Математические основы защиты информации

Лекция 6

Пилиди Владимир Ставрович

28 апреля 2020 года

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов
1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов
1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, x, $y \in G_2$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\ ,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y$$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов
1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, $x, y \in G_2$, $u, v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v)$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов
1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\,,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y\,,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy$$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\,,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y\,,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy\,,\ f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, $x, y \in G_2$, $u, v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v) = xy$, $f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$, $f^{-1}(xy) = uv$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\,,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y\,,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy\,,\ f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy),\ f^{-1}(xy) = uv,$$
$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y). \qquad \square$$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, $x,\ y \in G_2$, $u,\ v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v) = xy$, $f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$, $f^{-1}(xy) = uv$,
$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$. $\square$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов
1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, $x,\, y \in G_2$, $u,\, v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v) = xy$, $f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$, $f^{-1}(xy) = uv$,
$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$. $\square$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\,,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y\,,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy\,,\ f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy),\ f^{-1}(xy) = uv,$$
$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y). \qquad \square$$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\ ,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y\ ,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy\ ,\ f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy),\ f^{-1}(xy) = uv,$$
$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y). \qquad \square$$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение, $x,\ y \in G_1$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy,\ f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy),\ f^{-1}(xy) = uv,$$
$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y). \qquad \square$$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение, $x,\ y \in G_1$,

$h(xy) = g(f(xy))$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$$f^{-1} : G_2 \to G_1,\ x,\ y \in G_2\,,\ u,\ v \in G_1,\ f(u) = x,\ f(v) = y\,,$$
$$f(uv) = f(u)f(v) = xy\,,\ f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy),\ f^{-1}(xy) = uv,$$
$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y). \qquad \square$$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение, $x,\ y \in G_1$,

$$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y))$$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, $x, y \in G_2$, $u, v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v) = xy$, $f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$, $f^{-1}(xy) = uv$,
$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$. $\square$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение, $x, y \in G_1$,
$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y))$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, x, $y \in G_2$, u, $v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v) = xy$, $f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$, $f^{-1}(xy) = uv$,
$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$. $\square$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение, x, $y \in G_1$,
$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = h(x)h(y)$

Гомоморфизмы

Определение

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если отображение f биективное.

Теорема

Гомоморфизм $f : G_1 \to G_2$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e_1\}$, $\operatorname{im} f = G_2$.

Свойства изоморфизмов

1) Если $f : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, то $f^{-1} : G_2 \to G_1$ является изоморфизмом.

$f^{-1} : G_2 \to G_1$, $x, y \in G_2$, $u, v \in G_1$, $f(u) = x$, $f(v) = y$,
$f(uv) = f(u)f(v) = xy$, $f^{-1}(f(uv)) = f^{-1}(xy)$, $f^{-1}(xy) = uv$,
$f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y)$. $\square$

2) Если $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$ изоморфизмы, то $gf : G_1 \to G_3$ является изоморфизмом.

$h = gf$, h биективное отображение, $x, y \in G_1$,
$h(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = h(x)h(y)$. $\square$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1$, $b = f(a)$

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$$a \in G_1\,,\; b = f(a)\,,\; |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty$$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\; b = f(a)\,,\; |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b)$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$

$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$

$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$

$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$

$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$

$b = f(a) \Rightarrow n|m$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\, b = f(a)\,,\, |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\, |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\, |a| = m\,,\, |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\, a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n$

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$$
$$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$$
$$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n. \qquad \square$$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\, b = f(a)\,,\, |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\, |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\, |a| = m\,,\, |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\, a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\, m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$

$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$

$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$

$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$

$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1)$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1) \neq \varnothing$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1) \neq \varnothing,$
$x,\, y \in H_2$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\; b = f(a)\,,\; |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\; |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\; |a| = m\,,\; |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\; a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\; m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\; H_2 = f(H_1) \neq \varnothing,$
$x,\, y \in H_2\,,\; u,\, v \in H_1$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1) \neq \varnothing,$
$x,\ y \in H_2\,,\ u,\ v \in H_1\,,\ x = f(u),\ y = f(v)$

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$$
$$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$$
$$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n. \qquad \square$$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1) \neq \varnothing,$$
$$x,\, y \in H_2\,,\ u,\, v \in H_1\,,\ x = f(u),\ y = f(v)\,,$$
$$xy^{-1} = f(\underbrace{uv^{-1}}_{\in H_1}) \in H_2$$

Гомоморфизмы

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1) \neq \varnothing,$
$x,\ y \in H_2\,,\ u,\ v \in H_1\,,\ x = f(u),\ y = f(v)\,,$
$xy^{-1} = f(\underbrace{uv^{-1}}_{\in H_1}) \in H_2\,,\ H_2$ — подгруппа группы G_2

3) Если $f : G_1 \to G_2$ изоморфизм, то для любого $a \in G_1$ элементы a и $f(a)$ имеют одинаковые порядки (конечные или бесконечные).

