НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 2
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. ПРОДОЛЖЕНИЕ.

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

27 февраля 2019 г.

Периодизация.

Периодизация.

Определение.

Пусть $f \in \mathrm{L}_{1,loc}$, $p > 0$ и ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2pn)$$

сходится при почти каждом x. Сумму этого ряда назовём $2p-$периодизацией функции f. $2p$-периодизацию функции f обозначим $Per_p f$.

Периодизация.

Определение.

Пусть $f \in \mathrm{L}_{1,loc}$, $p > 0$ и ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2pn)$$

сходится при почти каждом x. Сумму этого ряда назовём $2p-$периодизацией функции f. $2p$-периодизацию функции f обозначим $Per_p f$.

Теорема.

Пусть $f \in \mathrm{L}_1$, $p > 0$ и $g = Per_p f$. Тогда

$$\alpha\left(\mathcal{F}f\right)(n\alpha) = \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p} g(s)\mathrm{e}^{-i\alpha ns}ds, \;\; \alpha = \pi/p.$$

Периодизация. Продолжение.

$$\blacktriangleleft\; 2p\alpha\,(\mathcal{F}f)\,(\alpha n) = \int f(x)\mathrm{e}^{-in\alpha x}\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_{2mp}^{2(m+1)p} f(x)\mathrm{e}^{-in\alpha x}\,dx =$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_{0}^{2p} f(y+2mp)\mathrm{e}^{-in\alpha(y+2mp)}\,dy = \int\limits_{0}^{2p} \mathrm{e}^{-in\alpha y} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(y+2mp)\,dy \;\blacktriangleright$$

Периодизация. Продолжение.

$$\blacktriangleleft\ 2p\alpha\,(\mathcal{F}f)\,(\alpha n) = \int f(x)\mathrm{e}^{-in\alpha x}\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_{2mp}^{2(m+1)p} f(x)\mathrm{e}^{-in\alpha x}\,dx =$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_{0}^{2p} f(y+2mp)\mathrm{e}^{-in\alpha(y+2mp)}\,dy = \int\limits_{0}^{2p}\mathrm{e}^{-in\alpha y}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(y+2mp)\,dy\ \blacktriangleright$$

Определение.

Пусть $g\in \mathrm{L}_{1,loc}$ периодична с периодом. Коэффициентами Фурье $2p-$периодической функции $g\in \mathrm{L}_{1,loc}$ называют интегралы

$$g_n = \frac{1}{2p}\int\limits_{0}^{2p} g(s)\mathrm{e}^{-i\alpha ns}ds,\ \ \alpha p = \pi,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Периодизация. Продолжение.

$$◀\ 2p\alpha\,(\mathcal{F}f)\,(\alpha n) = \int f(x)\mathrm{e}^{-in\alpha x}\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_{2mp}^{2(m+1)p} f(x)\mathrm{e}^{-in\alpha x}\,dx =$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^{2p} f(y+2mp)\mathrm{e}^{-in\alpha(y+2mp)}\,dy = \int\limits_0^{2p} \mathrm{e}^{-in\alpha y} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(y+2mp)\,dy\ ▶$$

Определение.

Пусть $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$ периодична с периодом. Коэффициентами Фурье $2p-$периодической функции $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$ называют интегралы

$$g_n = \frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p} g(s)\mathrm{e}^{-i\alpha ns}ds,\ \alpha p = \pi,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Следствие.

Пусть $f \in S,\ \ g = Per_p f$. Тогда $\lim\limits_{|n|\to\infty} n^m g_n = 0\ \forall\, m \in \mathbb{N}$, так что $g \in \mathrm{C}^\infty$.

Ряд Фурье.

Ряд Фурье.

Определение

Рядом Фурье $2p$ – периодической функции $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$ называется ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \mathrm{e}^{in\alpha x}, \quad \alpha p = \pi,$$

где g_n – коэффициенты Фурье функции g.

Ряд Фурье.

Определение

Рядом Фурье $2p$ – периодической функции $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$ называется ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \mathrm{e}^{in\alpha x}, \quad \alpha p = \pi,$$

где g_n – коэффициенты Фурье функции g.

Формула суммирования.

$$g = Per_p(f),\ g(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \Longrightarrow$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2kp) = \alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(\alpha k),\ \alpha p = \pi.$$

Пример. $f(x) = \mathrm{e}^{-tx^2}, \quad t > 0,\ 2p = 1, \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-tk^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 k^2}{t}}.$

L_2—теория рядов Фурье

L_2—теория рядов Фурье

Обозначения и термины.

