НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

25 февраля 2020 г.

Определение ПФ и его обращение.

Определение ПФ и его обращение.

Определение.

Образом Фурье функции $f : x(\in \mathbb{R}) \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ назовем функцию

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x}\, dx.$$

Преобразованием Фурье назовём соответствие $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$.

Определение ПФ и его обращение.

Определение.

Образом Фурье функции $f : x(\in \mathbb{R}) \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ назовем функцию

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x}\, dx.$$

Преобразованием Фурье назовём соответствие $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$.

Обращение.

Если $\hat{f} = \mathcal{F} f$, то

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i\xi x}\, d\xi.$$

Этим интегралом определено соответствие $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$ – обратное преобразование Фурье.

Примеры ПФ.

Примеры ПФ.

Функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \; x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad \delta > 0, \; \widehat{\theta(\delta^2 - x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-i\xi x} dx = \frac{\sin \delta\xi}{\pi\xi}$$

Примеры ПФ.

Функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad \delta > 0, \ \widehat{\theta(\delta^2 - x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-i\xi x} dx = \frac{\sin \delta\xi}{\pi\xi}$$

$$\delta > 0, \ \widehat{\mathrm{e}^{-\delta x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\delta}}}{2\sqrt{\pi\delta}}$$

Примеры ПФ.

Функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \delta > 0,\ \widehat{\theta(\delta^2 - x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-i\xi x} dx = \frac{\sin \delta\xi}{\pi\xi}$$

$$\delta > 0,\ \widehat{\mathrm{e}^{-\delta x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\delta}}}{2\sqrt{\pi\delta}}$$

$$\int \mathrm{e}^{-\delta x^2 - i\xi x} dx = \delta^{-1/2} I\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right);\ I(\eta) = \int \mathrm{e}^{-y^2 - i\eta y} dy.$$

Примеры ПФ.

Функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad \delta > 0, \ \widehat{\theta(\delta^2 - x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{-i\xi x} dx = \frac{\sin \delta\xi}{\pi\xi}$$

$$\delta > 0, \ \widehat{\mathrm{e}^{-\delta x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\delta}}}{2\sqrt{\pi\delta}}$$

$$\int \mathrm{e}^{-\delta x^2 - i\xi x} dx = \delta^{-1/2} I\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right); \ I(\eta) = \int \mathrm{e}^{-y^2 - i\eta y} dy.$$

$$2I'(\eta) = -2\int \mathrm{e}^{-y^2 - i\eta y}(iy)dy = i\int \left(\mathrm{e}^{-y^2}\right)' \mathrm{e}^{-i\eta y} dy =$$
$$i \lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \left(\mathrm{e}^{-y^2}\right)' \mathrm{e}^{-i\eta y} dy = i \lim_{r\to\infty} (\mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{e}^{-i\eta y}|_{-r}^{r} + i\eta \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-y^2 - i\eta y} dy) = -\eta I(\eta).$$

Примеры ПФ.

Функция Хевисайда

$$\theta(x)=\begin{cases} 1,\ x>0\\ 0, x<0\end{cases} \quad \delta>0,\ \widehat{\theta(\delta^2-x^2)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-i\xi x}dx=\frac{\sin\delta\xi}{\pi\xi}$$

$$\delta>0,\ \widehat{\mathrm{e}^{-\delta x^2}}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\delta}}}{2\sqrt{\pi\delta}}$$

$$\int\mathrm{e}^{-\delta x^2-i\xi x}dx=\delta^{-1/2}I\left(\frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right);\ I(\eta)=\int\mathrm{e}^{-y^2-i\eta y}dy.$$

$$2I'(\eta)=-2\int\mathrm{e}^{-y^2-i\eta y}(iy)dy=i\int\left(\mathrm{e}^{-y^2}\right)'\mathrm{e}^{-i\eta y}dy=$$
$$i\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}\left(\mathrm{e}^{-y^2}\right)'\mathrm{e}^{-i\eta y}dy=i\lim_{r\to\infty}(\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{e}^{-i\eta y}|_{-r}^{r}+i\eta\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-y^2-i\eta y}dy)=-\eta I(\eta).$$

$$\Rightarrow 2I'(\eta)=-\eta I(\eta)\ \Rightarrow I(\eta)=I(0)\mathrm{e}^{-\eta^2/4};I(0)=\int\mathrm{e}^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$$