$a \in G_1\,,\ b = f(a)\,,\ |a| < \infty \Rightarrow |b| < \infty\,,$
$a = f^{-1}(b),\ |b| < \infty \Rightarrow |a| < \infty\,,\ |a| = m\,,\ |b| = n\,,$
$b = f(a) \Rightarrow n|m\,,\ a = f^{-1}(b) \Rightarrow m|n,\ m = n.$ $\square$

4) Изоморфизм $f : G_1 \to G_2$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между подгруппами групп G_1 и G_2.

$H_1 \subset G_1\,,\ H_2 = f(H_1) \neq \varnothing,$
$x,\ y \in H_2\,,\ u,\ v \in H_1\,,\ x = f(u),\ y = f(v)\,,$
$xy^{-1} = f(\underbrace{uv^{-1}}_{\in H_1}) \in H_2\,,\ H_2$ — подгруппа группы G_2. $\square$

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.
Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G\ f(x) = x.$

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G \; f(x) = x.$

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G \; f(x) = x.$

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

$f : G_1 \to G_2$

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G \ f(x) = x.$

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

$f : G_1 \to G_2 \, , \, f^{-1} : G_2 \to G_1.$

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G \; f(x) = x.$

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

$f : G_1 \to G_2\,,\; f^{-1} : G_2 \to G_1.$

Транзитивность: $G_1 \cong G_2, G_2 \cong G_3 \overset{?}{\Rightarrow} G_1 \cong G_3$.

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G \; f(x) = x$.

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

$f : G_1 \to G_2 \, , \; f^{-1} : G_2 \to G_1$.

Транзитивность: $G_1 \cong G_2, \, G_2 \cong G_3 \overset{?}{\Rightarrow} G_1 \cong G_3$.

$f : G_1 \to G_2$

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.
Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$\quad f : G \to G, \forall x \in G \ f(x) = x.$

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

$\quad f : G_1 \to G_2\,,\ f^{-1} : G_2 \to G_1.$

Транзитивность: $G_1 \cong G_2,\ G_2 \cong G_3 \overset{?}{\Rightarrow} G_1 \cong G_3$.

$\quad f : G_1 \to G_2\,,\ g : G_2 \to G_3$

Гомоморфизмы

Определение

Две группы G_1 и G_2 называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : G_1 \to G_2$.

Обозначение: $G_1 \cong G_2$.

Это отношение эквивалентности в классе всех групп.

Рефлексивность: $G \overset{?}{\cong} G$.

$f : G \to G, \forall x \in G \ f(x) = x$.

Симметричность: $G_1 \cong G_2 \overset{?}{\Rightarrow} G_2 \cong G_1$.

$f : G_1 \to G_2$, $f^{-1} : G_2 \to G_1$.

Транзитивность: $G_1 \cong G_2, G_2 \cong G_3 \overset{?}{\Rightarrow} G_1 \cong G_3$.

$f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$, $gf : G_1 \to G_3$.

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$.

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$.

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$A, B \in M_n$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB)$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\ \psi \in \mathbb{S}_n$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\ \psi \in \mathbb{S}_n,\ f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi)$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\ \psi \in \mathbb{S}_n\,,\ f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi)$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\, B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\, \psi \in \mathbb{S}_n\,,\ f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi) = f(\varphi)f(\psi).$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$.

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$A, B \in M_n$, $f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B)$.

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$\varphi, \psi \in \mathbb{S}_n$, $f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi) = f(\varphi)f(\psi)$.

4) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{U}_n$, $f(k) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$.

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$A, B \in M_n$, $f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B)$.

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$\varphi, \psi \in \mathbb{S}_n$, $f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi) = f(\varphi)f(\psi)$.

4) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{U}_n$, $f(k) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$k, l \in \mathbb{Z}_n$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\ \psi \in \mathbb{S}_n\ ,\ f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi) = f(\varphi)f(\psi).$$

4) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{U}_n$, $f(k) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$k,\ l \in \mathbb{Z}_n \quad f(k \oplus l) = \cos\frac{2\pi(k \oplus l)}{n} + i\sin\frac{2\pi(k \oplus l)}{n}$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$x,\ y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$A,\ B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$\varphi,\ \psi \in \mathbb{S}_n\ ,\ f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi) = f(\varphi)f(\psi).$

4) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{U}_n$, $f(k) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$k,\ l \in \mathbb{Z}_n \quad f(k \oplus l) = \cos\frac{2\pi(k\oplus l)}{n} + i\sin\frac{2\pi(k\oplus l)}{n} =$

$= \cos\frac{2\pi(k+l)}{n} + i\sin\frac{2\pi(k+l)}{n}$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

$$x,\, y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=e^{x+y}=e^xe^y=f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n>1$ с вещественными элементами, $f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$, $A\mapsto\det A$.

$$A,\, B\in M_n,\ f(AB)=\det(AB)=\det(A)\det(B)=f(A)f(B).$$

3) $n\geqslant 2$, $f:\mathbb{S}_n\to\mathbb{U}_2$, $f(\varphi)=\varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\, \psi\in\mathbb{S}_n\,,\ f(\varphi\psi)=\varepsilon(\varphi\psi)=\varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi)=f(\varphi)f(\psi).$$

4) $n\geqslant 2$, $f:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{U}_n$, $f(k)=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0\leqslant k\leqslant n-1$.

$$k,\, l\in\mathbb{Z}_n\quad f(k\oplus l)=\cos\tfrac{2\pi(k\oplus l)}{n}+i\sin\tfrac{2\pi(k\oplus l)}{n}=$$
$$=\cos\tfrac{2\pi(k+l)}{n}+i\sin\tfrac{2\pi(k+l)}{n}=$$
$$=(\cos\tfrac{2\pi k}{n}+i\sin\tfrac{2\pi k}{n})(\cos\tfrac{2\pi l}{n}+i\sin\tfrac{2\pi l}{n})$$

Гомоморфизмы

Примеры гомоморфизмов и изоморфизмов.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$x,\, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y).$$

2) $M_n(\mathbb{R})$ — множество всех обратимых квадратных матриц порядка $n > 1$ с вещественными элементами, $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, $A \mapsto \det A$.

$$A,\, B \in M_n,\ f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A)f(B).$$

3) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{U}_2$, $f(\varphi) = \varepsilon(\varphi)$.

$$\varphi,\, \psi \in \mathbb{S}_n\,,\ f(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi\psi) = \varepsilon(\varphi)\varepsilon(\psi) = f(\varphi)f(\psi).$$

4) $n \geqslant 2$, $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{U}_n$, $f(k) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$k,\, l \in \mathbb{Z}_n \quad f(k \oplus l) = \cos\tfrac{2\pi(k\oplus l)}{n} + i\sin\tfrac{2\pi(k\oplus l)}{n} =$$

$$= \cos\tfrac{2\pi(k+l)}{n} + i\sin\tfrac{2\pi(k+l)}{n} =$$

$$= (\cos\tfrac{2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{2\pi k}{n})(\cos\tfrac{2\pi l}{n} + i\sin\tfrac{2\pi l}{n}) = f(k)f(l).$$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
x, $y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy)$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l)$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l})$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
$x, y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n})$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n}) = \varepsilon^{(k+l) \bmod n}$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n}) = \varepsilon^{(k+l) \bmod n} = \varepsilon^{k+l}$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n}) = \varepsilon^{(k+l) \bmod n} = \varepsilon^{k+l} =$
$= \varepsilon^k \varepsilon^l$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
$x, y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n}) = \varepsilon^{(k+l) \bmod n} = \varepsilon^{k+l} =$
$= \varepsilon^k \varepsilon^l = f(x)f(y)$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.
$x, y \in G$, $x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n}) = \varepsilon^{(k+l) \bmod n} = \varepsilon^{k+l} =$
$= \varepsilon^k \varepsilon^l = f(x)f(y)$. $\square$

Изоморфизмы

Теорема

Конечная циклическая группа G порядка n изоморфна группе $\mathbb{U}_n$.

