

Лабораторная работа 9. Аналитическое и численное дифференцирование и интегрирование

Задание символьных переменных

Для работы с символьными вычислениями (как в Maple) требуется, чтобы был установлен модуль Symbolic Math Toolbox.

Примеры

```
syms x % задаем символьную переменную x
syms x z % задаем несколько переменных
f(x,z) = x/(1+z^2); % символьная ф-я
```

Символьное дифференцирование и интегрирование

1) Символьное дифференцирование

Df = diff(f) – символьное дифференцирование относительно символьной переменной, определенной командой `syms(f,1)`

Df = diff(f,var) – – символьное дифференцирование относительно символьной переменной `var`

Вычисление n-й производной

Df = diff(f,n) – символьное дифференцирование относительно символьной переменной, определенной командой `syms(f,1)`

Df = diff(f,var,n) – – символьное дифференцирование относительно символьной переменной `var`

Примеры

```
syms x z % задаем несколько переменных
f(x,z) = x/(1+z^2); % символьная ф-я
Dfx = diff(f,x) % дифференцирование по x
Dfz = diff(f,z) % дифференцирование по z
```

```
syms f(x) % задаем символьную ф-ю сразу
f(x) = sin(x^2);
Df = diff(f,x)
```

```
syms x t
Df = diff(sin(x*t^2))
```

2) Символьное интегрирование

F = int(expr) – неопределенный интеграл

F = int(expr,var) – неопределенный интеграл относительно символьной переменной `var`

F = int(expr,a,b) или **F = int(expr,[a b])** - определенный интеграл

F = int(expr,var,a,b) – определенный интеграл относительно символьной переменной `var`

Примеры

```
syms x z % задаем несколько переменных
f(x,z) = x/(1+z^2); % символьная ф-я
```

```

Fx = int(f,x) % интегрирование по x
Fz = int(f,x) % интегрирование по z
%вычисление определенного интеграла
syms x
expr = x*log(1+x);
F = int(expr,[0 1])

```

Численное дифференцирование

Y = diff(X) – вычисляет разности между соседними элементами вектора X. Если X – вектор длины m, то diff(X) – вектор длины m-1:

```
Y = [X(2)-X(1) X(3)-X(2) ... X(m)-X(m-1)]
```

Y = diff(X,n) – n-я разность (применение команды **diff** n раз), т.е. diff(X,2)=diff(diff(X)).

Использование команды diff для вычисления приближенных значений производной функции (численного дифференцирования): необходимо вычислить вектор значений, содержащих отношения приращений функции к приращению аргумента.

Примеры

```

h = 0.001;           % шаг
X = -pi:h:pi;       % вектор значений независимой переменной
f = sin(X);         % вектор значений функции
Y = diff(f)/h;      % первая производная (приращение ф-и к приращению
аргумента)
Z = diff(Y)/h;      % вторая производная
%График функции, ее первой и второй производных в одних осях
plot(X, f, 'b', X(1:length(Y)), Y, 'r', X(1:length(Z)), Z, 'k')
legend('function', 'first derivative', 'second derivative')

```

```

length(X) % Длина вектора X: 6284 элемента
length(Y) % 6283 элемента
length(Z) % 6282 элемента

```

Длины векторов X, Y, Z – разные, поэтому для построения графиков векторы абсцисс и ординат надо согласовать.

Численное интегрирование

1) Численное интегрирование по формуле трапеций: **trapz**

```
Q = trapz(Y)
```

```
Q = trapz(X,Y)
```

trapz(Y) вычисляет приближенное значение интеграла от вектора Y по методу трапеций с шагом, равным 1.

trapz(X,Y) вычисляет приближенное значение интеграла от вектора Y относительно координат вектора X (шаг задается в векторе X)

Пример 1.

```

%Пример 1
X = 0:pi/100:pi;
Y = sin(X);
Q = trapz(X,Y)

```

Пример 2. Вычисление двойного интеграла

$$I = \int_{-5}^5 \int_{-3}^3 (x^2 + y^2) dx dy$$

```
%Пример 2
x = -3:.1:3;
y = -5:.1:5;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
F = X.^2 + Y.^2;%матрица
I = trapz(y,trapz(x,F,2))%интегрирование по строкам в F
```