ПФ и вычеты

ПФ и вычеты

$\delta > 0,\ \widehat{\frac{1}{\delta^2+x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\delta|\xi|}}{2\delta}$

ПФ и вычеты

$\delta > 0$, $\widehat{\frac{1}{\delta^2+x^2}} = \frac{e^{-\delta|\xi|}}{2\delta}$

$\int \frac{e^{-i\xi x}}{\delta^2+x^2}dx = \frac{I(\xi\delta)}{\delta}$; $I(\eta) = \int \frac{e^{-i\eta x}}{1+x^2}dx$. Применим *вычеты.*

ПФ и вычеты

$\delta > 0$, $\widehat{\frac{1}{\delta^2+x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\delta|\xi|}}{2\delta}$

$\int \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{\delta^2+x^2} dx = \frac{I(\xi\delta)}{\delta}$; $I(\eta) = \int \frac{\mathrm{e}^{-i\eta x}}{1+x^2} dx$. Применим *вычеты.*

$\frac{\mathrm{e}^{-i\eta z}}{1+z^2}$ – аналит. пр-е $\frac{\mathrm{e}^{-i\eta x}}{1+x^2}$ на плоскость $z = x + iy$, проколотую в $z = \pm i$.

ПФ и вычеты

$\delta > 0$, $\widehat{\frac{1}{\delta^2+x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\delta|\xi|}}{2\delta}$

$\int \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{\delta^2+x^2} dx = \frac{I(\xi\delta)}{\delta}$; $I(\eta) = \int \frac{\mathrm{e}^{-i\eta x}}{1+x^2} dx$. Применим *вычеты.*

$\frac{\mathrm{e}^{-i\eta z}}{1+z^2}$ – аналит. пр-е $\frac{\mathrm{e}^{-i\eta x}}{1+x^2}$ на плоскость $z = x + iy$, проколотую в $z = \pm i$.

Контуры: $C_r^\pm = \{|z| < r, \pm y > 0\}$, ориентация задана так, что отрезок $(-r, r)$ проходится слева направо.

ПФ и вычеты

$\delta > 0,\ \widehat{\frac{1}{\delta^2+x^2}} = \frac{\mathrm{e}^{-\delta|\xi|}}{2\delta}$

$\int \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{\delta^2+x^2}dx = \frac{I(\xi\delta)}{\delta};\ \ I(\eta) = \int \frac{\mathrm{e}^{-i\eta x}}{1+x^2}dx$. Применим *вычеты.*

$\frac{\mathrm{e}^{-i\eta z}}{1+z^2}$ – аналит. пр-е $\frac{\mathrm{e}^{-i\eta x}}{1+x^2}$ на плоскость $z = x + iy$, проколотую в $z = \pm i$.

Контуры: $C_r^{\pm} = \{|z| < r, \pm y > 0\}$, ориентация задана так, что отрезок $(-r, r)$ проходится слева направо.

Пусть $\eta > 0$. $I(\eta) = -\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{C_r^-} \frac{\mathrm{e}^{-i\eta z}dz}{1+z^2} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=-i} \frac{\mathrm{e}^{-i\eta z}}{1+z^2} =$
$-2\pi i \lim\limits_{z\to -i} \left((z+i)\frac{\mathrm{e}^{-i\eta z}}{1+z^2}\right) = \pi\mathrm{e}^{-\eta}$

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сдвиг: $h \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{T}_h f)(x) \overset{def}{=} f(x+h) \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{i\xi h}\mathcal{F}; \mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{-ixh}\mathcal{F}$

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сдвиг: $h \in \mathbb{R},\ (\mathcal{T}_h f)(x) \stackrel{def}{=} f(x+h) \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{i\xi h}\mathcal{F}; \mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{-ixh}\mathcal{F}$

