НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 3
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

25 марта 2020 г.

Преобразование Фурье распределений

Преобразование Фурье распределений

Определение

Преобразованием Фурье распределения $f \in \mathrm{S}'$ называется линейный функционал $\hat{f}$ на S, определённый равенствами $\langle \hat{f}, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{F}\eta \rangle$, $\eta \in S$.

Замечание 1. Соответствие $f \mapsto \hat{f}$ также называется преобразованием Фурье; сохраним за ним обозначение $\mathcal{F}$.

Преобразование Фурье распределений

Определение

Преобразованием Фурье распределения $f \in \mathrm{S}'$ называется линейный функционал $\hat{f}$ на S, определённый равенствами $\langle \hat{f}, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{F}\eta \rangle$, $\eta \in S$.

Замечание 1. Соответствие $f \mapsto \hat{f}$ также называется преобразованием Фурье; сохраним за ним обозначение $\mathcal{F}$.

Примеры

1. $f \in \mathrm{L}_1 \implies$
$2\pi\langle f, \mathcal{F}\eta \rangle = \int f(\xi) \int \eta(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} dx d\xi = \int \eta(x) \int \mathrm{e}^{-i\xi x} f(\xi) d\xi dx =$
$2\pi\langle \mathcal{F}f, \eta \rangle \implies$ Распределение $\mathcal{F}f$, $f \in \mathrm{L}_1$ отождествляется с обычным фурье-образом функции f, (последний – ограничен, т.е. медленного роста).

2. $\mathrm{e}_h(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{ihx}$, $h \in \mathbb{R}$.
$2\pi\mathcal{F}\delta = \mathrm{e}_0 \equiv 1$, $2\pi\mathcal{F}\delta_h = \mathrm{e}_{-h}$.

3. $\mathcal{F}\theta = \lim_{r\to\infty} \frac{\left(1-e^{-irx}\right)}{2\pi ix}$

◀ $2\pi\langle \theta, \mathcal{F}\eta \rangle = \int\limits_0^\infty \int \mathrm{e}^{-i\xi x} \eta(x) dx d\xi = \lim_{r\to\infty} \int \frac{\left(1-e^{-irx}\right)\eta(x)dx}{ix} = 2\pi\langle \mathcal{F}\theta, \eta \rangle$ ▶

ПФ распределений и сдвиги, инверсии и т.д

Определим

1. сдвиг $\mathcal{T}_h : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, $h \in \mathbb{R}$, полагая $\langle \mathcal{T}_h f, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{T}_{-h} \eta \rangle \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;
2. подобие $\mathcal{S}_\alpha : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, $\alpha > 0$, полагая
$\langle \mathcal{S}_\alpha f, \eta \rangle = \alpha^{-1} \langle f, \mathcal{S}_{\alpha^{-1}} \eta \rangle \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;
3. инверсию $\mathcal{J} : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, полагая $\langle \mathcal{J} f, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{J} \eta \rangle \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;
4. комплексное сопряжение $\mathcal{C} : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, полагая
$\langle \mathcal{C} f, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{C} \eta \rangle^* \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;

ПФ распределений и сдвиги, инверсии и т.д

Определим

1. сдвиг $\mathcal{T}_h : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, $h \in \mathbb{R}$, полагая $\langle \mathcal{T}_h f, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{T}_{-h}\eta \rangle \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;
2. подобие $\mathcal{S}_\alpha : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, $\alpha > 0$, полагая
$\langle \mathcal{S}_\alpha f, \eta \rangle = \alpha^{-1} \langle f, \mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\eta \rangle \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;
3. инверсию $\mathcal{J} : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, полагая $\langle \mathcal{J} f, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{J}\eta \rangle \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;
4. комплексное сопряжение $\mathcal{C} : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$, полагая
$\langle \mathcal{C} f, \eta \rangle = \langle f, \mathcal{C}\eta \rangle^* \ \forall \eta \in \mathrm{S}, \ f \in \mathrm{S}'$;

Замечание. Действие сдвигов, подобий, инверсии и сопряжения на регулярное распределение эквивалентно обычному действию этих преобразований на двойственную функцию медленного роста.

