НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 4
ФИНИТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, ФИЛЬТРАЦИЯ, УСРЕДНЕНИЕ. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ И СПЕКТР МОЩНОСТИ

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

12 апреля 2020 г.

Финитные функции.

Финитные функции.

Определение 1. Пусть f – непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{null}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \{x : \exists \delta > 0 : \ f(y) = 0, \ \forall\, y : |x - y| < \delta\}; \quad \mathrm{supp}\ f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{null}\, f.$$

Множество $\mathrm{null}\, f$ называют *нуль-множеством*, $\mathrm{supp}\, f$ – *носителем* f.

Замечание 1. Нуль-множество открыто, а носитель – замкнут.

Пример 1. Носитель функции $f(x) = \sin x$ совпадает с $\mathbb{R}$. Мораль: изолированные нули в носитель не включаются.

Пример 2. $f(x) = \theta(1 - x^2)(1 - x^2)$, $\mathrm{supp}\ f = [-1, 1]$.

Определение 2 $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ называется финитной, если $\mathrm{supp}\ f$ – компакт.

Замечание 2. Финитность эквивалентна ограниченности носителя.

Определение 3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\ell \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$,
$\mathrm{C}_0^\ell(\Omega) \overset{\mathrm{def}}{=} \{g \in \mathrm{C}^\ell(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}\, g \subset \Omega\}$.

Пример 3. $f(x) = \theta(1 - x^2)(1 - x^2)^{1+\ell} \implies f \in \mathrm{C}_0^\ell\{|x| < 1 + \varepsilon\}\, \forall \varepsilon > 0$;

$f(x) = \theta(1 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}} \implies f \in \mathrm{C}_0^\infty\{|x| < 1 + \varepsilon\}\, \forall \varepsilon > 0.$

Разбиение единицы

Разбиение единицы

Пусть шары B_k образуют покрытие открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причём $\forall x \in \Omega$ число шаров $B_k \ni x$ конечно. Такие покрытия называют *локально-конечными*.

Лемма 1. Для любого открытого множества найдётся локально-конечное покрытие шарами радиусов, не больших произвольно заданного $\rho > 0$.

Доказательство пропускаем.

Определение 4. Разбиением единицы на Ω, подчинённым локально-конечному покрытию $\{B_k\}$ называется счётное множество функций $\psi_k \in \mathrm{C}_0^\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:
(i) $\operatorname{supp} \psi_k = \bar{B}_k$;
(ii) $\sum\limits_k \psi_k(x) = 1 \ \forall\ x \in \Omega$.

Замечание 3. Ряд в п. (ii) данного определения – конечная сумма. Это вытекает из локальной конечности покрытия.

Предложение 1. На любом открытом множестве найдётся разбиение единицы, подчинённое покрытию этого множества шарами произвольно заданного радиуса.

Носитель и нуль-множество распределения

Носитель и нуль-множество распределения

◀ Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Находим его локально-конечное покрытие шарами $B_k = \{|x - x_k| < \rho_k\}$, $\rho_k \le \rho$ (по лемме 1). Вводим

$$\phi(x) = \theta(1 - x^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}; \quad \phi_k = \phi\left(\frac{x - x_k}{\rho_k}\right),$$

где x_k – центры B_k. Замечаем, что $\sum_k \phi_k(x) > 0 \; \forall\, x \in \Omega$, и полагаем

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sum\limits_k \phi_k(x)}. \qquad \blacktriangleright$$

Определение 5. Пусть $f \in \mathrm{S}'$. $f = 0$ в окрестности N_x точки x, если $\langle f, \eta\rangle = 0 \; \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty : \operatorname{supp}\eta \subset N_x$.

Определение 6. Пусть $f \in \mathrm{S}'$, $\operatorname{null} f \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \exists\, N_x : f = 0 \text{ на } N_x\}$, где N_x – окрестность точки x; $\operatorname{supp} f \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{null} f$. Множество $\operatorname{null} f$ называют *нуль-множеством*, $\operatorname{supp} f$ – *носителем* f.

Замечание 4. Нуль-множество обощённой функции (распределение) открыто, а носитель – замкнут.

Финитные распределения.

Финитные распределения.