◀ $\int f(x+h)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi(y-h)}\,dy = \mathrm{e}^{i\xi h}\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сдвиг: $h \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{T}_h f)(x) \stackrel{def}{=} f(x+h) \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{i\xi h}\mathcal{F}; \mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{-ixh}\mathcal{F}$

◀ $\int f(x+h)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi(y-h)}\,dy = \mathrm{e}^{i\xi h}\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

Подобие: $\alpha > 0$, $(S_\alpha f)(x) \stackrel{def}{=} f(\alpha x) \Rightarrow \alpha\mathcal{F}S_\alpha = S_\alpha^{-1}\mathcal{F} \quad (S_\alpha^{-1} = S_{\frac{1}{\alpha}})$

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сдвиг: $h \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{T}_h f)(x) \overset{def}{=} f(x+h) \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{i\xi h}\mathcal{F}; \mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{-ixh}\mathcal{F}$

◀ $\int f(x+h)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi(y-h)}\,dy = \mathrm{e}^{i\xi h}\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

Подобие: $\alpha > 0$, $(S_\alpha f)(x) \overset{def}{=} f(\alpha x) \Rightarrow \alpha\mathcal{F}S_\alpha = S_\alpha^{-1}\mathcal{F} \quad (S_\alpha^{-1} = S_{\frac{1}{\alpha}})$

◀ $\alpha\int f(\alpha x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)y}\,dy$ ▶

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сдвиг: $h \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{T}_h f)(x) \overset{def}{=} f(x+h) \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{i\xi h}\mathcal{F}; \mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{-ixh}\mathcal{F}$

◀ $\int f(x+h)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi(y-h)}\,dy = \mathrm{e}^{i\xi h}\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

Подобие: $\alpha > 0$, $(S_\alpha f)(x) \overset{def}{=} f(\alpha x) \Rightarrow \alpha\mathcal{F}S_\alpha = S_\alpha^{-1}\mathcal{F} \quad (S_\alpha^{-1} = S_{\frac{1}{\alpha}})$

◀ $\alpha\int f(\alpha x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)y}\,dy$ ▶

Инверсия: $(\mathcal{J}f)(x) \overset{def}{=} f(-x) \Rightarrow \mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{J} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}$.

ПФ и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Сдвиг: $h \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{T}_h f)(x) \stackrel{def}{=} f(x+h) \Rightarrow \mathcal{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{i\xi h}\mathcal{F}; \mathcal{F}^{-1}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{-ixh}\mathcal{F}$

◀ $\int f(x+h)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi(y-h)}\,dy = \mathrm{e}^{i\xi h}\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

Подобие: $\alpha > 0$, $(S_\alpha f)(x) \stackrel{def}{=} f(\alpha x) \Rightarrow \alpha\mathcal{F}S_\alpha = S_\alpha^{-1}\mathcal{F}$ $\quad (S_\alpha^{-1} = S_{\frac{1}{\alpha}})$

◀ $\alpha\int f(\alpha x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)y}\,dy$ ▶

Инверсия: $(\mathcal{J}f)(x) \stackrel{def}{=} f(-x) \Rightarrow \mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{J} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}$.

◀ $\int f(-x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx = \int f(y)\mathrm{e}^{-i(-\xi)y}\,dy = \int f(y)\mathrm{e}^{i\xi y}\,dy$ ▶

SinПФ и cosПФ

Коммутация с инверсией $\Rightarrow$ ПФ сохраняет чётность/нечётность.

SinПФ и cosПФ

Коммутация с инверсией $\Rightarrow$ ПФ сохраняет чётность/нечётность.

f – чётна $\Rightarrow$ $\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy = 2\int\limits_0^\infty f(y)\cos(\xi y)\,dy$

f – нечётна $\Rightarrow$ $\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy = -2i\int\limits_0^\infty f(y)\sin(\xi y)\,dy$

SinПФ и cosПФ

Коммутация с инверсией $\Rightarrow$ ПФ сохраняет чётность/нечётность.