Теорема

Операторы $\mathcal{F}, \partial, \mathcal{J}, \mathcal{T}_h, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{C}$ непрерывны в S', и взаимодействуют друг с другом по тем же правилам, что и в случае их действия $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$. В частности, $2\pi\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}, \ \mathcal{F}^{-1} = 2\pi\mathcal{J}\mathcal{F} = 2\pi\mathcal{F}\mathcal{J}, \ \mathcal{F}\partial = i\xi\mathcal{F}$

Примеры

1. $\mathcal{J}\partial^m = (-1)^m \partial^m \mathcal{J}$

◀ $\langle \mathcal{J}\partial^m f, \eta\rangle = (-1)^m \langle f, \partial^m \mathcal{J}\eta\rangle = (-1)^m \langle f, (-1)^m \mathcal{J}\partial^m \eta\rangle$, ▶

Примеры

1. $\mathcal{J}\partial^m = (-1)^m \partial^m \mathcal{J}$
◀ $\langle \mathcal{J}\partial^m f, \eta\rangle = (-1)^m \langle f, \partial^m \mathcal{J}\eta\rangle = (-1)^m \langle f, (-1)^m \mathcal{J}\partial^m \eta\rangle$, ▶

2. $\mathcal{S}_\alpha \partial = \alpha^{-1} \partial \mathcal{S}_\alpha$
◀ $\langle \mathcal{S}_\alpha \partial f, \eta\rangle = \alpha^{-1} \langle f, \partial \mathcal{S}_{\alpha^{-1}} \eta\rangle = \alpha^{-2} \langle f, \mathcal{S}_{\alpha^{-1}} \partial \eta\rangle = \alpha^{-1} \langle \partial \mathcal{S}_\alpha f, \eta\rangle$ ▶

Примеры

1. $\mathcal{J}\partial^m = (-1)^m \partial^m \mathcal{J}$
◀ $\langle \mathcal{J}\partial^m f, \eta\rangle = (-1)^m \langle f, \partial^m \mathcal{J}\eta\rangle = (-1)^m \langle f, (-1)^m \mathcal{J}\partial^m \eta\rangle,$ ▶

2. $\mathcal{S}_\alpha \partial = \alpha^{-1}\partial \mathcal{S}_\alpha$
◀ $\langle \mathcal{S}_\alpha \partial f, \eta\rangle = \alpha^{-1}\langle f, \partial \mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\eta\rangle = \alpha^{-2}\langle f, \mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\partial\eta\rangle = \alpha^{-1}\langle \partial \mathcal{S}_\alpha f, \eta\rangle$ ▶

3. $\mathrm{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x) \implies 2\delta = \partial \mathrm{sgn} \implies \mathcal{S}_\alpha \delta = \alpha^{-1}\delta.$

Примеры

1. $\mathcal{J}\partial^m = (-1)^m\partial^m\mathcal{J}$
$\blacktriangleleft$ $\langle\mathcal{J}\partial^m f,\eta\rangle = (-1)^m\langle f,\partial^m\mathcal{J}\eta\rangle = (-1)^m\langle f,(-1)^m\mathcal{J}\partial^m\eta\rangle,$ $\blacktriangleright$

2. $\mathcal{S}_\alpha\partial = \alpha^{-1}\partial\mathcal{S}_\alpha$
$\blacktriangleleft$ $\langle\mathcal{S}_\alpha\partial f,\eta\rangle = \alpha^{-1}\langle f,\partial\mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\eta\rangle = \alpha^{-2}\langle f,\mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\partial\eta\rangle = \alpha^{-1}\langle\partial\mathcal{S}_\alpha f,\eta\rangle$ $\blacktriangleright$

3. $\mathrm{sgn}(x) = \theta(x) - \theta(-x) \implies 2\delta = \partial\mathrm{sgn} \implies \mathcal{S}_\alpha\delta = \alpha^{-1}\delta.$

4. Пусть $a: k\mapsto a_k,\ k\in\mathbb{Z}$ – медленного роста, тогда ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathrm{e}^{ikx}$ сходится в S', и $\mathcal{F}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathrm{e}_k = 2\pi\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k,\quad \delta_k \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{T}_{-k}\delta = \delta_k^{(0)} = \delta(\xi-k).$
$\blacktriangleleft$ $\mathcal{F}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathrm{e}_k = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathcal{F}\mathrm{e}_k = 2\pi\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathcal{F}\mathcal{F}\delta_{-k} = 2\pi\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k\mathcal{J}\delta_{-k},$ и $\langle\mathcal{J}\delta_{-k},\eta\rangle = \langle\mathcal{T}_k\delta,\mathcal{J}\eta\rangle = \langle\delta,\mathcal{T}_{-k}\mathcal{J}\eta\rangle = \eta(k) = \langle\delta_k,\eta\rangle,$ так как $(\mathcal{T}_{-x}\mathcal{J}\eta)(y) = (\mathcal{J}\eta)(y-x) = \eta(x-y).$ $\blacktriangleright$

