{7} = 0,4041 \text{ с}^{-1},$$

при этом направление вектора скорости $\boldsymbol{v}_A$ определяет направление мгновенного вращения шатуна *AB* вокруг центра *P* против часовой стрелки.

Находим скорость ползуна *B* как точки шатуна

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 20 \text{ см/с},$$

отметим, что в данном положении механизма величины скоростей точек *A* и *B* равны, так как они находятся на одинаковых расстояниях от мгновенного центра скоростей. Вектор $\boldsymbol{v}_B$ направлен вдоль реек налево согласно направлению угловой скорости шатуна *AB*.

Для точки *C* определим предварительно ее расстояние до центра Р по теореме косинусов

$$PC = \sqrt{CA^2 + PA^2 - 2 \cdot CA \cdot PA \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{1450} = 43,01 \text{ см.}$$

Находим скорость точки *C*

$$v_C = \omega_{AB} \cdot PC = 15,39 \text{ см/с},$$

откладываем на рис. 4.14 вектор $\boldsymbol{v}_C$ перпендикулярно *PC* в сторону, соответствующую направлению вращения шатуна *AB* (против часовой стрелки вокруг центра *P*).

Переходим к нахождению ускорений точек механизма. Точка A кривошипа может перемещаться по дуге окружности радиуса OA, ее ускорение состоит из касательной и нормальной составляющих

$$\boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{w}_A^{\tau} + \boldsymbol{w}_A^{n},$$

находим их численно

$$w_A^{\tau} = \varepsilon \cdot OA = 40 \text{ см/с}^2, \quad w_A^{n} = \omega^2 \cdot OA = 20 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 4.15 вектор касательного ускорения точки A сонаправлен со скоростью этой точки, так как угловое ускорение и угловая скорость кривошипа OA направлены в одну сторону, вектор нормального ускорения направлен от точки A к центру вращения O.

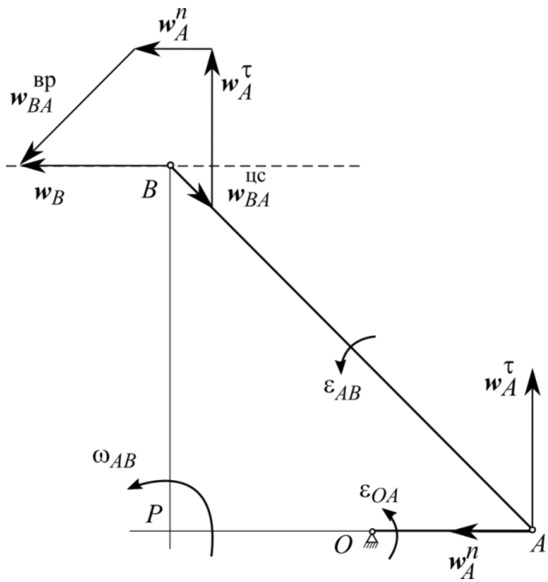


Рис. 4.15

Ускорение точки B будем находить как сумму ускорения поступательного движения шатуна AB вместе с полюсом A и ускорения за счет вращения шатуна AB вокруг полюса A

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A^{\tau} + \boldsymbol{w}_A^{n} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}. \tag{4.35}$$

Вектор центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ при вращении шатуна AB вокруг полюса A направлен от точки B к A (вдоль BA) и численно его величину можно найти, так как уже найдена угловая скорость шатуна

$$w_{BA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \left(\frac{2\sqrt{2}}{7}\right)^2 \cdot 70 = \frac{80}{7} = 11{,}43 \text{ см/с}^2.$$

Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ при повороте шатуна AB вокруг полюса A перпендикулярен центростремительному, т. е. перпендикулярен шатуну, величину его сможем вычислить только после того как найдем угловое ускорение шатуна ε_{AB}, так как для него имеет место соотношение

$$w_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{AB} \cdot AB. \tag{4.36}$$