$$f \text{ — чётна} \Rightarrow \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy = 2\int\limits_0^\infty f(y)\cos(\xi y)\,dy$$

$$f \text{ — нечётна} \Rightarrow \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy = -2i\int\limits_0^\infty f(y)\sin(\xi y)\,dy$$

Определение cosПФ

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{F}_0 : g \mapsto \mathcal{F}_0 g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \quad (\mathcal{F}_0 g)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int g(y)\cos(\xi y)\,dy$$

SinПФ и cosПФ

Коммутация с инверсией $\Rightarrow$ ПФ сохраняет чётность/нечётность.

$$f \text{ – чётна} \Rightarrow \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy = 2\int\limits_0^\infty f(y)\cos(\xi y)\,dy$$

$$f \text{ – нечётна} \Rightarrow \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy = -2i\int\limits_0^\infty f(y)\sin(\xi y)\,dy$$

Определение cosПФ

$$g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{F}_0 : g \mapsto \mathcal{F}_0 g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \quad (\mathcal{F}_0 g)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int g(y)\cos(\xi y)\,dy$$

Определение sinПФ

$$g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{F}_1 : g \mapsto \mathcal{F}_1 g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \quad (\mathcal{F}_1 g)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int g(y)\sin(\xi y)\,dy$$

SinПФ и cosПФ – продолжение

Обращение

$$\mathcal{F}_1^2 = \mathcal{F}_0^2 = \mathrm{id}$$

SinПФ и cosПФ – продолжение

Обращение

$$\mathcal{F}_1^2 = \mathcal{F}_0^2 = \mathrm{id}$$

cosПФ естественным образом продолжается до чётной, а sinПФ – до нечётной функции на $\mathbb{R}$.

Восстановление ПФ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$\mathcal{P}_0 : f \mapsto (f + \mathcal{J} f)/2,\ \mathcal{P}_1 : f \mapsto (f - \mathcal{J} f)/2 \ \Rightarrow$
$\forall f\ \mathcal{J}\mathcal{P}_0 f = \mathcal{P}_0 f,\ \mathcal{J}\mathcal{P}_1 f = -\mathcal{P}_1 f,\ \mathcal{P}_0 f + \mathcal{P}_1 f = f;$

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F} f = (\mathcal{F}_0\mathcal{P}_0 f - i\mathcal{F}_1\mathcal{P}_1 f)$$

ПФ и алгебра функций на $\mathbb{R}$

Компл. сопряжение: $\mathcal{C} : f \mapsto f^*$; $\quad \mathcal{C}\mathcal{F} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{F}\mathcal{J}\mathcal{C} = \mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{C}$.

ПФ и алгебра функций на $\mathbb{R}$

Компл. сопряжение: $\mathcal{C} : f \mapsto f^*$; $\quad \mathcal{C}\mathcal{F} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{F}\mathcal{J}\mathcal{C} = \mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{C}$.

◀ $\left(\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right)^* = \int f^*(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\,dx = \int f^*(-y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

ПФ и алгебра функций на $\mathbb{R}$

Компл. сопряжение: $\mathcal{C} : f \mapsto f^*$; $\quad \mathcal{C}\mathcal{F} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{F}\mathcal{J}\mathcal{C} = \mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{C}$.

$\blacktriangleleft$ $\left(\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right)^* = \int f^*(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\,dx = \int f^*(-y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ $\blacktriangleright$

Условия вещественности: (i) $\mathcal{C}f = f \Leftrightarrow \mathcal{C}\mathcal{F}f = J\mathcal{F}f$;
(ii) $\mathcal{C}\mathcal{F}f = \mathcal{F}f \Leftrightarrow f = Jf$; (iii) $\mathcal{C}\mathcal{F}f = -\mathcal{F}f \Leftrightarrow f = -Jf$;

ПФ и алгебра функций на $\mathbb{R}$

Компл. сопряжение: $\mathcal{C} : f \mapsto f^*$; $\quad \mathcal{C}\mathcal{F} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{F}\mathcal{J}\mathcal{C} = \mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{C}$.