Ещё примеры

Определение. $\langle \mathrm{x}^{-1}, \eta \rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon^{-1}} \frac{(\eta(x) - \eta(0))dx}{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{v.p.} \int \frac{\eta(x)dx}{x}$

Ещё примеры

Определение. $\langle \mathrm{x}^{-1}, \eta\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \frac{(\eta(x)-\eta(0))dx}{x} \overset{\text{def}}{=} \text{v.p.} \int \frac{\eta(x)dx}{x}$

5. $\mathcal{S}_\alpha \mathrm{x}^{-1} = \alpha^{-1}\mathrm{x}^{-1}$ ◀ $\langle \mathcal{S}_\alpha \mathrm{x}^{-1}, \eta\rangle = \alpha^{-1}\langle \mathrm{x}^{-1}, \mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\eta\rangle =$
$\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \frac{(\eta(x/\alpha)-\eta(0))dx}{\alpha x} = \alpha^{-1}\langle \mathrm{x}^{-1}, \eta\rangle$ ▶

Ещё примеры

Определение. $\langle \mathrm{x}^{-1}, \eta\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \frac{(\eta(x)-\eta(0))dx}{x} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{v.p.} \int \frac{\eta(x)dx}{x}$

5. $\mathcal{S}_\alpha \mathrm{x}^{-1} = \alpha^{-1}\mathrm{x}^{-1}$ ◀ $\langle \mathcal{S}_\alpha \mathrm{x}^{-1}, \eta\rangle = \alpha^{-1}\langle \mathrm{x}^{-1}, \mathcal{S}_{\alpha^{-1}}\eta\rangle =$
$\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \frac{(\eta(x/\alpha)-\eta(0))dx}{\alpha x} = \alpha^{-1}\langle \mathrm{x}^{-1}, \eta\rangle$ ▶

6. $\mathrm{x}^{-1} = \partial \ln|\mathrm{x}|$

◀ $\langle \ln|\mathrm{x}|, \partial\eta\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \ln|x|\partial\eta dx = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \ln x \mathcal{P}_0\partial\eta dx =$

$2\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \ln x \partial\mathcal{P}_1\eta dx = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\ln x \mathcal{P}_1\eta\Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} - \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \frac{\mathcal{P}_1\eta dx}{x}\right) =$

$-\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \frac{\mathcal{P}_1\eta dx}{x} = -\mathrm{v.p.}\int \frac{\eta dx}{x}$; ▶ $2\mathcal{P}_j\eta = \eta + (-1)^j \mathcal{J}\eta,\ j = 0, 1.$

И ещё примеры...

И ещё примеры...

7. $2\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1} = -i\,\mathrm{sgn}$

И ещё примеры...

7. $2\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1} = -i\,\mathrm{sgn}$

◀ $2\pi\langle\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1},\eta\rangle = 2\pi\langle\mathrm{x}^{-1},\mathcal{F}\eta\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}} \left(\int \mathrm{e}^{-i\xi x}\eta(\xi)d\xi\right)\frac{dx}{x} =$
$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\eta(\xi)\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}}\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}dx}{x}d\xi\right) = -2i\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\eta(\xi)\int\limits_{\varepsilon<x<\varepsilon^{-1}}\frac{\sin(\xi x)dx}{x}d\xi\right) =$
$-\pi i\int\eta(\xi)\,\mathrm{sgn}\,\xi d\xi.$ ▶

И ещё примеры...