Направление вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$ получим, построив многоугольник ускорений по формуле (4.35). Отложим от точки B последовательно векторы $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{цс}}$, $\boldsymbol{w}_A^{\tau}$ и $\boldsymbol{w}_A^{n}$, через конец вектора $\boldsymbol{w}_A^{n}$ проведем прямую, параллельную вращательному ускорению $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ (перпендикулярно шатуну AB), до пересечения с прямой, по которой перемещается ползун B и на которой должен располагаться вектор его ускорения $\boldsymbol{w}_B$. Построенная точка пересечения – это конец вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$. Замыкающий вектор многоугольника ускорений, т. е. вектор, начинающийся в точке B

и заканчивающийся в конце вектора $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$, есть вектор ускорения $\boldsymbol{w}_B$ (рис. 4.15).

Проектируем векторное соотношение (4.35) на два взаимно ортогональные направления, одно из них выберем по направлению движения точки B, другое – по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^{\tau}$

$$w_B = w_A^n + w_{BA}^{\text{вр}} \frac{\sqrt{2}}{2} - w_{BA}^{\text{цс}} \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{4.37}$$

$$0 = w_A^{\tau} - w_{BA}^{\text{вр}} \frac{\sqrt{2}}{2} - w_{BA}^{\text{цс}} \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{4.38}$$

Уравнение (4.38) дает возможность найти $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$

$$w_{BA}^{\text{вр}} = w_A^{\tau}\sqrt{2} - w_{BA}^{\text{цс}} = 40\sqrt{2} - 11{,}43 = 45{,}14 \text{ см/с}^2,$$

с помощью соотношения (4.36) определяем ε_{AB}

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{45{,}14}{70} = 0{,}6449 \text{ с}^{-2}.$$

В уравнение (4.37) подставим $\boldsymbol{w}_{BA}^{\text{вр}}$ и найдем величину вектора $\boldsymbol{w}_B$

$$w_B = 20 + 45{,}14\frac{\sqrt{2}}{2} - 11{,}43\frac{\sqrt{2}}{2} = 43{,}84 \text{ см/с}^2.$$

Для определения ускорения точки C запишем векторное соотношение, аналогичное (4.35), выбрав по-прежнему за полюс точку A,

$$\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{w}_A^{\tau} + \boldsymbol{w}_A^{n} + \boldsymbol{w}_{CA}^{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{CA}^{\text{цс}}. \tag{4.39}$$

Вычислим величины центростремительного ускорения $\boldsymbol{w}_{CA}^{\text{цс}}$

$$w_{CA}^{\text{цс}} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = \left(\frac{2\sqrt{2}}{7}\right)^2 \cdot 20 = \frac{160}{49} = 3{,}265 \text{ см/с}^2$$

и вращательного $\boldsymbol{w}_{CA}^{\text{вр}}$

$$w_{CA}^{\text{вр}} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0{,}6449 \cdot 20 = 12{,}90 \text{ см/с}^2.$$

Отложим в точке C все составляющие вектора $\boldsymbol{w}_C$ (рис. 4.16).

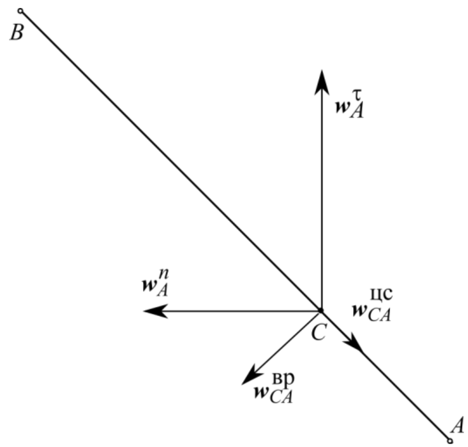


Рис. 4.16

Спроектируем векторное соотношение (4.39) на два взаимно ортогональные направления, одно из них выберем по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^n$, другое – по направлению вектора $\boldsymbol{w}_A^\tau$

$$w_{C1} = w_A^n + w_{CA}^{\text{вр}}\frac{\sqrt{2}}{2} - w_{CA}^{\text{цс}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 + 12,90\frac{\sqrt{2}}{2} - 3,265\frac{\sqrt{2}}{2} = 26,81 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{C2} = w_A^\tau - w_{CA}^{\text{вр}}\frac{\sqrt{2}}{2} - w_{CA}^{\text{цс}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 40 - 12,90\frac{\sqrt{2}}{2} - 3,265\frac{\sqrt{2}}{2} = 28,57 \text{ см/с}^2.$$