$\mathrm{e}_k : x \mapsto \mathrm{e}^{ik\alpha x}$, $\alpha p = \pi$, $k \in \mathbb{Z}$=$2p$-периодические гармоники;
$\tilde{\mathrm{e}}_k : x \mapsto \mathrm{e}^{ik\alpha x}/\sqrt{2p}$, $\alpha p = \pi$, $k \in \mathbb{Z}$=нормированные $2p$-периодические гармоники;
$\mathrm{L}_{2,per}$ = комплексное гилбертово пространство $2p$—периодических функций класса $\mathrm{L}_{2,loc}$ со скалярным произведением

$$(g,h) = \int\limits_{I_p} g(s)h^*(s)ds = 2p \lim_{r\to\infty} r^{-1} \int\limits_{-r}^{r} g(s)h^*(s)ds,$$

где $I_p = (-p,p)$ или любой другой интервал длиной в период.

L_2—теория рядов Фурье

Обозначения и термины.

$\mathrm{e}_k : x \mapsto \mathrm{e}^{ik\alpha x}$, $\alpha p = \pi$, $k \in \mathbb{Z}$=$2p$-периодические гармоники;
$\tilde{\mathrm{e}}_k : x \mapsto \mathrm{e}^{ik\alpha x}/\sqrt{2p}$, $\alpha p = \pi$, $k \in \mathbb{Z}$=нормированные $2p$-периодические гармоники;
$\mathrm{L}_{2,per}$ = комплексное гилбертово пространство $2p-$периодических функций класса $\mathrm{L}_{2,loc}$ со скалярным произведением

$$(g,h) = \int\limits_{I_p} g(s)h^*(s)ds = 2p \lim_{r\to\infty} r^{-1} \int\limits_{-r}^{r} g(s)h^*(s)ds,$$

где $I_p = (-p,p)$ или любой другой интервал длиной в период.

Основные положения.

1. Функции $\{\tilde{\mathrm{e}}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, образуют полную ортонормированную систему в $\mathrm{L}_{2,per}$.
2. Частичные суммы $\sum_{|k|\le N} g_k \mathrm{e}_k$ доставляют наилучшее в $\mathrm{Lin}\left(\{\mathrm{e}_k\}_{|k|\le N}\right)$ приближение функции g в метрике $\mathrm{L}_{2,per}$.
3. $(g,h) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k h_k^*$; $\quad \|g\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k|^2$.
4. $h \perp \overline{\mathrm{Lin}\left(\{\mathrm{e}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right)} \Leftrightarrow h = 0$

Ряды Фурье и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим $\mathrm{F} : f \mapsto \hat{f},\ \hat{f} : n \mapsto f_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},\ f \in \mathrm{L}_{2,per}$ – $2p$-периодична.

Ряды Фурье и преобразования $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим $\mathrm{F} : f \mapsto \hat{f},\ \hat{f} : n \mapsto f_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},\ f \in \mathrm{L}_{2,per}$ – $2p$-периодична.

Сдвиг: $\forall h \in \mathbb{R}\ \mathrm{F}\mathcal{T}_h = \mathrm{e}^{in\alpha h} F; \alpha p = \pi$,
Инверсия: $\mathrm{F}\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathrm{F}$.
Компл. сопряжение: $\mathrm{F}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathrm{F}\mathcal{J} = \mathcal{C}\mathcal{J}\mathrm{F}$
Вещественность: $\mathcal{C}f = f \Leftrightarrow \mathcal{C}f_n = f_{-n},\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
Вещественная форма ряда:

$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^0 \cos(n\alpha x) + g_n^1 \sin(n\alpha x)),\ g_0 = \frac{1}{2p} \int\limits_{I_p} g ds,$$

$$g_n^0 = g_n + g_{-n} = \frac{1}{p} \int\limits_{I_p} g(s) \cos(n\alpha s) ds,\ i g_n^1 = g_n - g_{-n} = \frac{1}{p} \int\limits_{I_p} g(s) \sin(n\alpha s) ds.$$

Замечание. Вещественная форма ряда Ф. – ортогональное разложение $\mathrm{L}_{2,per}$ по нормированному базису $\{\frac{1}{\sqrt{2p}}; \frac{\cos(n\alpha x)}{\sqrt{p}}; \frac{\sin(n\alpha x)}{\sqrt{p}}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Sin и cos-ряды.