7. $2\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1} = -i\,\mathrm{sgn}$

◀ $2\pi\langle\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1},\eta\rangle = 2\pi\langle\mathrm{x}^{-1},\mathcal{F}\eta\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}}\left(\int \mathrm{e}^{-i\xi x}\eta(\xi)d\xi\right)\frac{dx}{x} =$
$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\eta(\xi)\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}}\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}dx}{x}d\xi\right) = -2i\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\eta(\xi)\int\limits_{\varepsilon<x<\varepsilon^{-1}}\frac{\sin(\xi x)dx}{x}d\xi\right) =$
$-\pi i\int\eta(\xi)\,\mathrm{sgn}\,\xi d\xi.$ ▶

8. $\mathcal{F}\theta = \lim_{r\to\infty}\frac{\left(1-e^{-irx}\right)}{2\pi ix} = \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{i\mathrm{x}^{-1}}{\pi}\right)$

И ещё примеры...

7. $2\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1} = -i\,\mathrm{sgn}$

◀ $2\pi\langle\mathcal{F}\mathrm{x}^{-1},\eta\rangle = 2\pi\langle\mathrm{x}^{-1},\mathcal{F}\eta\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}}\left(\int \mathrm{e}^{-i\xi x}\eta(\xi)d\xi\right)\frac{dx}{x} =$
$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\eta(\xi)\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon^{-1}}\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}dx}{x}d\xi\right) = -2i\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\eta(\xi)\int\limits_{\varepsilon<x<\varepsilon^{-1}}\frac{\sin(\xi x)dx}{x}d\xi\right) =$
$-\pi i\int\eta(\xi)\mathrm{sgn}\,\xi d\xi.$ ▶

8. $\mathcal{F}\theta = \lim_{r\to\infty}\frac{\left(1-e^{-irx}\right)}{2\pi ix} = \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{i\mathrm{x}^{-1}}{\pi}\right)$

◀ слабый в S' $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\left(1-e^{-irx}\right)}{2\pi ix} = \lim\limits_{r\to\infty}\frac{\sin(rx)-i(1-\cos(rx))}{2\pi x} = \frac{\delta}{2} - \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1-\cos(rx)}{2\pi x}$;
$\lim_{r\to\infty}\int\frac{(1-\cos(rx))\eta(x)dx}{2\pi x} = \int\frac{(1-\cos(rx))\mathcal{P}_{\mathbf{1}}\eta(x)dx}{2\pi x} = \mathrm{v.p.}\int\frac{\eta(x)dx}{2\pi x} + o(1),\ r\to\infty,$
т.к. $\frac{\mathcal{P}_{\mathbf{1}}\eta(x)}{x}\in\mathrm{L}_1$ ▶.

Свёртка обобщённой и основной функций-I.

Свёртка обобщённой и основной функций-I.

Свёртка функций из L_1

Лемма 1. Пусть $f, g \geq 0,\ f, g \in \mathrm{S} \implies \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

◀ $\int\int f(x-y)g(y)dxdy = \int\int f(x-y)dxg(y)dy = \int g(y)dy \int f(x)dx$ ▶

Свёртка обобщённой и основной функций-I.

Свёртка функций из L_1

Лемма 1. Пусть $f, g \geq 0,\ f, g \in \mathrm{S} \implies \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

◀ $\int\int f(x-y)g(y)dxdy = \int\int f(x-y)dxg(y)dy = \int g(y)dy \int f(x)dx$ ▶

Свёртка функций из S

Лемма 2. $f, g \in \mathrm{S} \implies f * g \in \mathrm{S};\ \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F}f\mathcal{F}g$.

Свёртка обобщённой и основной функций-I.

Свёртка функций из L_1

Лемма 1. Пусть $f, g \geq 0,\ f, g \in \mathrm{S} \implies \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

◀ $\int \int f(x-y) g(y) dx dy = \int \int f(x-y) dx g(y) dy = \int g(y) dy \int f(x) dx$ ▶

Свёртка функций из S

Лемма 2. $f, g \in \mathrm{S} \implies f * g \in \mathrm{S};\ \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F} f \mathcal{F} g$.

◀ По лемме 1 $(f * g) \in \mathrm{L}_1 \implies \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F} f \mathcal{F} g \in \mathrm{S} \implies (f * g) \in \mathrm{S}$ ▶

Свёртка обобщённой и основной функций-I.

Свёртка функций из L_1

Лемма 1. Пусть $f, g \geq 0,\ f, g \in \mathrm{S} \implies \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

◀ $\int \int f(x-y) g(y) dx dy = \int \int f(x-y) dx g(y) dy = \int g(y) dy \int f(x) dx$ ▶

Свёртка функций из S

Лемма 2. $f, g \in \mathrm{S} \implies f * g \in \mathrm{S};\ \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F} f \mathcal{F} g$.