◀ $\left(\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right)^* = \int f^*(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\,dx = \int f^*(-y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

Условия вещественности: (i) $\mathcal{C}f = f \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C}\mathcal{F}f = J\mathcal{F}f$;
(ii) $\mathcal{C}\mathcal{F}f = \mathcal{F}f \;\Leftrightarrow\; f = Jf$; (iii) $\mathcal{C}\mathcal{F}f = -\mathcal{F}f \;\Leftrightarrow\; f = -Jf$;

◀ $\mathcal{C}\mathcal{F}f = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}f = \mathcal{F}\mathcal{J}\mathcal{C}f = \mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{C}f = \mathcal{J}\mathcal{F}f$ ▶

ПФ и алгебра функций на $\mathbb{R}$

Компл. сопряжение: $\mathcal{C} : f \mapsto f^*$; $\quad \mathcal{CF} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{FJC} = \mathcal{JFC}$.

◀ $\left(\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right)^* = \int f^*(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\,dx = \int f^*(-y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy$ ▶

Условия вещественности: (i) $\mathcal{C}f = f \;\Leftrightarrow\; \mathcal{CF}f = J\mathcal{F}f$;
(ii) $\mathcal{CF}f = \mathcal{F}f \;\Leftrightarrow\; f = Jf$; (iii) $\mathcal{CF}f = -\mathcal{F}f \;\Leftrightarrow\; f = -Jf$;

◀ $\mathcal{CF}f = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}f = \mathcal{FJC}f = \mathcal{JFC}f = \mathcal{JF}f$ ▶

Линейность.
$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}f + \beta\mathcal{F}g$; $\mathcal{F}^{-1}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}^{-1}f + \beta\mathcal{F}^{-1}g \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}$.

ПФ, дифференцирование и свёртка

$\partial^n \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^n$; $\mathcal{F}\partial^n = (i\xi)^n \mathcal{F}$, где $\partial : f \mapsto f'$ – дифференцирование.

ПФ, дифференцирование и свёртка

$\partial^n \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^n;\ \mathcal{F}\partial^n = (i\xi)^n\mathcal{F}$, где $\partial : f \mapsto f'$ – дифференцирование.

$$◀\ (\mathcal{F}\partial f)(\xi) = \lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx =$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-r}^{r} + i\xi\int\limits_{-r}^{r} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right) = (i\xi\mathcal{F}f)(\xi)\ ▶$$

ПФ, дифференцирование и свёртка

$\partial^n \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^n;\ \mathcal{F}\partial^n = (i\xi)^n\mathcal{F}$, где $\partial : f \mapsto f'$ – дифференцирование.

◀ $(\mathcal{F}\partial f)(\xi) = \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx =$

$\lim\limits_{r\to\infty} \left(f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-r}^{r} + i\xi \int\limits_{-r}^{r} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx \right) = (i\xi\mathcal{F}f)(\xi)$ ▶

Определение. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *свертка* $(f * g)(x) \overset{\text{def}}{=} \int f(x-y)g(y)\,dy,\ x \in \mathbb{R}$

ПФ, дифференцирование и свёртка

$\partial^n \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^n;\ \mathcal{F}\partial^n = (i\xi)^n\mathcal{F}$, где $\partial : f \mapsto f'$ – дифференцирование.

$$◀\ (\mathcal{F}\partial f)(\xi) = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx =$$
$$\lim_{r\to\infty}\left(f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-r}^{r} + i\xi \int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx \right) = (i\xi\mathcal{F}f)(\xi)\ ▶$$

Определение. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *свертка* $(f * g)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int f(x-y)g(y)\,dy,\ x \in \mathbb{R}$

Теорема о свёртке. $M : x(\in \mathbb{R}^n) \mapsto M(x) \in \mathbb{C},\ \hat{M} = \mathcal{F}M;\ \hat{\mathcal{M}} : \hat{f} \mapsto \hat{M}\hat{f}$
$\Rightarrow M * f = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\hat{\mathcal{M}}\mathcal{F}f$

$$◀\ \int \hat{M}(\xi)\left(\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy\right)\mathrm{e}^{i\xi x}\,d\xi = \int\left(\int \hat{M}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi(x-y)}d\xi\right) f(y)\,dy\ ▶$$

ПФ и ДУ. Пример.