2) Численное интегрирование по формуле Симпсона: **quad**

```
q = quad(fun,a,b)
q = quad(fun,a,b,tol)
```

Вычисление определенного интеграла вида $q = \int_a^b f(x) dx$

q = quad(fun,a,b) вычисляет приближенное значение интеграла от функции **fun** (заданной как аноним или с помощью описателя function) на интервале [a,b] с точностью 1e-6 с помощью квадратурной формулы Симпсона. Параметр **tol** позволяет задавать точность, отличную от значения по умолчанию.

Пример 3. Вычисление интеграла

$$\int_0^2 \frac{1}{x^3 - 2x - 5} dx,$$

```
%файл myfun.m
function y = myfun(x)
y = 1./(x.^3-2*x-5); %нужны поэлементные операции
%Пример 3
Q = quad(@myfun,0,2)
%или сразу задать функцию как анонимную:
F = @(x)1./(x.^3-2*x-5); %нужны поэлементные операции
Q = quad(F,0,2);
```

Функция **quad** считается устаревшей, вместо нее рекомендуется использовать **integral**.

3) Численное интегрирование **integral**

```
q = integral(fun,xmin,xmax)
```

q = integral(fun, xmin, xmax) вычисляет приближенное значение интеграла от функции **fun** (заданной как аноним или с помощью описателя function) на интервале [xmin,xmax], используя глобальные квадратурные формулы для численного интегрирования.

Примеры.

```
%Пример 4
fun = @(x) exp(-x.^2).*log(x).^2;
q = integral(fun,0,Inf)
%Пример 5 (настройка точности)
fun = @(x)log(x);
format long
q1 = integral(fun,0,1)
q2 = integral(fun,0,1,'RelTol',0,'AbsTol',1e-12)
```

Задание 1.

Построить график функции $y=\sin(x)$ для $x\in[-2\pi,2\pi]$ с шагом 0.1, а также функции ее первой и второй производных в одних осях, снабдить легендой. Использовать два способа: символьное и численное дифференцирование.

Указание. Для численного дифференцирования см. решение выше и в файле с примером скрипта.

Задание 2.

Написать процедуру **derivative_k** определения графика k-й производной для функции, заданной строкой, на отрезке [a,b]. Входные параметры: функция, порядок производной, интервал определения, шаг; выходные – векторы координат (абсциссы и ординаты) графика k-й производной.

Пример вызова функции: `derivative_k('x*sin(x)', 2, [-pi pi], 0.1)`

С помощью полученной процедуры построить графики нескольких производных заданной функции в одних осях. Вывести заголовок и легенду.

Указание. В заголовке использовать название функции (т.к. она задана строкой). Вспомнить, как соединяются строки в команде title.

Задание 3.

Определить площадь под частью кривой $y=\exp(-x)\sin(x)-(x-2)$, которая расположена выше оси абсцисс на отрезке [-2,3]. Для численного вычисления интеграла используйте формулу трапеций **trapz(x,y)**. Определите такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит $1e-6$. Запишите ответ в комментариях.

Указание. См. решение в файле с примером скрипта. Шаг следует определить экспериментально.

Задание 4.

С помощью квадратурной формулы Симпсона **quad** численно проинтегрировать функцию $y=x\cdot\sin(8x)-(x^5-x+0.5)$ со следующими пределами интегрирования: [-0.6, 0.6]; сравнить с результатом, найденным по формуле трапеций **trapz** и с результатом символьного интегрирования с помощью команды **int**. Задайте такой шаг в методе трапеций, чтобы результаты в формате short (4 знака после запятой) совпадали.

Задание 5.

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^2 \sqrt{x} + \sin(x) dx$ тремя способами (используя trapz,

quad и integral). Во всех командах настроить такую точность, чтобы результаты совпадали до 7 знаков после запятой (вывести результаты в формате long).

Задание 6

Найти площадь, заключенную между линиями $y=\exp(\sin(x))$ и $y=-x^2+8$. Выделить границу этой области красной линией толщиной, равной двум.