Находим полное ускорение точки C

$$w_C = \sqrt{\boldsymbol{w}_{C1}^2 + \boldsymbol{w}_{C2}^2} = \sqrt{26,81^2 + 28,57^2} = 39,18 \text{ см/с}^2.$$

Ответ. $v_B = 0,2$ м/с, $v_C = 0,15$ м/с, $w_B = 0,44$ м/с^2, $w_C = 0,39$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.9 (18.6)

Линейка эллипсографа скользит концом *B* по оси Ox, концом *A* по оси Oy, $AB = 20$ см, *AC* = *CB* = *OC* (рис. 4.17).

Определить скорость и ускорение точки *A* в момент, когда угол φ наклона линейки к оси Ox равен 30^0, а проекции скорости и ускорения точки *B* на ось *x* равны $v_{Bx} = -20$ см/с, $w_{Bx} = -10$ см/с^2.

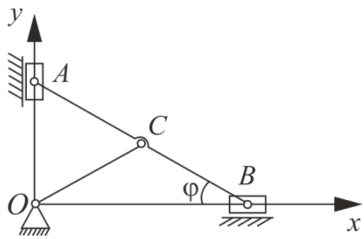


Рис. 4.17

Ответ. $v_{Ay} = 0,35$ м/с, $w_{Ay} = -1,43$ м/с^2.

Задача 4.10 (18.7)

Муфты *A* и *B*, скользящие вдоль прямолинейных образующих, соединены стержнем *AB* длины *l*. Муфта *A* движется с постоянной скоростью v_A (рис. 4.18). Определить ускорение муфты *B* и угловое ускорение стержня *AB* в положении, при котором стержень *AB* образует с прямой *OB* заданный угол φ.

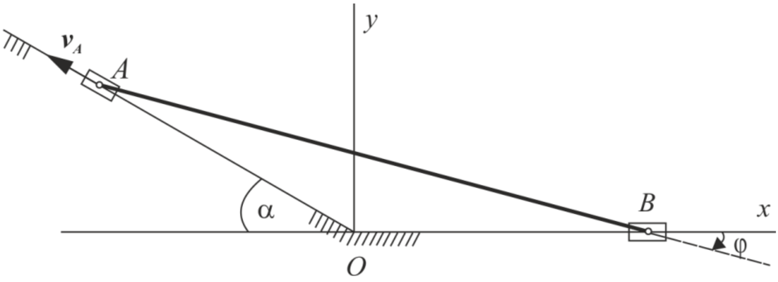


Рис. 4.18

Ответ. $w_B = \dfrac{v_A^2}{l}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}$, $\varepsilon_{AB} = \dfrac{v_A^2}{l^2}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}\sin\varphi$.

Задача 4.11 (18.11)

Кривошип OA длины 20 см вращается равномерно с угловой скоростью ω_O =10 рад/с и приводит в движение шатун AB длины 100 см; ползун B движется по вертикали (рис. 4.19). Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 45^0$.

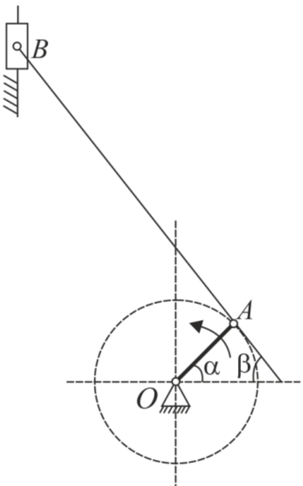


Рис. 4.19

Ответ. $\omega = 2$ рад/с, $\varepsilon = 120$ рад/с^2, $w_B = 5,66$ м/с^2.

