1 Вынужденные колебания

1.1 Условия излучения

Для конечных областей краевых условий достаточно для построения единственного решения в нерезонансном случае. Существует счётный набор ω_n — резонансных частот (частот, на которых существует нетривиальное решение однородной краевой задачи)

1.1.1 Бесконечные области

Пример

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(r)$$

в пространстве.

Решениями уравнения являются функции

$$u_1 = \frac{e^{ikr}}{4\pi r},\ u_2 = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.$$

Условие ограниченности решения в бесконечно удалённой точке не определяет единственное.

1. Условия излучения Зоммерфельда

   Если мы расматриваем установившиеся колебания упругой области, содержащей бесконечно удалённую точку, необходимо выбрать то решение, которое соответствут волнам, уходящим на бесконечность

   В случае трёхмерной задачи условие имеет вид:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) r = 0$$

В случае двумерной задачи:

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \sqrt{r} = 0$$

Пример Рассмотрим функцию

$$u_1 = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r}.$$

Рассмотрим уравнение фронта распространяющейся волны

$$kr - \omega t = 0$$

Дифференцируем по времени:

$$k\dot{r} - \omega = 0,$$

следовательно

$$\dot{r} = \frac{\omega}{k} > 0,$$

скорость волны положительна и волна идёт на бесконечность.

Для решения

$$u_2 = \frac{e^{i(-kr - \omega t)}}{4\pi r}.$$

получаем

$$\dot{r} = -\frac{\omega}{k} > 0,$$

и волна идёт из бесконечности. Согласно принципу Зоммерфельда выбираем u_1.

2. Принцип предельного поглощения

Для построения единственного решения задачи об установившихся колебаниях упругой области, содержащей бесконечно удалённую точку, необходимо нагрузить уравнения движения слагаемыми, содержащими вязкое внутреннее трение

- Добавляем в уравнение

$$Lu = \rho\ddot{u},$$

  слагаемые, характеризующие вязкое трение (L — дифференциальный оператор). Уравнение принимает вид

$$Lu = \rho\ddot{u} + \varepsilon\dot{u},\ \varepsilon > 0.$$

  В случае установившихся колебаний ω заменяется на $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$

- Выбираем решение, ограниченное в бесконечно удалённой точке;
- Осуществляем равномерный предельный переход при $\varepsilon \to 0$

$$u = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$$

Пример Рассматриваем решения уравнения Гельмгольца

$$u_{1\varepsilon} = \frac{e^{ik_\varepsilon r}}{4\pi r} = \frac{e^{ikr-\varepsilon r}}{4\pi r}$$

$$u_{2\varepsilon} = \frac{e^{-ik_\varepsilon r}}{4\pi r} = \frac{e^{-ikr+\varepsilon r}}{4\pi r}$$

Очевидно, что

$$\lim_{r\to\infty} u_{1\varepsilon} = 0,\ \lim_{r\to\infty} u_{2\varepsilon} = \infty.$$

Выбираем u_1.

3. Принцип предельной амплитуды (Тихонова-Самарского)

Для того, чтобы построить решение уравнений теории упругости в случае установившихся колебаний в области, содержащей бесконечно удалённую точку, нужно построить решение задачи Коши с произвольными начальными условиями, устремить время к бесконечности и выделить в решении часть, соответствующую установившимся колебаниям.

4. Энергетический принцип (Мандельштама) Необходимо выбирать те решения, которые перемосят энергию на бесконечность

1.2 Плоская задача Лэмба

Рассмотрим полуплоскость $x_2 < 0$. Полуплоскость находится в состоянии плоской деформации

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_2 = u_2(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_3 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = 0,\ \sigma_{22}|_{x_2=0} = p(x_1)e^{-i\omega x_1} \tag{2}$$

Для отыскания решения используем представление Ляме:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \tag{3}$$

где волновые потенциалы φ и ψ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + k_1^2\varphi = 0, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} + k_2^2\psi = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu},\ k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Для решения задачи используем преобразование Фурье:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \\ \tilde{\psi}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (4) после применения преобразования Фурье принимают вид:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'' - \left(\alpha^2 - k_1^2\right) \varphi = 0, \\ \tilde{\psi}'' - \left(\alpha^2 - k_2^2\right) \psi = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Общее решение (6), ограниченное в бесконечно удалённой точке, имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = A e^{\gamma_1 x_2}, \\ \tilde{\psi} = B e^{\gamma_2 x_2}. \end{cases} \tag{7}$$

где $\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 - k_i^2}$.

Найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -i\alpha\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}' = -i\alpha A e^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 B e^{\gamma_2 x_2}, \\ \tilde{u}_2 = \tilde{\varphi}' + i\alpha\tilde{\psi} = \gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} + i\alpha B e^{\gamma_2 x_2}, \end{cases} \tag{8}$$

Найдём трансформанты напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu \left(\tilde{u}_1' - i\alpha u_2\right) = \mu \left(-i\alpha\gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2^2 B e^{\gamma_2 x_2} - i\alpha\gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} + \alpha^2 B e^{\gamma_2 x_2}\right) \tag{9}$$

или

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu \left[-2i\alpha\gamma_1 A e^{\gamma_1 x_2} + \left(2\alpha^2 - k_2^2\right) B e^{\gamma_2 x_2}\right] \tag{10}$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = \lambda \left(-i\alpha\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2'\right) + 2\mu\tilde{u}_2' = -i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}_2' \tag{11}$$

Подставляем (7) в (11):

$$\tilde{\sigma}_{22} = -i\alpha\lambda\left(-i\alpha A e^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 B e^{\gamma_2 x_2}\right) + (\lambda + 2\mu)\left(\gamma_1^2 A e^{\gamma_1 x_2} + i\alpha\gamma_2 B e^{\gamma_2 x_2}\right) \tag{12}$$

Рассмотрим

$$-\alpha^2\lambda + (\lambda+2\mu)\gamma_1^2 = -\alpha^2\lambda + (\lambda+2\mu)\left(\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}\right) = \mu\left(2\alpha^2 - k_2^2\right)$$

Формула (12) принимает вид:

$$\tilde{\sigma}_{22} = \mu\left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) A e^{\gamma_1 x_2} + 2i\alpha B e^{\gamma_2 x_2}\right] \tag{13}$$

Подставляем (10) и (13) в граничные условия (2):

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{12}\big|_{x_2=0} = \mu\left[-2i\alpha\gamma_1 A + \left(2\alpha^2 - k_2^2\right) B\right] = 0, \\ \tilde{\sigma}_{22}\big|_{x_2=0} = \mu\left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) A + 2i\alpha B\right] = \tilde{p}(\alpha), \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\tilde{p}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1.$$

Решаем систему (14):

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu}\dfrac{2\alpha^2 - k_2^2}{\Delta(\alpha)}, \\ B = -\dfrac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu}\dfrac{2i\alpha\gamma_1}{\Delta(\alpha)} \end{cases} \tag{15}$$

$$\Delta(\alpha) = 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 - (2\alpha^2 - k_2^2)^2$$

Трансформанты перемещений теперь имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -\dfrac{i\alpha\tilde{p}(\alpha)}{\mu\Delta(\alpha)}\left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) e^{\gamma_1 x_2} + 2\gamma_1\gamma_2 e^{\gamma_2 x_2}\right], \\ \tilde{u}_2 = -\dfrac{\gamma_1\tilde{p}(\alpha)}{\mu\Delta(\alpha)}\left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) e^{\gamma_1 x_2} + 2\alpha^2 e^{\gamma_2 x_2}\right], \end{cases} \tag{16}$$

Для того, чтобы решить задачу, достаточно найти обратную трансформанту Фурье:

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{i}{2\pi\mu} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\alpha \tilde{p}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) e^{\gamma_1 x_2} + 2\gamma_1\gamma_2 e^{\gamma_2 x_2} \right] e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \\ \tilde{u}_2 = -\dfrac{1}{2\pi\mu} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\gamma_1 \tilde{p}(\alpha)}{\mu\Delta(\alpha)} \left[\left(2\alpha^2 - k_2^2\right) e^{\gamma_1 x_2} + 2\alpha^2 e^{\gamma_2 x_2} \right] e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим знаменатель подынтегральных выражений в (17). Он сопадает с левой частью уравнения Релея и следовательно, имеет вещественный корень со значением

$$\alpha = k_R = \frac{\omega}{c_R},$$

где c_R — скорость волн Релея. $\alpha = k_R$ является однократным полюсом подынтегрального выражения. Другими особенностями подынтегрального выражения являются точки ветвления $\alpha = k_1$ и $\alpha = k_2$.