a — образующий элемент группы G ,
$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, $a^n = e$,
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$,
$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$, $\varepsilon^n = 1$,
$f : G \to \mathbb{U}_n$, $f(a^k) = \varepsilon^k$, $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$.
$x,\ y \in G$, $\quad x = a^k$, $y = a^l$, $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$.
$f(xy) = f(a^k a^l) = f(a^{k+l}) = f(a^{(k+l) \bmod n}) = \varepsilon^{(k+l) \bmod n} = \varepsilon^{k+l} =$
$= \varepsilon^k \varepsilon^l = f(x)f(y)$. $\square$

Следствие

Любые две конечные циклические группы одинаковых порядков изоморфны.

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}.$
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l)$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}.$
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l}$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}.$
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f,\ k \in \ker f$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f,\ k \in \ker f,\ f(k) = e$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f,\ k \in \ker f,\ f(k) = e,\ a^k = e$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = a^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
$k, \, l \in \mathbb{Z}\,, \; f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f, \; k \in \ker f, \; f(k) = e, \; a^k = e, \; k = 0$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f,\ k \in \ker f,\ f(k) = e,\ a^k = e,\ k = 0,\ \ker f = \{0\}$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}$.
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\operatorname{im} f = G$.
$\ker f,\ k \in \ker f,\ f(k) = e,\ a^k = e,\ k = 0,\ \ker f = \{0\}\,.$ $\square$

Изоморфизмы

Теорема

Бесконечная циклическая группа G изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

a — образующий элемент группы G.
$f : \mathbb{Z} \to G,\ f(k) = a^k,\ k \in \mathbb{Z}.$
$k,\ l \in \mathbb{Z}\,,\ f(k+l) = a^{k+l} = a^k a^l = f(k)f(l)\,.$
$\mathrm{im}\, f = G.$
$\ker f,\ k \in \ker f,\ f(k) = e,\ a^k = e,\ k = 0,\ \ker f = \{0\}\,.$ $\square$

Следствие

Любые две бесконечные циклические группы являются изоморфными.

Изоморфизмы

Следствие

Пусть G — бесконечная циклическая группа с образующим элементом a.

Изоморфизмы

Следствие

Пусть G — бесконечная циклическая группа с образующим элементом a.
Тогда подгруппы $\langle a^k \rangle$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ попарно различны и ими исчерпываются все подгруппы группы G.

Изоморфизмы

Следствие

Пусть G — бесконечная циклическая группа с образующим элементом a.
Тогда подгруппы $\langle a^k \rangle$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ попарно различны и ими исчерпываются все подгруппы группы G.
В группе G образующим является и элемент a^{-1}, других образующих элементов нет.

$A, B \subset G, A, B \neq \varnothing$

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$
$AB \overset{\text{def}}{=} \{ab:\ a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$
$AB \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ab :\ a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$
$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB$

Группы

Смежные классы

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$

$AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab : a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$

$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB,\ B = \{b\},\ AB \Rightarrow Ab$

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$
$AB \overset{\text{def}}{=} \{ab :\ a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$
$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB,\ B = \{b\},\ AB \Rightarrow Ab,$
Аддитивная запись: $A + B$, $-A$, $a + B$.

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$
$AB \overset{\text{def}}{=} \{ab :\ a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$
$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB,\ B = \{b\},\ AB \Rightarrow Ab,$
Аддитивная запись: $A + B,\ -A,\ a + B.$
Переформулировки критериев.

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$

$AB \overset{\text{def}}{=} \{ab:\ a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$

$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB,\ B = \{b\},\ AB \Rightarrow Ab,$

Аддитивная запись: $A + B$, $-A$, $a + B$.

Переформулировки критериев.

Теорема

Непустое множество $H \subset G$ является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $HH \subset H$ и $H^{-1} \subset H$.

$A, B \subset G,\ A, B \neq \varnothing,$
$AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab : a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$
$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB,\ B = \{b\},\ AB \Rightarrow Ab,$
Аддитивная запись: $A + B$, $-A$, $a + B$.
Переформулировки критериев.

Теорема

Непустое множество $H \subset G$ является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $HH \subset H$ и $H^{-1} \subset H$.

Теорема

Непустое конечное множество $H \subset G$ является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $HH \subset H$.