◀ По лемме 1 $(f * g) \in \mathrm{L}_1 \implies \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F} f \mathcal{F} g \in \mathrm{S} \implies (f * g) \in \mathrm{S}$ ▶

Определим свёртку $f \in \mathrm{S}',\ \eta \in \mathrm{S}$,

полагая $(f * \eta)(x) = \langle f, \mathcal{T}_{-x} \mathcal{J} \eta \rangle$

Свёртка обобщённой и основной функций-I.

Свёртка функций из L_1

Лемма 1. Пусть $f, g \geq 0,\ f, g \in \mathrm{S} \implies \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

◀ $\int\int f(x-y)g(y)dxdy = \int\int f(x-y)dxg(y)dy = \int g(y)dy \int f(x)dx$ ▶

Свёртка функций из S

Лемма 2. $f, g \in \mathrm{S} \implies f * g \in \mathrm{S};\ \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F} f \mathcal{F} g$.

◀ По лемме 1 $(f * g) \in \mathrm{L}_1 \implies \mathcal{F}(f * g) = 2\pi \mathcal{F} f \mathcal{F} g \in \mathrm{S} \implies (f * g) \in \mathrm{S}$ ▶

Определим свёртку $f \in \mathrm{S}',\ \eta \in \mathrm{S}$,

полагая $(f * \eta)(x) = \langle f, \mathcal{T}_{-x} \mathcal{J} \eta \rangle$

Замечание 1. Для регулярных распределений данное определение эквивалентно обычному (т.к. $(\mathcal{T}_{-x} \mathcal{J} \eta)(y) = (\mathcal{J} \eta)(y - x) = \eta(x - y)$)

Свёртка обобщённой и основной функций-II.

Свёртка обобщённой и основной функций-II.

Теорема о свертке.

$\forall f \in \mathrm{S}', \ \psi, \eta \in \mathrm{S}$

(i) $\quad f * \eta \in \mathcal{M}; \partial(f * \eta) = f * (\partial \eta) = (\partial f) * \eta;$

(ii) $\quad \langle f * \eta, \psi \rangle = \langle f, \psi * \mathcal{J}\eta \rangle;$

(ii) $\quad \mathcal{F}(f * \eta) = 2\pi \mathcal{F}\eta \mathcal{F}f.$

◀

Свёртка обобщённой и основной функций-II.

Теорема о свертке.

$\forall f \in \mathrm{S}', \ \psi, \eta \in \mathrm{S}$

$(i) \quad f * \eta \in \mathcal{M}; \partial(f * \eta) = f * (\partial\eta) = (\partial f) * \eta;$

$(ii) \quad \langle f * \eta, \psi \rangle = \langle f, \psi * \mathcal{J}\eta \rangle;$

$(ii) \quad \mathcal{F}(f * \eta) = 2\pi \mathcal{F}\eta \mathcal{F}f.$

◀

Шаг 1.

$\bar{\eta} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{J}\eta; \ g(x) \overset{\mathrm{def}}{=} (f * \eta)(x) = \langle f, \mathcal{T}_{-x}\bar{\eta} \rangle;$

$\mathcal{T}_h \eta \xrightarrow{\mathrm{S}} \mathcal{T}_s \eta, \quad h \to s \ \forall \ \eta \in \mathrm{S} \implies \ g = f * \eta \in \mathrm{C}.$

Свёртка обобщённой и основной функций-II.

Теорема о свертке.

$\forall f \in \mathrm{S}', \ \psi, \eta \in \mathrm{S}$
(*i*) $f * \eta \in \mathcal{M}; \partial(f * \eta) = f * (\partial\eta) = (\partial f) * \eta;$
(*ii*) $\langle f * \eta, \psi \rangle = \langle f, \psi * \mathcal{J}\eta \rangle;$
(*ii*) $\mathcal{F}(f * \eta) = 2\pi \mathcal{F}\eta \mathcal{F}f.$
◀

Шаг 1.