Из-за наличия в подынтегральном выражении полюса первого порядка интеграл в классическом смысле расходится и показано, что главное значение интеграла даёт нефизичный результат.

При добавлении в уравнение слагаемых, характеризующих вязкое трение, особенности смещаются (рисунок 1).

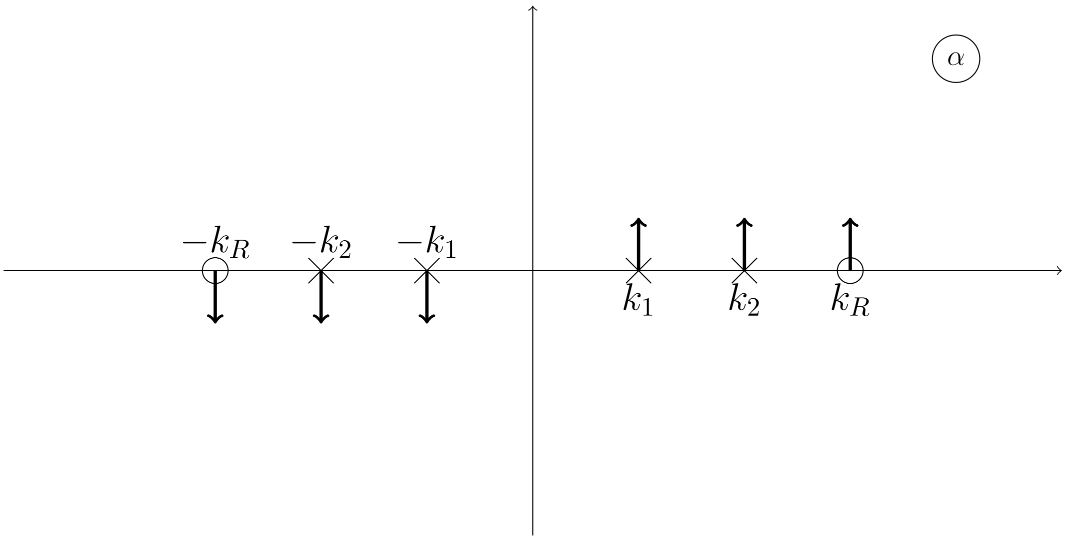

Рис. 1: Особенности подынтегральной функции

Следовательно, чтобы обеспечить равномерный предельный переход, следует интегрирование по вещественной оси заменить интегрированием по контуру σ, который совпадает с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей особых точек, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. при этом положительные вещественные особенности обходятся снизу, отрицательные — сверху.

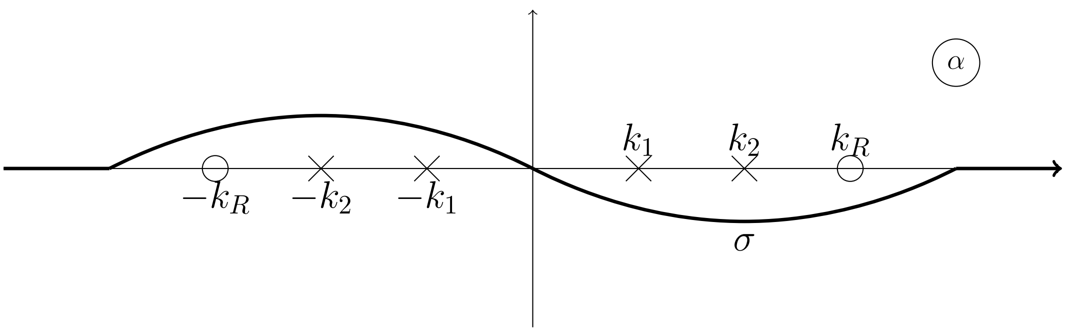

Рис. 2: Контур интегрирования

При расчёте волновых полей выделяют два случая.

1.2.1 Ближняя зона

В этом случае можно рассчитывать волновое поле непосредственно по формулам (17).