Cos-ряд. g – чётна $\Longrightarrow$ $g_n^1 = 0 \ \forall \, n \in \mathbb{N}$

$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^0 \cos(n\alpha x), \;\; p\alpha = \pi, \;\; g_0 = \frac{1}{p}\int_0^p g(s)ds; \;\; g_n^0 = \frac{2}{p}\int_0^p g(s)\cos(n\alpha s)ds.$$

Sin и cos-ряды.

Cos-ряд. g – чётна $\Longrightarrow$ $g_n^1 = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^0 \cos(n\alpha x), \;\; p\alpha = \pi, \;\; g_0 = \frac{1}{p}\int_0^p g(s)ds; \;\; g_n^0 = \frac{2}{p}\int_0^p g(s)\cos(n\alpha s)ds.$$

Sin-ряд. g – нечётна $\Longrightarrow$ $g_0 = g_n^0 = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^1 \sin(n\alpha x), \;\; p\alpha = \pi, \;\; g_n^1 = \frac{2}{p}\int_0^p g(s)\sin(n\alpha s)ds.$$

Sin и cos-ряды.

Cos-ряд. g – чётна $\Longrightarrow$ $g_n^1 = 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^0 \cos(n\alpha x), \;\; p\alpha = \pi, \;\; g_0 = \frac{1}{p}\int_0^p g(s)ds; \;\; g_n^0 = \frac{2}{p}\int_0^p g(s)\cos(n\alpha s)ds.$$

Sin-ряд. g – нечётна $\Longrightarrow$ $g_0 = g_n^0 = 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^1 \sin(n\alpha x), \;\; p\alpha = \pi, \;\; g_n^1 = \frac{2}{p}\int_0^p g(s)\sin(n\alpha s)ds.$$

Замечание. Пусть g первоначально определена на $(0, p)$. Тогда
1. cos-ряд представляет собой разложение $g \in \mathrm{L}_2(0, p)$ по ортонормированному базису $\{\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{2\cos(n\alpha x)}{\sqrt{p}}\}$.
2. sin-ряд представляет собой разложение $g \in \mathrm{L}_2(0, p)$ по ортонормированному базису $\{\frac{2\sin(n\alpha x)}{\sqrt{p}}\}$.
3. Сумма cos-ряда (sin-ряда) функции , дает чётное (нечётное) $2p$-периодическое продолжение функции g на $\mathbb{R}$.

ПФ в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

ПФ в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Теорема Планшереля (равенство Парсеваля).

$\sqrt{2\pi}\|\mathcal{F}f\| = \|f\|; \quad \|\mathcal{F}^{-1}f\| = \sqrt{2\pi}\|f\| \ \forall f \in \mathrm{L}_2$

Теорема Планшереля (равенство Парсеваля).

$\sqrt{2\pi}\|\mathcal{F}f\| = \|f\|; \quad \|\mathcal{F}^{-1}f\| = \sqrt{2\pi}\|f\| \ \forall f \in \mathrm{L}_2$

◀ Вспомним о $\delta-$образности семейства $\frac{\sin(rx)}{\pi x}$, $r \to +\infty$. Пусть $f \in \mathrm{S} \subset \mathrm{L}_2$.

$2\pi\|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\left(\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,dx\right)\left(\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\,dy\right)^* d\xi =$

$\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to\infty}\int f(x)\int f^*(y)\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}d\xi dydx =$

$\int f(x)\int f^*(y)\left(\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}d\xi\right)dydx = \int f(x)f^*(x)dx.$ ▶

ПФ в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Теорема Планшереля (равенство Парсеваля).

$\sqrt{2\pi}\|\mathcal{F}f\| = \|f\|; \quad \|\mathcal{F}^{-1}f\| = \sqrt{2\pi}\|f\| \ \forall f \in \mathrm{L}_2$

◀ Вспомним о $\delta-$образности семейства $\frac{\sin(rx)}{\pi x}$, $r \to +\infty$. Пусть $f \in \mathrm{S} \subset \mathrm{L}_2$.

$2\pi\|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int \left(\int f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\, dx\right) \left(\int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\, dy\right)^* d\xi =$

$\frac{1}{2\pi} \lim\limits_{r\to\infty} \int f(x) \int f^*(y) \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-i\xi(x-y)} d\xi dy dx =$

$\int f(x) \int f^*(y) \left(\frac{1}{2\pi} \lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-i\xi(x-y)} d\xi \right) dydx = \int f(x) f^*(x) dx.$ ▶

Замечание. Переопределение $\mathcal{F} := \sqrt{2\pi}\mathcal{F}$; $\mathcal{F}^{-1} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}$ делает $\mathcal{F}$ унитарным оператором в L_2. Действительно, $(\mathcal{F}f, g) =$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g^*(\xi) \int f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y} dy d\xi = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(\xi)\mathrm{e}^{i\xi y} d\xi \right)^* f(y) dy = (f, \mathcal{F}^{-1}g)$, так что $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$.