Задача 4.12 (18.13)

Стержень *OA* шарнирного четырехзвенника *OABO₁* вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня *AB*, а также ускорение шарнира *B* в положении, указанном на рис. 4.20, если $AB = 2OA = 2a$.

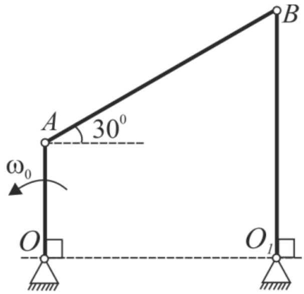


Рис. 4.20

Ответ. $\omega_{AB} = 0,\ \varepsilon_{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2,\ w_B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\,\omega_0^2.$

Задача 4.13 (18.17)

Точильный станок приводится в движение педалью $OA = 24$ см, которая колеблется около оси *O* по закону $\varphi = \dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{2}t$ рад (угол φ отсчитывается от горизонтали). Точильный камень *K* вращается вокруг оси O_1 с помощью стержня *AB*. Оси *O* и O_1 перпендикулярны плоскости рис. 4.21. Найти в момент времени $t = 0$ ускорение точки *B* точильного камня *K*, если $O_1B = 12$ см. В этот момент *OA* и O_1B расположены горизонтально, причем $\angle OAB = 60^0$.

Ответ. $w_B = 0{,}43$ м/с^2.

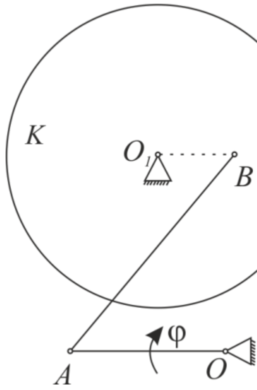


Рис. 4.21

Задача 4.14 (18.18)

Антипараллелограмм состоит из двух кривошипов *AB* и *CD* одинаковой длины 40 см и шарнирно соединенного с ними стержня *BC* длины 20 см (рис. 4.22). Кривошип *AB* вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *BC* в момент, когда угол *ADC* равен 90^0.

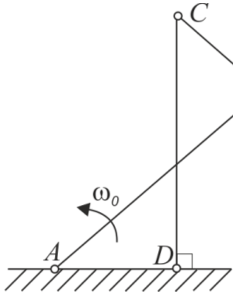


Рис. 4.22

Ответ. $\omega_{BC} = \dfrac{8}{3}\omega_0$; вращение замедленное, $\varepsilon_{BC} = \dfrac{20}{9}\omega_0^2$.

Задача 4.15 (18.26)

Груз *K*, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой *L*, опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка *L* катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить ускорения точек *A*, *B* и *D*, лежащих на ободе катушки, ее угловую скорость и угловое ускорение в момент времени $t = 0,5$ с в положении, указанном на рис. 4.23; $AD \perp OB$, $OD = 2OC = 0,2$ м.