$\bar{\eta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{J}\eta; \ g(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f * \eta)(x) = \langle f, \mathcal{T}_{-x}\bar{\eta} \rangle;$
$\mathcal{T}_h\eta \xrightarrow{\mathrm{S}} \mathcal{T}_s\eta, \quad h \to s \ \forall \ \eta \in \mathrm{S} \implies \ g{=}f * \eta \in \mathrm{C}.$

Шаг 2

Теорема Шварца $\implies \ \exists \ C > 0, \ m, n \in \mathbb{N} : \ |g(x)| = |\langle f, \mathcal{T}_{-x}\bar{\eta} \rangle| \leq$
$C \max\limits_{p=0..n, q=0..m} \sup\limits_{y} |(1 + y^2)^{p/2} \partial_y^q \eta(x - y)| \leq$

Доказываем теорему о свёртке.

Завершаем шаг 2

$\leq C \max\limits_{p=0..n, q=0..m} \sup\limits_{z} \left| \left(\frac{1+(x-z)^2}{1+z^2}\right)^{p/2} \left(1+z^2\right)^{p/2} \partial_z^q \eta(z) \right| \leq$
$2^n C \left(1+x^2\right)^{n/2} \max\limits_{p=0..n, q=0..m} \sup\limits_{z} \left| \left(1+z^2\right)^{p/2} \partial_z^q \eta(z) \right| \implies g$ – медленного роста.

Доказываем теорему о свёртке.

Завершаем шаг 2

$$\leq C \max_{p=0..n,q=0..m} \sup_z \left| \left(\frac{1+(x-z)^2}{1+z^2}\right)^{p/2} \left(1+z^2\right)^{p/2} \partial_z^q \eta(z) \right| \leq$$

$$2^n C \left(1+x^2\right)^{n/2} \max_{p=0..n,q=0..m} \sup_z \left| \left(1+z^2\right)^{p/2} \partial_z^q \eta(z) \right| \implies g$$ – медленного роста.

Шаг 3

$g = f * \eta \in \mathrm{C}$ – медленного роста

$$\implies \langle f*\eta, \psi\rangle = \int g(x)\psi(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} g(x_k)\psi(x_k)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \langle f, \mathcal{T}_{-x_k}\bar{\eta}\rangle \psi(x_k)}{N} =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle f, \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \psi(x_k)\mathcal{T}_{-x_k}\bar{\eta}}{N} \right\rangle = \left\langle f, \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \psi(x_k)\mathcal{T}_{-x_k}\bar{\eta}}{N} \right\rangle,$$ в силу

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \psi(x_k)\mathcal{T}_{-x_k}\bar{\eta}}{N} \xrightarrow{\mathrm{S}} \bar{\eta}*\psi \implies \langle f*\eta, \psi\rangle = \langle f, \bar{\eta}*\psi\rangle.$$

Всё ещё доказываем теорему о свёртке.

Пояснения к шагу 3

$$\sigma_N = N^{-1}\sum_{k=1}^{N}\psi(x_k)\mathcal{T}_{-x_k}\bar{\eta} \in \mathrm{S};$$

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N(y) = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\psi(x_k)\eta(x_k-y)}{N} = \int \psi(x)\eta(x-y)dx = (\psi * \bar{\eta})(y).$$

Всё ещё доказываем теорему о свёртке.

Пояснения к шагу 3

$$\sigma_N = N^{-1}\sum_{k=1}^{N}\psi(x_k)\mathcal{T}_{-x_k}\bar\eta \in \mathrm{S};$$

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N(y) = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\psi(x_k)\eta(x_k-y)}{N} = \int\psi(x)\eta(x-y)dx = (\psi*\bar\eta)(y).$$

Шаг 4.

$\langle\partial(f*\eta),\psi\rangle = -\langle f*\eta,\partial\psi\rangle = -\langle f,(\partial\psi)*\bar\eta\rangle = -\langle f,\psi*(\partial\bar\eta)\rangle = \langle f,\psi*\mathcal{J}(\partial\eta)\rangle =$
$\langle f*(\partial\eta),\psi\rangle = -\langle f,\partial(\psi*\bar\eta)\rangle = \langle\partial f,(\psi*\bar\eta)\rangle = \langle(\partial f)*\eta,\psi\rangle \implies$
$\partial(f*\eta) = (\partial f)*\eta = f*(\partial\eta)\in\mathrm{C}$ и медленного роста $\implies f*\eta\in\mathcal{M}$.

Всё ещё доказываем теорему о свёртке.