Спектр ПФ и функции Эрмита.

Спектр ПФ и функции Эрмита.

Лемма.

$\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}$

◀ $\frac{1}{2\pi}\left(\int \mathrm{e}^{-i\xi x}\int \mathrm{e}^{-i\xi y} f(y)\,dyd\xi\right) = \int f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-i\xi(x+y)}d\xi\right)dy =$

$f(-x)$. ▶

Спектр ПФ и функции Эрмита.

Лемма.

$\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}$

◀ $\frac{1}{2\pi}\left(\int \mathrm{e}^{-i\xi x}\int \mathrm{e}^{-i\xi y} f(y)\,dy d\xi\right) = \int f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-i\xi(x+y)}d\xi\right)dy =$

$f(-x)$. ▶

Замечание. Эквивалентная формулировка: $\mathcal{F}^4 = id$. Отсюда: все собственные числа оператора $\mathcal{F}$ – корни четвёртой степени из 1.

Спектр ПФ и функции Эрмита.

Лемма.

$\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}$

◀ $\frac{1}{2\pi}\left(\int \mathrm{e}^{-i\xi x}\int \mathrm{e}^{-i\xi y} f(y)\,dyd\xi\right) = \int f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{e}^{-i\xi(x+y)}d\xi\right)dy =$

$f(-x)$. ▶

Замечание. Эквивалентная формулировка: $\mathcal{F}^4 = id$. Отсюда: все собственные числа оператора $\mathcal{F}$ – корни четвёртой степени из 1.

Вспомогательный дифференциальный оператор.

Рассмотрим задачу на собственные значения
$u''(x) - x^2u(x) = \mu u(x),\ x \in \mathbb{R};\quad u(\pm\infty) = 0.$
Оператор $\mathrm{L} : u \mapsto u'' - x^2u$ определён на S и L_2 – симметричен:
$(\mathrm{L}u, v) = (u, \mathrm{L}v)\ \forall u, v \in \mathrm{S}$. В частности, все собственные значения (если таковые имеются) вещественны, соответствующие им собственные функции ортогональны.

Собственные функции $\mathcal{F}$. Предварительные соображения.

Собственные функции $\mathcal{F}$. Предварительные соображения.

1. $\mathcal{F}\mathrm{L} = \mathrm{L}\mathcal{F}$. В частности, если u – собственная функция оператора L с собственным значением μ, то и функция $\mathcal{F}u$ – собственная, причем – с тем же собственным значением.

Собственные функции $\mathcal{F}$. Предварительные соображения.

1. $\mathcal{F}\mathrm{L} = \mathrm{L}\mathcal{F}$. В частности, если u – собственная функция оператора L с собственным значением μ, то и функция $\mathcal{F}u$ – собственная, причем – с тем же собственным значением.

2. $\partial^2 - x^2 = (\partial - x)(\partial + x) + (x\partial - \partial x) \implies L = (\partial - x)(\partial + x) - id \implies$. Отсюда: функция $u_0(x) = e^{-x^2/2}$ – собственная для L и соответствующее $\mu = -1$. Вместе с тем, $\mathcal{F}u_0 = u_0$.

Собственные функции $\mathcal{F}$. Предварительные соображения.

1. $\mathcal{F}\mathrm{L} = \mathrm{L}\mathcal{F}$. В частности, если u – собственная функция оператора L с собственным значением μ, то и функция $\mathcal{F}u$ – собственная, причем – с тем же собственным значением.

2. $\partial^2 - x^2 = (\partial - x)(\partial + x) + (x\partial - \partial x) \implies L = (\partial - x)(\partial + x) - id \implies$. Отсюда: функция $u_0(x) = e^{-x^2/2}$ – собственная для L и соответствующее $\mu = -1$. Вместе с тем, $\mathcal{F}u_0 = u_0$.

3. $L\partial = \partial L + 2x \implies Lu_0' = -u_0' + 2xu_0 = -3u_0'$, так что функция $u_1(x) = xe^{-x^2/2}$ – собственная для L и соответствующее $\mu = -3$. Вместе с тем, $\mathcal{F}u_1 = i\partial\mathcal{F}u_0 = iu_1$.

Собственные функции $\mathcal{F}$. Предварительные соображения.