ОДУ. $-u'' + \mu^2 u = f$, $\mu = \mathrm{const} > 0$; f задана на $\mathbb{R}$; доп. условия: $u(\pm\infty) = 0$.

ПФ и ДУ. Пример.

ОДУ. $-u'' + \mu^2 u = f,\ \mu = \mathrm{const} > 0;$ f задана на $\mathbb{R}$; доп. условия: $u(\pm\infty) = 0$.

Подстановки $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u};\ f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$
$\Rightarrow (\xi^2 + \mu^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f} \Rightarrow u = \mathcal{F}^{-1}\hat{G}_\mu \mathcal{F} f;\ \hat{G}_\mu(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\xi^2 + \mu^2)^{-1}$

$$\Rightarrow \forall f, \mu \quad u(x) = G_\mu * f, \quad G_\mu(x) = \frac{\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{G}_\mu\right)(x)}{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu|x|}}{2\mu}.$$

ПФ и ДУ. Пример.

ОДУ. $-u'' + \mu^2 u = f,\ \mu = \mathrm{const} > 0;$ f задана на $\mathbb{R}$; доп. условия: $u(\pm\infty) = 0$.

Подстановки $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u};\ f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$

$\Rightarrow (\xi^2 + \mu^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f} \Rightarrow u = \mathcal{F}^{-1}\hat{G}_\mu \mathcal{F} f;\ \hat{G}_\mu(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\xi^2 + \mu^2)^{-1}$

$$\Rightarrow\ \forall f, \mu\ \ u(x) = G_\mu * f,\quad G_\mu(x) = \frac{\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{G}_\mu\right)(x)}{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu|x|}}{2\mu}.$$

УрЧП. $u_t - u_{xx} = 0,\ u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$. (тепловое уравнение).

ПФ и ДУ. Пример.

ОДУ. $-u'' + \mu^2 u = f$, $\mu = \mathrm{const} > 0$; f задана на $\mathbb{R}$; доп. условия: $u(\pm\infty) = 0$.

Подстановки $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$; $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$
$\Rightarrow (\xi^2 + \mu^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f} \Rightarrow u = \mathcal{F}^{-1}\hat{G}_\mu \mathcal{F} f$; $\hat{G}_\mu(\xi) \overset{\mathrm{def}}{=} (\xi^2 + \mu^2)^{-1}$

$$\Rightarrow \ \forall f, \mu \quad u(x) = G_\mu * f, \quad G_\mu(x) = \frac{\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{G}_\mu\right)(x)}{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu|x|}}{2\mu}.$$

УрЧП. $u_t - u_{xx} = 0$, $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. (тепловое уравнение).

$\mathcal{F}(u_t - u_{xx}) = \hat{u}_t + \xi^2 \hat{u}$, $\hat{u} = \mathcal{F}u \Rightarrow \hat{u}(\xi, t) = \hat{\psi}(\xi)\mathrm{e}^{-t\xi^2}$, $\hat{\psi}$ – произвольна,
$\Rightarrow u(x,t) = (G_t * \psi)(x)$, $\psi = \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}$, ψ – произвольна,
$G_t(x) = \frac{\mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{-t\xi^2}}{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}}$.

Класс Шварца

Класс Шварца

Определение.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу Шварца, если
$f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, и $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(|x|^p \left(\partial^n f\right)(x)\right) = 0 \; \forall \, n = 0..\infty, \; p > 0.$
Класс Шварца обозначим через S.

Класс Шварца

Определение.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу Шварца, если
$f \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, и $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left(|x|^p \left(\partial^n f\right)(x)\right) = 0 \ \forall\, n = 0..\infty,\ p > 0.$
Класс Шварца обозначим через S.

Примеры

$$\mathrm{e}^{-x^2}, \ \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}-1/x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Класс Шварца

Определение.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу Шварца, если
$f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$, и $\lim\limits_{|x|\to\infty} (|x|^p (\partial^n f)(x)) = 0 \ \forall\, n = 0..\infty, \ p > 0$.
Класс Шварца обозначим через S.