Разделим контур интегрирования на две части

$$\sigma = \sigma_+ \cup \sigma_-,$$

где

$$\sigma_+ = \sigma \cap \{\Re\alpha \geq 0\},$$

$$\sigma_- = \sigma \cap \{\Re\alpha \leq 0\},$$

Преобразуем интеграл:

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} F_i(\alpha, x_2)e^{-i\alpha x_1}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{\sigma_-} + \int\limits_{\sigma_+}\right] F_i(\alpha, x_2)e^{-i\alpha x_1}d\alpha$$

Заменим переменные в интеграле по σ_-:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_-} F_i(\alpha, x_2)e^{-i\alpha x_1}d\alpha = \|\alpha = -\alpha'\| = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_+} F_i(-\alpha', x_2)e^{i\alpha' x_1}d\alpha'$$

Выражение для перемещения принимает вид:

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_+} \left[F_i(\alpha, x_2)e^{-i\alpha x_1} - F_i(-\alpha, x_2)e^{i\alpha x_1}\right] d\alpha$$

Контур интегрирования строим в следующем виде:

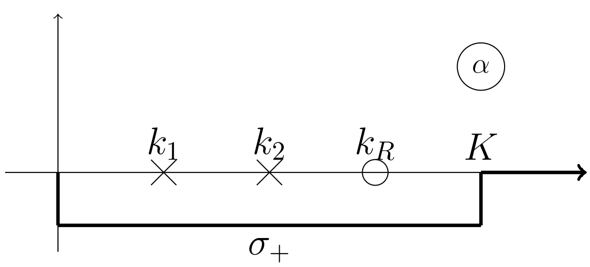

Рис. 3: Контур интегрирования, $K > k_R$

Контур σ_+ заменяется контуром $\sigma_K \cup [K, R]$, где σ_K — ломаная, состоящая из трёх отрезков, R — выбирается из погрешности, для интегрирования используются квадратурные формулы Гаусса.

1.2.2 Дальняя зона

На большом расстоянии от источника возмущений подынтегральное выражение начинает быстро осциллировать и квадратурные формулы интегрирования делаются неэффективными. Пусть $x_1 < 0$.

Проводим разрезы в комплексной плоскости и замыкаем контур интегрирования по окружности радиуса R, обходя разрезы.