1. $\mathcal{F}\mathrm{L} = \mathrm{L}\mathcal{F}$. В частности, если u – собственная функция оператора L с собственным значением μ, то и функция $\mathcal{F}u$ – собственная, причем – с тем же собственным значением.

2. $\partial^2 - x^2 = (\partial - x)(\partial + x) + (x\partial - \partial x) \implies L = (\partial - x)(\partial + x) - id \implies$. Отсюда: функция $u_0(x) = e^{-x^2/2}$ – собственная для L и соответствующее $\mu = -1$. Вместе с тем, $\mathcal{F}u_0 = u_0$.

3. $L\partial = \partial L + 2x \implies Lu_0' = -u_0' + 2xu_0 = -3u_0'$, так что функция $u_1(x) = xe^{-x^2/2}$ – собственная для L и соответствующее $\mu = -3$. Вместе с тем, $\mathcal{F}u_1 = i\partial\mathcal{F}u_0 = iu_1$.

4. Подстановка $u(x) = v(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}, \lambda = \mu + 1$, приводит к задаче

$$v'' - 2xv' = \lambda v, \quad v \text{ – полином.}$$

Существование собственных функций оператора $\mathcal{F}$.

Существование собственных функций оператора $\mathcal{F}$.

Степенные ряды

$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{\text{ур-е}}{\Longrightarrow}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_{n+2}(n+2)(n+1) + (2n+\lambda)c_n) = 0$$

$c_n = 0 \ \forall\, n > N \geq 2, \ c_N \neq 0 \Longrightarrow \ c_{N-1} = 0,$

$$\lambda = -2N, \ c_{N-2k} = -\frac{(N-2k+2)(N-2k+1)C_{N-2k+2}}{4k}, \ k = 1, \dots, [N/2].$$

Существование собственных функций оператора $\mathcal{F}$.

Степенные ряды

$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{\text{ур-е}}{\Longrightarrow}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_{n+2}(n+2)(n+1) + (2n+\lambda)c_n) = 0$$

$c_n = 0 \ \forall\, n > N \geq 2,\ c_N \neq 0 \Longrightarrow\ c_{N-1} = 0,$

$$\lambda = -2N,\ c_{N-2k} = -\frac{(N-2k+2)(N-2k+1)C_{N-2k+2}}{4k},\ k = 1, \ldots, [N/2].$$

$u_n(x) = v_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2},\ \mu_n = -(2n+1),\ v_0 \equiv 1,\ v_1(x) = x,\ \deg v_n = n$

Существование собственных функций оператора $\mathcal{F}$.

Степенные ряды

$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{\text{ур-е}}{\Longrightarrow}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (c_{n+2}(n+2)(n+1) + (2n+\lambda)c_n) = 0$$

$c_n = 0 \ \forall\, n > N \geq 2,\ c_N \neq 0 \Longrightarrow\ c_{N-1} = 0,$

$$\lambda = -2N,\ c_{N-2k} = -\frac{(N-2k+2)(N-2k+1)C_{N-2k+2}}{4k},\ k = 1, \ldots, [N/2].$$

$u_n(x) = v_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2},\ \mu_n = -(2n+1),\ v_0 \equiv 1,\ v_1(x) = x,\ \deg v_n = n$

$u_n,\ \ n = 0, 1, \ldots$ – собственные функции преобразования Фурье

$\hat{u}_n = \mathcal{F} u_n = v_n(i\partial)u_0 = \omega_n q_n u_0,\ \deg q_n = n, \omega_n^4 = 1, \Longrightarrow L\hat{u}_n = \mu_n \hat{u}_n \Longrightarrow$
$q_n'' - 2xq_n = -2nq \ \Longrightarrow q_n = \mathrm{const}\, v_n$

Распределения над $\mathbb{S}$

Распределения над S

Определение.

Последовательность функций $f_n \in \mathrm{S}$ сходится сильно в S к $f \in \mathrm{S}$, если $(1+x^2)^q \partial^p f_n \to (1+x^2)^q \partial^p f_, \ n \to \infty$ равномерно $\forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Сильная сходимость обозначается так: $f_n \xrightarrow{s} f$.

Распределения над S

Определение.

Последовательность функций $f_n \in \mathrm{S}$ сходится сильно в S к $f \in \mathrm{S}$, если $(1+x^2)^q \partial^p f_n \to (1+x^2)^q \partial^p f$, $n \to \infty$ равномерно $\forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Сильная сходимость обозначается так: $f_n \xrightarrow{s} f$.

Примеры.