Примеры

$$\mathrm{e}^{-x^2}, \ \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}-1/x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Элементарные свойства

1. S – векторное (линейное) пространство.
2. $f, g \in \mathrm{S} \Rightarrow gf \in \mathrm{S}$
3. $f \in \mathrm{S} \Rightarrow qf \in \mathrm{S} \ \forall\, q \in \mathrm{C}^\infty : \ \forall m = 0, 1, \ldots \ \exists p > 0 : \ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{|(\partial^m q)(x)|}{(1+|x|)^p} < \infty$

ПФ действует в классе Шварца

ПФ действует в классе Шварца

Лемма Римана. $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) = 0.$

ПФ действует в классе Шварца

Лемма Римана. $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) = 0.$

Упрощённая лемма.
$\sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi (\mathcal{F}f)(\xi)| < \infty, \ \forall \ f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) : \ f(\pm\infty) = 0, \ f' \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$

◀ $i\xi\mathcal{F}f = \mathcal{F}f'$

$\Rightarrow \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} |\xi (\mathcal{F}f)(\xi)| = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} |(\mathcal{F}f')(\xi)| \leq \int |f'(x)| \, dx.$

Как здесь понимается $\mathcal{F}f$?

$$2\pi(\mathcal{F}f')(\xi) = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x) dx = (i\xi) \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x) dx = 2\pi i\xi\mathcal{F}f,$$

Итак, $\mathcal{F}f$ понимается как несобственный интеграл. ▶

ПФ действует в классе Шварца

Лемма Римана. $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim\limits_{\xi\to\pm\infty} (\mathcal{F}f)(\xi) = 0.$

Упрощённая лемма.
$\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi (\mathcal{F}f)(\xi)| < \infty,\ \forall\ f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}):\ f(\pm\infty) = 0,\ f' \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$
◀ $i\xi\mathcal{F}f = \mathcal{F}f'$
$\Rightarrow \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi (\mathcal{F}f)(\xi)| = \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f')(\xi)| \le \int |f'(x)|\, dx.$
Как здесь понимается $\mathcal{F}f$?
$2\pi(\mathcal{F}f')(\xi) = \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x)dx = (i\xi) \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)dx = 2\pi i\xi\mathcal{F}f,$
Итак, $\mathcal{F}f$ понимается как несобственный интеграл. ▶

Теорема

$\mathcal{F} : \mathrm{S} \to \mathrm{S};\quad \mathcal{F}^{-1} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$
◀ $f \in \mathrm{S} \Rightarrow \forall\, m \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{\xi\to\infty} (\xi^m (\partial^n \mathcal{F}f)(\xi)) = (-i)^m \lim\limits_{\xi\to\infty} ((\mathcal{F}\partial^m ((-ix)^n f))(\xi)) =$
0 ▶

Дельтаобразные последовательности

Определение

Последовательность $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}_\infty$ назовём дельтаобразной, если
$\int \delta_k(x)\,dx = 1$
возможно, в несобственном смысле, и
$\lim\limits_{k\to\infty} \int \delta_k(x) f(x)\,dx = f(0)\ \forall f \in \mathrm{S}.$
Аналогично определяется дельтаобразное семейство, зависящее от континуального параметра.

Дельтаобразные последовательности

Определение

Последовательность $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}_\infty$ назовём дельтаобразной, если
$\int \delta_k(x)\,dx = 1$
возможно, в несобственном смысле, и
$\lim\limits_{k\to\infty} \int \delta_k(x) f(x)\,dx = f(0)\ \forall f \in \mathrm{S}.$
Аналогично определяется дельтаобразное семейство, зависящее от континуального параметра.

Примечание. Если δ_k – дельтаобразная последовательность, то
$\lim\limits_{k\to\infty} (\delta_k * f)(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \int \delta_k(y) f(x-y)\,dy = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R},\ f \in \mathrm{S}.$

Дельтаобразные последовательности

Определение

Последовательность $\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}_\infty$ назовём дельтаобразной, если
$\int \delta_k(x)\,dx = 1$
возможно, в несобственном смысле, и
$\lim\limits_{k\to\infty} \int \delta_k(x) f(x)\,dx = f(0)\ \forall f \in \mathrm{S}.$
Аналогично определяется дельтаобразное семейство, зависящее от континуального параметра.