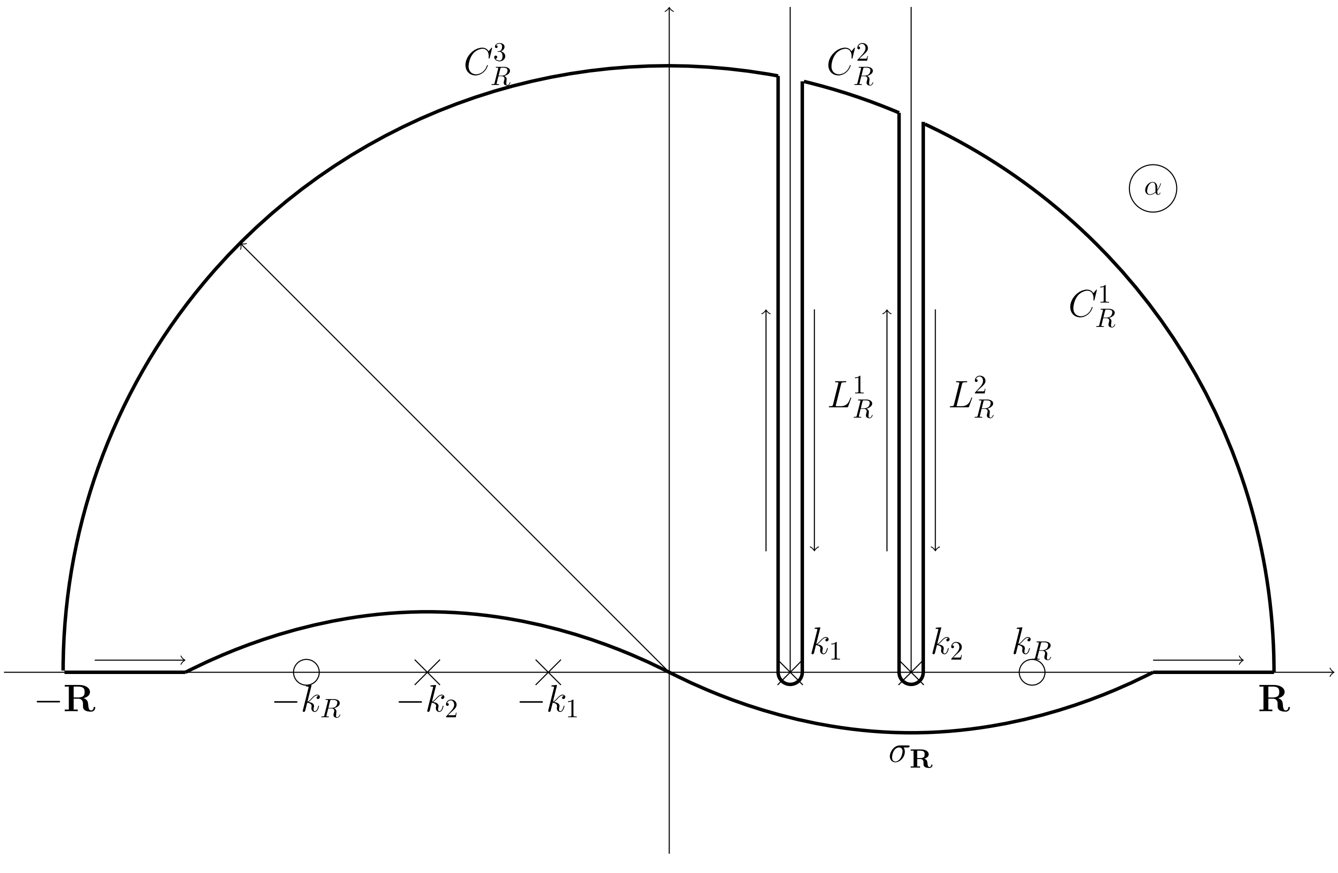

Рис. 4: Контур интегрирования

Используя теорию вычетов, получаем:

$$\left[\int\limits_{\sigma_R} + \int\limits_{C_R^1} + \int\limits_{L_R^1} + \int\limits_{C_R^2} + \int\limits_{L_R^2} + \int\limits_{C_R^2}\right] F(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = 2\pi i \operatorname*{res}_{\alpha=k_R} F(\alpha) e^{-ik_R x_1}$$

Устремляем радиус окружности к бесконечности, интегралы по дугам окружности стремятся к нулю и получаем:

$$\int\limits_{\sigma} F(\alpha)e^{-i\alpha x_1}d\alpha = 2\pi i \operatorname*{res}_{\alpha=k_R} F(\alpha)e^{-ik_R x_1} - \int\limits_{L^1} F(\alpha)e^{-i\alpha x_1}d\alpha - \int\limits_{L^2} F(\alpha)e^{-i\alpha x_1}d\alpha$$

Первое слагаемое в правой части равенства — бегущая волна со скоростью волн Релея. Интегралы по L^1 и L^2 — берутся численно, подынтегральные выражения экспоненциально убывают, удобно деформировать контуры интегрирования так, чтобы они проходили вдоль координатных осей.

1.2.3 Асимптотика интегралов

Рассмотрим интеграл вида

$$I(R) = \int\limits_{L} \Phi(\zeta)e^{Rq(\zeta)}d\zeta \tag{18}$$

Существуют две асимптотики:

1. Контур L охватывает точку ветвления ζ^* функции $\Phi(\zeta)$, которая является точкой ветвления и для $q(\zeta)$

$$I(R) = \pm\sqrt{\frac{2\pi}{R\,|q''(\zeta_0)|}}\Phi(\zeta_0)\exp\left\{Rq(\zeta_0) + \frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\left[\Im q''(\zeta_0)\right]\right\},$$

где ζ_0 — стационарная точка функции $q(\zeta)$, то есть $q'(\zeta_0) = 0$. Знак $\pm$ соответствует направлению обхода контура, в нашем случае выбираем знак «минус».