1. $\frac{q(x)e^{-x^2}}{n} \xrightarrow{s} 0$, $n \to \infty$ для любого квазимногочлена q.
2. Пусть $M \in \mathrm{C}^\infty$ и все её производные – медленного роста, т.е. $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists q_m > 0 : \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^{-q_m}|(\partial^m M)(x)| < \infty \Longrightarrow$. Оператор $f \mapsto Mf$ непрерывен относительно сильной сходимости в S

Распределения над S

Определение.

Последовательность функций $f_n \in \mathrm{S}$ сходится сильно в S к $f \in \mathrm{S}$, если $(1+x^2)^q \partial^p f_n \to (1+x^2)^q \partial^p f_, \ n \to \infty$ равномерно $\forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Сильная сходимость обозначается так: $f_n \xrightarrow{s} f$.

Примеры.

1. $\frac{q(x)e^{-x^2}}{n} \xrightarrow{s} 0$, $n \to \infty$ для любого квазимногочлена q.
2. Пусть $M \in \mathrm{C}^\infty$ и все её производные – медленного роста, т.е. $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists q_m > 0: \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)^{-q_m} |(\partial^m M)(x)| < \infty \Longrightarrow$. Оператор $f \mapsto Mf$ непрерывен относительно сильной сходимости в S

Определение

Распределением (обощённой функцией) медленного роста называют линейный непрерывный функционал на S. Пространство распределений медленного роста обозначается S'.

Регулярные распределения

Примеры.

1. Пусть $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$: $\exists q : (1+x^2)^{-q} g \in \mathrm{L}_1$. Функционалы $\int g \partial^m f$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ – распределения.
2. Функционалы $\delta_h^{(m)} : f \mapsto (\partial^m f)(h)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ – распределения.

Регулярные распределения

Примеры.
1. Пусть $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$: $\exists q : (1+x^2)^{-q} g \in \mathrm{L}_1$. Функционалы $\int g \partial^m f$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ – распределения.
2. Функционалы $\delta_h^{(m)} : f \mapsto (\partial^m f)(h)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ – распределения.

Определение

1. Функция $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$ – медленного роста, если : $\exists q : (1+x^2)^{-q} g \in \mathrm{L}_1$.
2. Распределение $f \in \mathrm{S}'$ называется регулярным, если существует функция медленного роста $\check{f} : \langle f, \eta \rangle = \int \check{f} \eta dx \ \forall \eta \in \mathrm{S}$. Соответствие $\check{f} \mapsto f$ назовём канонической двойственностью.

Регулярные распределения

Примеры.
1. Пусть $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$: $\exists q : (1+x^2)^{-q} g \in \mathrm{L}_1$. Функционалы $\int g \partial^m f,\ \ m = 0, 1, 2, \dots$ – распределения.
2. Функционалы $\delta_h^{(m)} : f \mapsto (\partial^m f)(h),\ \ m = 0, 1, 2, \dots$ – распределения.

Определение

1. Функция $g \in \mathrm{L}_{1,loc}$ – медленного роста, если : $\exists q : (1+x^2)^{-q} g \in \mathrm{L}_1$.
2. Распределение $f \in \mathrm{S}'$ называется регулярным, если существует функция медленного роста $\check{f} : \langle f, \eta \rangle = \int \check{f} \eta dx \ \forall \eta \in \mathrm{S}$. Соответствие $\check{f} \mapsto f$ назовём канонической двойственностью.

Замечание 1. Отображение $\check{f} \mapsto f$ – взаимно-однозначно; точнее каноническая двойственность отображает класс функций медленного роста на свой образ взаимно-однозначно, и потому позволяет отождествлять функции, понимаемые в обычном смысле, и двойственные им регулярные распределения. *Указанное отождествление далее применяется по умолчанию.*

Сходимость распределений над S

Замечание 2. Дельта-функция нерегулярна, равно как все $\delta_h^{(m)}$.

Сходимость распределений над S

Замечание 2. Дельта-функция нерегулярна, равно как все $\delta_h^{(m)}$.

Определение. Последовательность распределений $f_k \in \mathrm{S}'$ сходится слабо к $f \in \mathrm{S}'$, если $\langle f_k, \eta \rangle \to \langle f, \eta \rangle,\ k \to \infty,\ \forall \eta \in \mathrm{S}$. Слабая сходимость f_k к f обозначается так: $f_k \xrightarrow{w} f$.

Замечание. Можно говорить о сходимости последовательности обычных функций в смысле распределений, если каноническая двойственность отождествляет эту последовательность со слабо сходящейся последовательностью распределений.