$A,\ B \subset G,\ A,\ B \neq \varnothing,$
$AB \stackrel{\text{def}}{=} \{ab :\ a \in A, b \in B\}, \quad A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\},$
$A = \{a\},\ AB \Rightarrow aB,\ B = \{b\},\ AB \Rightarrow Ab,$
Аддитивная запись: $A + B,\ -A,\ a + B.$
Переформулировки критериев.

Теорема

Непустое множество $H \subset G$ является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $HH \subset H$ и $H^{-1} \subset H$.

Теорема

Непустое конечное множество $H \subset G$ является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $HH \subset H$.

Теорема

Непустое множество H элементов группы G является подгруппой этой группы тогда и только тогда, когда $HH^{-1} \subset H$.

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

- $(AB)C = A(BC)$;

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

- $(AB)C = A(BC)$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall C \subset G \; CA \subset CB$, $AC \subset BC$;

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

- $(AB)C = A(BC)$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall C \subset G\ CA \subset CB,\ AC \subset BC$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall x \in G\ xA \subset xB,\ Ax \subset Bx$;

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

- $(AB)C = A(BC)$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall C \subset G \; CA \subset CB$, $AC \subset BC$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall x \in G \; xA \subset xB$, $Ax \subset Bx$;
- $f : G_1 \to G_2$, $A,B \subset G_1 \Rightarrow f(AB) = f(A)f(B)$;

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

- $(AB)C = A(BC)$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall C \subset G\ CA \subset CB$, $AC \subset BC$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall x \in G\ xA \subset xB$, $Ax \subset Bx$;
- $f : G_1 \to G_2$, $A, B \subset G_1 \Rightarrow f(AB) = f(A)f(B)$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;

Замечание

Для любой подгруппы H группы G имеют место равенства $HH = H$, $H^{-1} = H$, $HH^{-1} = H$.

Свойства операций с подмножествами.

- $(AB)C = A(BC)$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall C \subset G \; CA \subset CB$, $AC \subset BC$;
- $A \subset B \Rightarrow \forall x \in G \; xA \subset xB$, $Ax \subset Bx$;
- $f : G_1 \to G_2$, $A,B \subset G_1 \Rightarrow f(AB) = f(A)f(B)$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$H \subset G$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b$

Группы

Смежные классы

$$H \subset G,\ a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh$$

$$H \subset G,\ a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \iff \exists h \in H,\ a = bh \iff b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

Рефлексивность

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H$, $a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$:

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H$, $a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

<u>Симметричность</u>

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
<u>Транзитивность</u> $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:

$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;

<u>Транзитивность</u> $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:

$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a,\, b \in xH$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
<u>Транзитивность</u> $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH$,

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH, \quad a = xh_1,\ b = xh_2,\ h_1,\ h_2 \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:

$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;

<u>Транзитивность</u> $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:

$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH, \quad a = xh_1,\, b = xh_2,\, h_1,\, h_2 \in H,$

$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:

$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;

Транзитивность $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:

$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH, \quad a = xh_1,\, b = xh_2,\, h_1,\, h_2 \in H,$

$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
<u>Транзитивность</u> $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a,\ b \in xH, \quad a = xh_1,\ b = xh_2,\ h_1,\ h_2 \in H,$
$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a,\ b \in xH, \quad a = xh_1,\ b = xh_2,\ h_1,\ h_2 \in H,$
$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H,\ a \sim b.$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH$, $\quad a = xh_1,\, b = xh_2,\, h_1, h_2 \in H$,
$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H,\, a \sim b$.
$a \sim b$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

<u>Рефлексивность</u> $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

<u>Симметричность</u> $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:

$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;

<u>Транзитивность</u> $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:

$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH, \quad a = xh_1,\, b = xh_2,\, h_1,\, h_2 \in H,$

$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H,\, a \sim b.$

$a \sim b,\, a = bh,\, h \in H$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH$, $\quad a = xh_1$, $b = xh_2$, $h_1, h_2 \in H$,
$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H$, $a \sim b$.
$a \sim b$, $a = bh$, $h \in H$, $a \in bH$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.

Это отношение эквивалентности.

Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;

Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:

$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;

Транзитивность $a \sim b,\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$:

$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH$, $\quad a = xh_1$, $b = xh_2$, h_1, $h_2 \in H$,

$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H$, $a \sim b$.