2. Контур L охватывает точку ветвления ζ^* функции $\Phi(\zeta)$, функция для $q(\zeta)$ — аналитическая в точке ζ^*

$$I(R) = \pm\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{R^3\,|q'(\zeta^*)|^3}}\left[(\zeta-\zeta^*)^{1/2}\,\Phi(\zeta)\right]\Big|_{\zeta=\zeta^*}\exp\left\{Rq(\zeta^*) - \frac{i\zeta}{2}\arg\left[-q'(\zeta^*)\right]\right\}$$

Каждое из выражений для u_1 содержит два слагаемых, для одного из них имеет место асимптотика по первому случаю, для другого — по второму. Найдём стационарную точку. Рассмотрим выражение

$$\exp\left(-i\alpha x_1 + \gamma_i x_2\right) = \exp\left[Rq(\alpha)\right],$$

где

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ q(\alpha) = -i\alpha\cos\theta + \gamma_i\sin\theta$$

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\theta, \\ x_2 = R\sin\theta, \end{cases}$$

Приравняем нулю производную q:

$$q'(\alpha) = -i\cos\theta + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_i^2}}\sin\theta,$$

следовательно

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_i^2}\sin^2\theta = -\cos^2\theta,$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_i^2}\sin^2\theta = -\cos^2\theta,$$

и

$$\alpha_0 = \pm k_i\cos\theta = \pm\frac{k_i x_1}{R}$$

Если перейти к полярным координатам, мы приходим к выражениям:

$$\begin{cases} u_R = u_1\cos\theta - u_2\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{R}}f_R(\theta)e^{ik_1R} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\right), \\ u_\theta = u_1\sin\theta + u_2\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{R}}f_\theta(\theta)e^{ik_2R} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\right) \end{cases}$$

В дальней зоне происходит разделение движений, радиальные смещения распространяются со скоростью c_1, окружные — со скоростью c_2. f_R, f_θ — диаграммы направленности. Таким образом, волновое поле состоит из одной бегущей релеевской волны и двух сферических волн, амплитуда которых убывает обратно пропорционально корню расстояния от источника возмущений, одна из них имеет скорость продольной волны, другая имеет скорость поперечной волны.

2 Вынужденные антиплоские колебания слоя

Рассмотрим упругий слой, занимающий область

$$\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -H \le x_2 \le H\}$$

Предположим, что волновое поле имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{19}$$

Уравнение колебаний имеет вид:

$$u_{,11} + u_{,22} + k_2^2 u = 0, \tag{20}$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} = \frac{\omega^2}{c_2^2}.$$

Граничные условия следующие:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=\pm H} = \pm p(x_1), \tag{21}$$

где $p(x_1)$ — финитная функция, то есть $p(x_1) = 0$, если $x_1 \notin (-a, a)$.

Для решения задачи используем преобразование по переменной x_1:

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2)e^{i\alpha x_1}dx_1 \tag{22}$$

Уравнение колебаний имеет вид:

$$-\alpha^2\tilde{u} + \tilde{u}'' + k_2^2\tilde{u} = 0, \tag{23}$$

или

$$\tilde{u}'' - \left(\alpha^2 - k_2^2\right)\tilde{u} = 0, \tag{24}$$

Граничные условия приобрели вид:

$$\mu\tilde{u}'|_{x_2=\pm H} = \pm p(x_1), \tag{25}$$

Общее решение имеет вид:

$$\tilde{u} = A\text{ch}\gamma x_2 + B\text{sh}\gamma x_2, \tag{26}$$

Подставляем (26) в граничные условия (21):

$$\begin{cases} \mu\gamma\left(A\text{sh}\gamma H + B\text{ch}\gamma H\right) = \tilde{p}(\alpha), \\ \mu\gamma\left(-A\text{sh}\gamma H + B\text{ch}\gamma H\right) = -\tilde{p}(\alpha) \end{cases} \tag{27}$$

Решаем систему (27), находим

$$\begin{cases} A = \dfrac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu\gamma}\dfrac{1}{\text{sh}\gamma H} = \dfrac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\dfrac{1}{\text{sh}\gamma H}, \\ B = 0, \end{cases} \tag{28}$$

где

$$p_0(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{\mu}.$$

Подставляем в общее решение:

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\text{ch}\gamma x_2}{\text{sh}\gamma H}, \tag{29}$$

Обращаем преобразование Фурье:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \tag{30}$$

Воспользуемся выражением (22):

$$u = \frac{1}{2\pi\mu} \int\limits_{-a}^{a} p(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H} e^{-i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha, \tag{31}$$

Функцию

$$K(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H} e^{-i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha$$

Называют функцией Грина краевой задачи. Она позволяет построить решение для любой функции нагрузки.