Сходимость распределений над S

Замечание 2. Дельта-функция нерегулярна, равно как все $\delta_h^{(m)}$.

Определение. Последовательность распределений $f_k \in \mathrm{S}'$ сходится слабо к $f \in \mathrm{S}'$, если $\langle f_k, \eta \rangle \to \langle f, \eta \rangle,\ k \to \infty,\ \forall \eta \in \mathrm{S}$. Слабая сходимость f_k к f обозначается так: $f_k \xrightarrow{w} f$.

Замечание. Можно говорить о сходимости последовательности обычных функций в смысле распределений, если каноническая двойственность отождествляет эту последовательность со слабо сходящейся последовательностью распределений.

Сходимость распределений над S

Замечание 2. Дельта-функция нерегулярна, равно как все $\delta_h^{(m)}$.

Определение. Последовательность распределений $f_k \in \mathrm{S}'$ сходится слабо к $f \in \mathrm{S}'$, если $\langle f_k, \eta\rangle \to \langle f, \eta\rangle,\ k \to \infty,\ \forall \eta \in \mathrm{S}$. Слабая сходимость f_k к f обозначается так: $f_k \xrightarrow{w} f$.

Замечание. Можно говорить о сходимости последовательности обычных функций в смысле распределений, если каноническая двойственность отождествляет эту последовательность со слабо сходящейся последовательностью распределений.

Примеры

1. $\forall m\ \delta_h^{(m)} \xrightarrow{w} 0 \quad h \to \infty$;
2. $\mathrm{e}_k(x) = \mathrm{e}^{ikx} \xrightarrow{w} 0,\ k \to \infty,\ ◀\ \langle \mathrm{e}_k, \eta\rangle = \int \mathrm{e}_k(x)\eta(x)\,dx = (\mathcal{F}\eta)(k) \to +0,\ \forall \eta \in \mathrm{S}\ ▶$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \to \delta_0^{(0)},\ t \to +0.$

Дифференцирование распределений

Дифференцирование распределений

Определение

Производной порядка m распределения $f \in \mathrm{S}'$ называется функционал

$$\langle \partial^m f, \eta \rangle = (-1)^m \langle f, \partial^m \eta \rangle \;\forall\; \eta \in \mathrm{S}.$$

Замечание. Производная любого порядка от распределения – распределение.

Дифференцирование распределений

Определение

Производной порядка m распределения $f \in \mathrm{S}'$ называется функционал

$$\langle \partial^m f, \eta \rangle = (-1)^m \langle f, \partial^m \eta \rangle \ \forall\ \eta \in \mathrm{S}.$$

Замечание. Производная любого порядка от распределения – распределение.

Примеры

1. $f \in \mathrm{C}^1$ – медленного роста *вместе с производной*, тогда классическая производная f' отождествляется с производной f в смысле распределений (последняя, следовательно, регулярна).

$$\blacktriangleleft\ \forall\ \eta \in \mathrm{S}: \ -\langle f, \partial\eta \rangle = -\int f \partial\eta dx = \lim_{r\to\infty} \left(-\ f\eta|_{-r}^{r} + \int\limits_{-r}^{r} \eta \partial f dx \right) = \int \eta \partial f dx \ \blacktriangleright$$

2. $\delta_h^{(m)} = (-1)^m \partial^m \delta_h^{(0)}$.

3. $\partial\theta = \delta_0^{(0)}$. $\blacktriangleleft\ \forall\ \eta \in \mathrm{S}: \ -\langle \theta, \partial\eta \rangle = -\int\limits_0^\infty \partial\eta dx = \eta(0) = \langle \delta_0^{(0)}, \eta \rangle \ \blacktriangleright$

Об умножении распределений.

Замечание. Производная регулярного распределения не обязана быть регулярной (см. пример 3). Более тонкий пример:
$g(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$, g – медленного роста, g' – нет,
$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\,\eta dx$ не сходится абсолютно, но

$$\langle \partial g, \eta\rangle = -\langle g, \partial\eta\rangle = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\,\eta dx.$$

Об умножении распределений.

Замечание. Производная регулярного распределения не обязана быть регулярной (см. пример 3). Более тонкий пример:
$g(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$, g – медленного роста, g' – нет,
$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\, \eta dx$ не сходится абсолютно, но

$$\langle \partial g, \eta \rangle = -\langle g, \partial \eta \rangle = \lim_{r \to \infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\, \eta dx.$$

Определение. Мультипликатором на S' назовём функцию $\mu \in \mathrm{C}^\infty$: $\partial^m \mu$ – медленного роста $\forall$ m. Класс мультипликаторов обозначим $\mathcal{M}$.

