Лабораторная работа 11. Аналитическое и численное дифференцирование и интегрирование

Задание символьных переменных

Для работы с символьными вычислениями (как в Maple) требуется, чтобы был установлен модуль Symbolic Math Toolbox.

Примеры

```
syms x % задаем символьную переменную x
syms x z % задаем несколько переменных
f(x,z) = x/(1+z^2);% символьная ф-я
```

Символьное дифференцирование и интегрирование

1) Символьное дифференцирование

Df = diff(f) – символьное дифференцирование относительное символьной переменной, определенной командой symvar(f,1)

Df = diff(f,var) – – символьное дифференцирование относительное символьной переменной var

Вычисление n-й производной

Df = diff(f,n) – символьное дифференцирование относительное символьной переменной, определенной командой symvar(f,1)

Df = diff(f,var,n) – – символьное дифференцирование относительное символьной переменной var

Примеры

```
syms x z % задаем несколько переменных
f(x,z) = x/(1+z^2);% символьная ф-я
Dfx =diff(f,x) % дифференцирование по x
Dfz =diff(f,z) % дифференцирование по z

syms f(x) % задаем символьную ф-ю сразу
f(x) = sin(x^2);
Df = diff(f,x)

syms x t
Df = diff(sin(x*t^2))
```

2) Символьное интегрирование

F = int(expr) – неопределенный интеграл

F = int(expr,var) – неопределенный интеграл относительно символьной переменной var

F = int(expr,a,b) или **F = int(expr,[a b])** - определенный интеграл

F = int(expr,var,a,b) – определенный интеграл относительно символьной переменной var

Примеры

```
syms x z % задаем несколько переменных
f(x,z) = x/(1+z^2);% символьная ф-я
```

```
Fx = int(f,x) % интегрирование по x
Fz = int(f,x) % интегрирование по z
%вычисление определенного интеграла
syms x
expr = x*log(1+x);
F = int(expr,[0 1])
```

Численное дифференцирование

`Y = diff(X)` – вычисляет разности между соседними элементами вектора X. Если X – вектор длины m, то diff(X) – вектор длины m-1:

```
Y = [X(2)-X(1) X(3)-X(2) ... X(m)-X(m-1)]
```

`Y = diff(X,n)` – n-я разность (применение команды **diff** n раз), т.е. `diff(X,2)=diff(diff(X))`.

Использование команды diff для вычисления приближенных значений производной функции (численного дифференцирования): необходимо вычислить вектор значений, содержащих отношения приращений функции к приращению аргумента.

Примеры

```
h = 0.001;         % шаг
X = -pi:h:pi;      % вектор значений независимой переменной
f = sin(X);        % вектор значений функции
Y = diff(f)/h;     % первая производная (приращение ф-и к приращению аргумента)
Z = diff(Y)/h;     % вторая производная
%График функции, ее первой и второй производных в одних осях
plot(X,f,'b',X(1:length(Y)),Y,'r', X(1:length(Z)),Z,'k')
legend('function','first derivative','second derivative')

length(X) % Длина вектора X: 6284 элемента
length(Y) % 6283 элемента
length(Z) % 6282 элемента
```

Длины векторов X, Y, Z – разные, поэтому для построения графиков векторы абсцисс и ординат надо согласовать.

Численное интегрирование

1) Численное интегрирование по формуле трапеций: **trapz**

`Q = trapz(Y)`

`Q = trapz(X,Y)`

trapz(Y) вычисляет приближенное значение интеграла от вектора Y по методу трапеций с шагом, равным 1.

trapz(X,Y) вычисляет приближенное значение интеграла от вектора Y относительно координат вектора X (шаг задается в векторе X)

Пример 1.

```
%Пример 1
X = 0:pi/100:pi;
Y = sin(X);
Q = trapz(X,Y)
```

Пример 2. Вычисление двойного интеграла

$$I = \int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3}(x^2 + y^2)dx\,dy$$

```
%Пример 2
x = -3:.1:3;
y = -5:.1:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
F = X.^2 + Y.^2;%матрица
I = trapz(y,trapz(x,F,2))%интегрирование по строкам в F
```

2) Численное интегрирование по формуле Симпсона: **quad**

```
q = quad(fun,a,b)
q = quad(fun,a,b,tol)
```

Вычисление определенного интеграла вида $q = \int_a^b f(x)dx$

q = quad(fun,a,b) вычисляет приближенное значение интеграла от функции **fun** (заданной как аноним или с помощью описателя function) на интервале [a,b] с точностью 1e-6 с помощью квадратурной формулы Симпсона. Параметр **tol** позволяет задавать точность, отличную от значения по умолчанию.