Примечание. Если δ_k – дельтаобразная последовательность, то
$\lim\limits_{k\to\infty} (\delta_k * f)(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \int \delta_k(y) f(x-y)\,dy = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R},\ f \in \mathrm{S}.$

Пример

$\chi_\varepsilon(x) = \frac{\theta(1-|x/\varepsilon|)}{2\varepsilon}; \quad \int \chi_\varepsilon(x) f(x)\,dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{|x|<\varepsilon} f(x)\,dx = f(s_\varepsilon),\ |s_\varepsilon| < \varepsilon \Rightarrow$

$f(s_\varepsilon) \to f(0),\ \varepsilon \to +0$

Обоснование формул обращения

Теорема

$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$

Обоснование формул обращения

Теорема

$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$

Редукция к доказательству дельтаобразности

◀ $f \in \mathrm{S}$. $(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{i\xi x}\int \mathrm{e}^{-i\xi y} f(y)dyd\xi =$
$\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r,s\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{i\xi x}\int\limits_{-s}^{s}\mathrm{e}^{-i\xi y}f(y)dyd\xi = \frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r,s\to\infty}\int\limits_{-s}^{s}f(y)\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{i\xi(x-y)}d\xi dy =$
$\lim\limits_{r\to\infty}\int\frac{f(y)\sin(r(x-y))dy}{\pi(x-y)}$ ▶

Обоснование формул обращения

Теорема

$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$

Редукция к доказательству дельтаобразности

$\blacktriangleleft$ $f \in \mathrm{S}$. $(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{i\xi x}\int \mathrm{e}^{-i\xi y} f(y)dyd\xi =$
$\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r,s\to\infty}\int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{i\xi x}\int\limits_{-s}^{s} \mathrm{e}^{-i\xi y} f(y)dyd\xi = \frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r,s\to\infty}\int\limits_{-s}^{s} f(y)\int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{i\xi(x-y)}d\xi dy =$
$\lim\limits_{r\to\infty}\int \frac{f(y)\sin(r(x-y))dy}{\pi(x-y)}$ $\blacktriangleright$

Итак, осталось доказать дельтаобразность при $r \to +\infty$ семейства

$$\left\{\frac{\sin(rx)}{\pi x}\right\}_{r>0}.$$

Доказательство дельтаобразности

◀
$$\int \frac{\sin(rx)\,dx}{\pi x} = 1$$
(вспоминаем разрывный множитель Дирихле) $\Rightarrow$
$$\Delta(r) = \int \frac{f(x)\sin(rx)\,dx}{\pi x} - f(0) = \int \frac{(f(x)-f(0))\sin(rx)\,dx}{\pi x} =$$
(замечая чётность $\frac{\sin(rx)}{\pi x}$)
$$= \int \frac{\mathcal{P}_0(f(x)-f(0))\sin(rx)\,dx}{\pi x} = \int \frac{(f(x)+f(-x)-2f(0))\sin(rx)\,dx}{2\pi x} \Rightarrow$$
$$\Delta(r) = (i\mathcal{F}g)(r),\ g(x) = \frac{(f(x)+f(-x)-2f(0))}{x}$$
где использована нечётность g. Далее,
$$f(x)+f(-x)-2f(0) = O(x^2),\ x \to 0 \Rightarrow g \in \mathrm{C}^1;$$
и непосредственная проверка дает $g(\pm\infty) = 0$.

Завершение доказательства дельтаобразности

Наконец,

$$g'(x) = \frac{(f'(x) - f'(-x))}{x} - \frac{(f(x) + f(-x) - 2f(0))}{x^2} \in \mathrm{L}_1$$

применима упрощённая лемма о затухании; поэтому

$$\Delta(r) = \int \frac{f(x)\sin(rx)\,dx}{\pi x} - f(0) \to 0, \;\; r \to \infty$$

-