Об умножении распределений.

Замечание. Производная регулярного распределения не обязана быть регулярной (см. пример 3). Более тонкий пример:
$g(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$, g – медленного роста, g' – нет,
$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\, \eta dx$ не сходится абсолютно, но

$$\langle \partial g, \eta \rangle = -\langle g, \partial \eta \rangle = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\, \eta dx.$$

Определение. Мультипликатором на S' назовём функцию $\mu \in \mathrm{C}^\infty$: $\partial^m \mu$ – медленного роста $\forall$ m. Класс мультипликаторов обозначим $\mathcal{M}$.

Напоминание. Оператор $M : \eta \mapsto \mu\eta$ непрерывен $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$.

Об умножении распределений.

Замечание. Производная регулярного распределения не обязана быть регулярной (см. пример 3). Более тонкий пример:
$g(x) = \sin(\mathrm{e}^x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$, g – медленного роста, g' – нет,
$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\,\eta dx$ не сходится абсолютно, но

$$\langle \partial g, \eta\rangle = -\langle g, \partial\eta\rangle = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\,\eta dx.$$

Определение. Мультипликатором на S' назовём функцию $\mu \in \mathrm{C}^\infty$: $\partial^m \mu$ – медленного роста $\forall\ m$. Класс мультипликаторов обозначим $\mathcal{M}$.

Напоминание. Оператор $M : \eta \mapsto \mu\eta$ непрерывен $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$.

Определение. Пусть $\mu \in \mathcal{M}$; определим $M : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, полагая $\langle Mf, \eta\rangle = \langle f, \mu\eta\rangle$. Распределение Mf назовём произведением μf.

Дифференцирование произведения. Структура S'.

Замечание. Если f – регулярное распределение, то μf – регулярно, и канонически отождествляется с обычным поточечным произведением функций μ и $\check{f}$.

Теорема.

$\partial(\mu f) = \mu\partial f + (\partial\mu) f \ \forall\, \mu \in \mathcal{M},\ f \in \mathrm{S}.$

Дифференцирование произведения. Структура S'.

Замечание. Если f – регулярное распределение, то μf – регулярно, и канонически отождествляется с обычным поточечным произведением функций μ и $\check{f}$.

Теорема.

$\partial(\mu f) = \mu\partial f + (\partial\mu)f \ \forall\, \mu \in \mathcal{M}, \ f \in \mathrm{S}.$

Определение

Последовательность $f_k \in \mathrm{S}$ слабо фундаментальна, если числовые последовательности $\langle f_k, \eta\rangle$ фундаментальны $\forall\ \eta \in \mathbb{S}$.

Дифференцирование произведения. Структура S'.

Замечание. Если f – регулярное распределение, то μf – регулярно, и канонически отождествляется с обычным поточечным произведением функций μ и $\check{f}$.

Теорема.

$\partial(\mu f) = \mu \partial f + (\partial \mu) f \;\forall\, \mu \in \mathcal{M},\; f \in \mathrm{S}.$

Определение

Последовательность $f_k \in \mathrm{S}$ слабо фундаментальна, если числовые последовательности $\langle f_k, \eta \rangle$ фундаментальны $\forall\, \eta \in \mathbb{S}$.

Определение

Сходящиеся последовательности, имеющие общий предел, назовём эквивалентными.

Об устройстве пространства S'.

Теорема Лорана Шварца

Пусть f – линейный функционал над S. Следующие утверждения эквивалентны:

1. $f \in \mathrm{S}'$ (т.е. непрерывен);
2. $\exists\ g \in \mathrm{C}$ – медленного роста: $\langle f, \eta \rangle = \langle g, \partial^m \eta \rangle\ \forall\ \eta \in \mathbb{S}$;
3. $\exists\ \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – медленного роста: $\lim\limits_{k \to \infty} \langle f - g_k, \eta \rangle = 0\ \forall\ \eta \in \mathbb{S}$;
4. $\exists\ C > 0,\ m, n \in \mathbb{N}:\ |\langle f, \eta \rangle| \le C \max\limits_{p=0..n, q=0..m} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |(1+x^2)^{p/2} \partial^q \eta(x)|\ \forall\ \eta \in \mathbb{S}$.

Теорема

Слабо фундаментальная последовательность в S' последовательность слабо сходится.

Теорема

S' изоморфно пространству классов эквивалентности слабо сходящихся последовательностей функций медленного роста.