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения (30). Они определяются уравнением:

$$\gamma \mathrm{sh}\gamma H = 0. \tag{32}$$

Воспользуемся связью между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$i \sin(i\gamma H) = 0$$

следовательно

$$i\gamma H = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Раскроем γ:

$$\sqrt{\alpha^2 - k_2^2} H = -i\pi n,$$

Возведём в квадрат:

$$\alpha^2 - k_2^2 = -\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2,$$

Получаем набор корней:

$$\alpha_n = \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2} \tag{33}$$

Таким образом, уравнение (32) имеет счётное множество корней, конечное число которых — чисто мнимое. Все особенности являются полюсами первого порядка подынтегральной функции.

Воспользуемся принципом предельного поглощения и добавим в уравнение (20) слагаемые, характеризующие вязкое трение. При этом k_2^2 заменяется на $k_{2\varepsilon}^2 = k_2^2 + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. при этом из уравнения (33) видно, что положительные вещественные особенности смещаются в верхнюю полуплоскость, отрицательные — в нижнюю. Для того, чтобы обеспечить равномерный предельный переход при $\varepsilon \to 0$, следует заменить интеграл по вещественной оси на интегрирование по контуру σ, который совпадает с вещественной осью всюду за исключением окрестностей особых точек, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. Положительные особенности огибаются в нижней полуплоскости. отрицательные — в верхней.

Предположим, что $x_1 < -a$. Воспользуемся теоремой Жордана и замкнём контур интегрирования в верхней полуплоскости. И интеграл выражается через сумму вычетов. Выражение для волнового поля имеет вид:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H}e^{-i\alpha x_1}d\alpha = \frac{1}{2\pi}2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{\alpha=\alpha_n}\left[\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\gamma H}e^{-i\alpha x_1}\right] \tag{34}$$

Найдем вычеты. Особенности являются полюсами первого порядка и вычеты вычисляются по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}$$

Выражение для вычета приобретает вид:

$$\operatorname*{res}_{\alpha=\alpha_n}\left[\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma}\frac{\mathrm{ch}\gamma x_2}{\mathrm{sh}\,\gamma H}e^{-i\alpha x_1}\right] = \tilde{p}_0(\alpha_n)\frac{\tilde{\mathrm{ch}}\gamma_n x_2}{\left(\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma H\right)'_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_n}}e^{-i\alpha_n x_1},$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k_2^2} = \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 - k_2^2} = i\frac{\pi n}{H}$$

Найдём производную знаменателя подынтегрального выражения:

$$(\gamma \operatorname{sh} \gamma H)'_\alpha = \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma H + \alpha H \operatorname{ch} \gamma H \tag{35}$$

Подставим в выражение (35) $\alpha = \alpha_n$:

$$(\gamma \operatorname{sh} \gamma H)'_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma_n H + \alpha_n H \operatorname{ch} \gamma_n H \tag{36}$$

Рассмотрим выражения

$$\operatorname{sh} \gamma_n H = \operatorname{sh}\left(\frac{i\pi n}{H} H\right) = i \sin \pi n = 0$$

$$\operatorname{ch} \gamma_n H = \operatorname{ch}(i\pi n) = \cos \pi n = (-1)^n$$

Следовательно

$$(\gamma \operatorname{sh} \gamma H)'_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_n} = \alpha_n H (-1)^n \tag{37}$$

и

$$\operatorname*{res}_{\alpha=\alpha_n}\left[\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\gamma} \frac{\operatorname{ch}\gamma x_2}{\operatorname{sh}\gamma H} e^{-i\alpha x_1}\right] = \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{\cos\left(\pi n \frac{x_2}{H}\right)}{\alpha_n H (-1)^n} e^{-i\alpha_n x_1} = \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{(-1)^n}{\alpha_n H} \cos\left(\pi n \frac{x_2}{H}\right) e^{-i\alpha_n x_1},$$

Окончательно

$$u = i \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_0(\alpha_n) \frac{(-1)^n}{\alpha_n H} \cos\left(\pi n \frac{x_2}{H}\right) e^{-i\alpha_n x_1} \tag{38}$$

Дисперсионное уравнение имеет конечное число (N) вещественных корней и бесконечное множество чисто мнимых. Следовательно, волновое поле состоит из суперпозиции N бегущих волн и бесконечного множества экспоненциально затухающих волн.