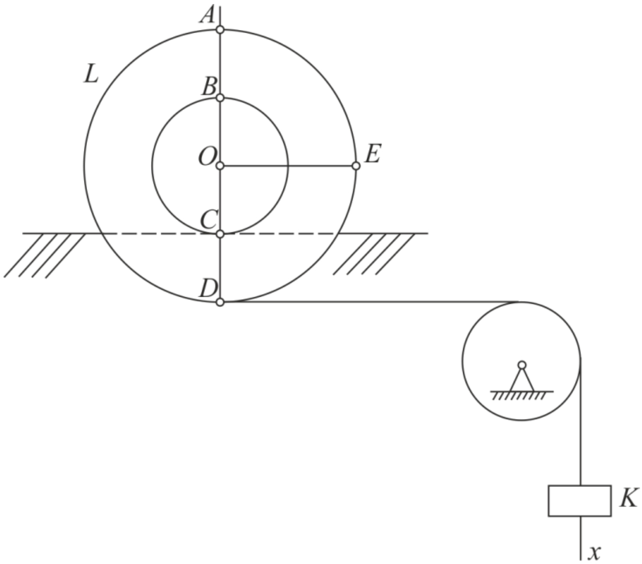


Рис. 4.23

Ответ. $w_A = 20,9$ м/с^2, $w_B = 22,4$ м/с^2, $w_D = 20,1$ м/с^2, $\omega = 10$ рад/с, $\varepsilon = 20$ рад/с^2 .

Задача 4.16 (18.37)

Квадрат *ABCD* со стороной a совершает плоское движение в плоскости рисунка. Найти положение мгновенного центра ускорений и ускорения его вершин C и D, если известно, что в данный момент ускорения двух вершин A и B одинаковы по величине и равны 10 см/с^2. Направление ускорений точек A и B совпадает со сторонами квадрата, как указано на рис. 4.24.

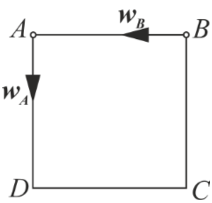


Рис. 4.24

Ответ. $w_C = w_D = 0{,}1$ м/с^2 и направлены по сторонам квадрата. Мгновенный центр ускорений находится в точке пересечения диагоналей квадрата.

Задача 4.17 (18.38)

Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости рис. 4.25. Ускорение вершин A и B в данный момент времени равны 16 см/с^2 и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение третьей вершины C треугольника.

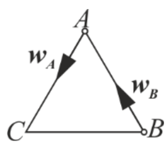


Рис. 4. 25

Ответ: w_C направлено от C к B, $w_C = 0{,}16$ м/с^2.

Задача 4.18 (18.41)

Найти ускорение середины стержня *AB*, если известны величины ускорений его концов: $w_A = 10$ см/с^2, $w_B = 20$ см/с^2 и углы, образованные ускорениями с прямой *AB*: $\alpha = 10°$ и $\beta = 70°$.

Ответ. $w = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(w_A\right)^2 + \left(w_B\right)^2 - 2w_A w_A \cos\left(\beta - \alpha\right)} = 0{,}087$ м/с^2.

Задача 4.19 (18.31)

Показать, что в момент, когда угловая скорость $\omega = 0$, проекции ускорений концов отрезка, совершающего плоское движение, на направление отрезка равны между собой.

Задача 4.20 (18.32)

Показать, что в момент, когда угловое ускорение $\varepsilon = 0$, проекции ускорений концов отрезка, совершающего плоское движение, на направление, перпендикулярное отрезку, равны между собой.

Литература

1. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области техники и технологий по дисциплине «Теоретическая механика» / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – Изд. 48-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 448 с.

2. Бухгольц, Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки / Н. Н. Бухгольц. – 6-е изд., перераб. и доп. С. М. Таргом. – Москва : Наука, 1965. – 467 с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / [А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.] ; под общ. ред. А. А. Яблонского. – 3-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 1978. – 388 с.

4. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие для втузов. – 2-е изд., перераб. и доп./Под ред. К. С. Колесникова.—М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.—448 с.

5. Ворович, И. И. Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие: в 2 ч. Ч. 1 / И. И. Ворович. – М. – Ижевск : Инст. компьют. исследований, 2004. – 680 с.

6. Ворович, И. И. Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие: в 2 ч. Ч. 2 / И. И. Ворович. – Москва : Физматлит, 2010. – 604 с.

Учебное издание

ВАТУЛЬЯН Карина Александровна,
ШУТЬКО Валентина Моисеевна

Кинематика твердого тела

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка *К. А. Ватульян*

Подписано в печать 13.12.2018 г.
Бумага офсетная. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Усл. печ. лист. 6.16.
Уч. изд. л. 4,0. Заказ № 6792. Тираж 100 экз.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.