Пояснения к шагу 3

$$\sigma_N = N^{-1}\sum_{k=1}^{N}\psi(x_k)\mathcal{T}_{-x_k}\bar{\eta} \in \mathrm{S};$$

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N(y) = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N}\psi(x_k)\eta(x_k-y)}{N} = \int\psi(x)\eta(x-y)dx = (\psi*\bar{\eta})(y).$$

Шаг 4.

$\langle\partial(f*\eta),\psi\rangle = -\langle f*\eta,\partial\psi\rangle = -\langle f,(\partial\psi)*\bar{\eta}\rangle = -\langle f,\psi*(\partial\bar{\eta})\rangle = \langle f,\psi*\mathcal{J}(\partial\eta)\rangle =$
$\langle f*(\partial\eta),\psi\rangle = -\langle f,\partial(\psi*\bar{\eta})\rangle = \langle\partial f,(\psi*\bar{\eta})\rangle = \langle(\partial f)*\eta,\psi\rangle \implies$
$\partial(f*\eta) = (\partial f)*\eta = f*(\partial\eta) \in \mathrm{C}$ и медленного роста $\implies f*\eta\in\mathcal{M}$.

Шаг 5.

$\langle\mathcal{F}(f*\eta),\psi\rangle = \langle f*\eta,\mathcal{F}\psi\rangle = \langle f,(\mathcal{F}\psi)*\bar{\eta}\rangle = \langle f,\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\mathcal{F}\psi)*\bar{\eta}\rangle =$
$2\pi\langle f,\mathcal{F}^{-1}((\mathcal{F}^2\psi)(\mathcal{F}\mathcal{J}\eta))\rangle = \langle f,\mathcal{F}^{-1}((\mathcal{J}\psi)(\mathcal{J}\mathcal{F}\eta))\rangle = \langle f,\mathcal{F}^{-1}\mathcal{J}(\psi(\mathcal{F}\eta))\rangle =$
$2\pi\langle f,\mathcal{F}(\psi(\mathcal{F}\eta))\rangle = 2\pi\langle(\mathcal{F}\eta)(\mathcal{F}f),\psi\rangle$ ▶

Пояснения к теореме.

Пояснения к теореме.

Мультпликаторы

Пусть $\hat{M} \in \mathrm{S}'$. Можно задать мультипликаторное преобразования (оператор)

$$\eta \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\hat{M}(\mathcal{F}\eta)) = (2\pi)^{-1}(M * \eta), \;\; M = \mathcal{F}^{-1}\hat{M}$$

Пояснения к теореме.

Мультипликаторы

Пусть $\hat{M} \in \mathrm{S}'$. Можно задать мультипликаторное преобразования (оператор)

$$\eta \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\hat{M}(\mathcal{F}\eta)) = (2\pi)^{-1}(M * \eta), \;\; M = \mathcal{F}^{-1}\hat{M}$$

Последовательные свёртки

Формально $\mathcal{F}^{-1}\hat{M}_1\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{M}_2\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\hat{M}_1\hat{M}_2\mathcal{F}$. Хотя это не всегда правильно, но приводит к ценным догадкам. Например, равенство $\pi^{-1}\mathrm{x}^{-1}* = -i\mathcal{F}\mathrm{sgn}\mathcal{F}$ формально влечёт $\pi^{-1}\mathrm{x}^{-1} * (\pi^{-1}\mathrm{x}^{-1}* = -\mathrm{id}$, что правильно (при определённых условиях).

Пояснения к теореме.

Мультпликаторы

Пусть $\hat{M} \in \mathrm{S}'$. Можно задать мультипликаторное преобразования (оператор)

$$\eta \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\hat{M}(\mathcal{F}\eta)) = (2\pi)^{-1}(M * \eta), \;\; M = \mathcal{F}^{-1}\hat{M}$$

Последовательные свёртки

Формально $\mathcal{F}^{-1}\hat{M}_1\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{M}_2\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\hat{M}_1\hat{M}_2\mathcal{F}$. Хотя это не всегда правильно, но приводит к ценным догадкам. Например, равенство $\pi^{-1}\mathrm{x}^{-1}* = -i\mathcal{F}\mathrm{sgn}\mathcal{F}$ формально влечёт $\pi^{-1}\mathrm{x}^{-1} * (\pi^{-1}\mathrm{x}^{-1}* = -\mathrm{id}$, что правильно (при определённых условиях).