$a \sim b$, $a = bh$, $h \in H$, $a \in bH$, $b = be$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \;\Leftrightarrow \exists h \in H,\, a = bh \;\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a, b \in xH, \quad a = xh_1,\, b = xh_2,\, h_1, h_2 \in H,$
$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H,\, a \sim b.$
$a \sim b,\, a = bh,\, h \in H,\, a \in bH,\, b = be,\, b \in bH$

$H \subset G$, $a \overset{H}{\sim} b \ \Leftrightarrow \exists h \in H,\ a = bh \ \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$.
Это отношение эквивалентности.
Рефлексивность $a \sim a$: $\quad a^{-1}a \in H$;
Симметричность $a \sim b \Rightarrow b \sim a$:
$b^{-1}a \in H$, $(b^{-1}a)^{-1} \in H$, $a^{-1}b \in H$, $b \sim a$;
Транзитивность $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$:
$b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, $(c^{-1}b)(b^{-1}a) \in H$, $c^{-1}a \in H$, $a \sim c$.

Теорема

Классы эквивалентности по рассматриваемому отношению совпадают с множествами вида xH, $x \in G$.

$a,\ b \in xH, \quad a = xh_1,\ b = xh_2,\ h_1,\ h_2 \in H,$
$b^{-1}a = (xh_2)^{-1}xh_1 = h_2^{-1}x^{-1}xh_1 = h_2^{-1}h_1 \in H,\ a \sim b.$
$a \sim b,\ a = bh,\ h \in H,\ a \in bH,\ b = be,\ b \in bH.$ $\square$

Определение

Классы эквивалентности xH, $x \in G$ называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H.

Определение

Классы эквивалентности xH, $x \in G$ называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H.
Представление группы G в виде объединения ее попарно не пересекающихся левых смежных классов называется левосторонним разложением группы G по подгруппе H.

Определение

Классы эквивалентности xH, $x \in G$ называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H.
Представление группы G в виде объединения ее попарно не пересекающихся левых смежных классов называется левосторонним разложением группы G по подгруппе H.

Замечание

$H = eH$ — сама подгруппа H является левым смежным классом.

Определение

Классы эквивалентности xH, $x \in G$ называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H.
Представление группы G в виде объединения ее попарно не пересекающихся левых смежных классов называется левосторонним разложением группы G по подгруппе H.

Замечание

$H = eH$ — сама подгруппа H является левым смежным классом.

- каждый элемент группы принадлежит одному и только одному левому смежному классу;

Определение

Классы эквивалентности xH, $x \in G$ называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H.
Представление группы G в виде объединения ее попарно не пересекающихся левых смежных классов называется левосторонним разложением группы G по подгруппе H.

Замечание

$H = eH$ — сама подгруппа H является левым смежным классом.

- каждый элемент группы принадлежит одному и только одному левому смежному классу;
- любые два левых смежных класса или не пересекаются, или совпадают.

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.

Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левостороннем разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
a, $b \in G$

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
a, $b \in G$, $a \sim b$

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левостороннем разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
$a, b \in G$, $a \sim b \Leftrightarrow a = hb$, $h \in H$

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов a, $b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
$a,\ b \in G\ ,\ a \sim b\ \Leftrightarrow a = hb,\ h \in H\ \ \Leftrightarrow ab^{-1} \in H.$

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов $a, b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
$a, b \in G$, $a \sim b \ \Leftrightarrow a = hb,\ h \in H \ \ \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
Классы эквивалентности Hx, $x \in G$

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов $a, b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
$a, b \in G$, $a \sim b \Leftrightarrow a = hb, h \in H \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
Классы эквивалентности Hx, $x \in G$,
называются правыми смежными классами.

Замечание

В группе G с аддитивной записью операции смежные классы по подгруппе H имеют вид $x + H$, $x \in G$.
Для элементов $a, b \in G$ равенство $a + H = b + H$ имеет место в том и только том случае, когда $a - b \in H$.

Замечание

Подгруппа $H = eH$ является единственной подгруппой среди всех левых смежных классов в левосторонним разложении группы G по этой подгруппе.

Второе отношение эквивалентности:
$a, b \in G$, $a \sim b \ \Leftrightarrow a = hb,\ h \in H \ \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.
Классы эквивалентности Hx, $x \in G$,
называются правыми смежными классами.
Множество $H = He$ является правым смежным классом.