Пример 3. Вычисление интеграла

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3 - 2x - 5}dx,$$

```
%файл myfun.m
function y = myfun(x)
y = 1./(x.^3-2*x-5); %нужны поэлементные операции
%Пример 3
Q = quad(@myfun,0,2)
%или сразу задать функцию как анонимную:
F = @(x)1./(x.^3-2*x-5); %нужны поэлементные операции
Q = quad(F,0,2);
```

Функция **quad** считается устаревшей, вместо нее рекомендуется использовать **integral**.

3) Численное интегрирование **integral**

```
q = integral(fun,xmin,xmax)
```

q = integral(fun, xmin, xmax) вычисляет приближенное значение интеграла от функции **fun** (заданной как аноним или с помощью описателя function) на интервале [xmin,xmax], используя глобальные квадратурные формулы для численно интегрирования.

Примеры.

```
%Пример 4
fun = @(x) exp(-x.^2).*log(x).^2;
q = integral(fun,0,Inf)
%Пример 5 (настройка точности)
fun = @(x)log(x);
format long
q1 = integral(fun,0,1)
q2 = integral(fun,0,1,'RelTol',0,'AbsTol',1e-12)
```

<u>Задание 1.</u>

Дана функция *y=sin(x)*. Найти ее первую и вторую производную с помощью символьного и численного дифференцирования. По полученным двумя способами данным построить два графика для функции и ее производных в одних осях для $x\in[-2\pi,2\pi]$ с шагом 0.1, снабдить легендой.

<u>Задание 2.</u>

Написать процедуру **derivative_k** определения графика k-й производной для функции, <u>заданной строкой</u>, на отрезке [a,b]. Входные параметры: функция, порядок производной, интервал определения, шаг; выходные – векторы координат (абсциссы и ординаты) графика k-й производной.

Пример вызова функции: `derivative_k('x*sin(x)',2,[-pi pi],0.1)`

С помощью полученной процедуры построить графики нескольких производных заданной функции в одних осях. Вывести заголовок и легенду.

Указание. В заголовке использовать название функции (т.к. она задана строкой). Вспомнить, как соединяются строки в команде title.

<u>Задание 3.</u>

Определить площадь под частью кривой y=*exp(-x)sin(x)-(x-2)*, которая расположена <u>выше</u> оси абсцисс на отрезке [-2,3]. Для численного вычисления интеграла использовать метод трапеций (команда **trapz**). Определить такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит 1e-6. Записать ответ в комментариях.

Указание. Шаг следует определить экспериментально.

<u>Задание 4.</u>

С помощью квадратурной формулы Симпсона (команда **quad**) численно проинтегрировать функцию $y=x\cdot\sin(8x)-(x^5-x+0.5)$ со следующими пределами интегрирования: [-0.6, 0.6]; сравнить с результатом, найденным по формуле трапеций команда **trapz**) и с результатом символьного интегрирования (команда **int)**. Определить минимальный шаг в методе трапеций, при котором во всех результатах 4 знака в десятичной части совпадают. Записать ответ в комментариях.

<u>Задание 5.</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{2}\sqrt{x}+\sin(x)dx$ тремя способами (используя trapz, quad и integral). Во всех командах настроить такую точность, чтобы результаты совпадали до 7 знаков после запятой (вывести результаты в формате long). Записать ответ в комментариях.

<u>Задание 6</u>

Найти площадь, заключенную между линиями y=exp(sin(x)) и $y=-x^2+8$. Выделить границу этой области красной линией с толщиной, равной двум. Вывести значение площади на графике в виде надписи.