Предложение 2. $\langle f, \eta \rangle = 0 \ \forall \, \eta \in \mathrm{S} : \ \operatorname{supp} \eta \subset \operatorname{null} f.$

◄ Так как $\operatorname{supp} \eta$ – замкнутое подмножество открытого множества $\operatorname{null} f = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f$, $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} \eta) = \delta > 0$. Полагаем $\Omega = \{x : \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} \eta) < \delta/2\}$. Имеем $\operatorname{null} f \supset \Omega \supset \operatorname{supp} \eta$. Выбираем покрытие Ω шарами B_k радиусов, меньших $\delta/4$, и такое, что B_k образуют локально-конечное покрытие Ω. Считаем, что $\bar{B}_k \subset \operatorname{null} f \ \forall \, k$. Пусть функции ψ_k образуют разбиение единицы, подчинённое указанному покрытию. Имеем

$$\langle f, \eta \rangle = \sum_k \langle f, \eta\psi_k \rangle, \ \text{где } \langle f, \eta\psi_k \rangle = 0 \ \forall \, k$$

так как $\operatorname{supp} \eta\psi_k \subset B_k \subset \operatorname{null} f$ ►.

Определение 7. $f \in \mathrm{S}'$ финитно $\Leftrightarrow$ $\operatorname{supp} \ f$ – компакт.

Пример 4. $f(x) = \theta(1 - x^2)$ – регулярное финитное распределение; $\operatorname{supp} f = [-1, 1]$; δ-функция $\langle \delta, \eta \rangle = \eta(0)$ финитна; $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

Замечание 5. Если $\forall \ \mu \in \mathcal{M}, f \in \mathrm{S}' \implies \operatorname{supp}(\mu f) = \operatorname{supp} \mu \cap \operatorname{supp} f$; $\operatorname{supp} \mu \cap \operatorname{supp} f = \varnothing \implies \mu f = 0 \Leftrightarrow \langle \mu f, \eta \rangle = 0 \ \forall \eta \in \mathrm{S}.$

Теорема Винера-Пэли-Шварца

Теорема Винера-Пэли-Шварца

Теорема *(Винер-Пэли-Шварц)*. Пусть $f \in \mathrm{S}' : \ \operatorname{supp} f \subset \{|x| < a\}, \ a < \infty$. Тогда

(i) $\mathcal{F}f$ допускает аналитическое продолжение до целой функции $\tilde{f} = \tilde{f}(\zeta)$ $\zeta = \xi + i\sigma$;

(ii) это продолжение определено равенством

$$\tilde{f}(\zeta) = \langle f, \eta \mathrm{e}_\zeta \rangle, \ e_\zeta(x) = e^{-i\zeta x}$$

$\forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty : \ \eta \equiv 1$ на некотором открытом множестве $E \supset \operatorname{supp} f$.

(iii) $\exists \ p = p(f), \varepsilon = \varepsilon(f), C = C(\varepsilon, f)$:

$$|\tilde{f}(\xi + i\sigma)| \leq C(1 + |\xi|^p)\mathrm{e}^{(a+\varepsilon)|\sigma|};$$

(iv) утверждения пп. (i)-(iii) могут быть обращены; именно, для целой функции $\tilde{f}$, допускающей оценку, указанную в п. (iii), найдётся $f \in \mathrm{S}'$ такая, что $\operatorname{supp} f \subset \{|x| < a\}$, $\tilde{f}$ есть аналитическое продолжение $\mathcal{F}f$, и имеет место равенство п. (ii).

Сглаживание.

Сглаживание.

Выберем измеримую функцию $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на такую, что

$$\mu(x) > 0 \; \forall \, x > 0, \; \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu(x) \, dx = 1.$$

Функцию μ с указанными свойствами называют *усредняющим ядром*. Положим

$$\mu_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \mu \left(\frac{x}{\varepsilon} \right).$$

«Сглаживание» (aka «регуляризация») распределения $f \in \mathrm{S}'$ заключается в свёртывании с усредняющим ядром из S:

$$f_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} f * \mu_\varepsilon, \text{ где } \mu \in \mathrm{S}.$$

Предложение 3. Пусть $f \in \mathrm{S}', \; \mu \in \mathrm{S}, \eta \in \mathrm{S}$, тогда
(i) $\eta_\varepsilon \in \mathrm{S}$, и $\eta_\varepsilon \stackrel{S}{\to} \eta$, $\varepsilon \to +0$
(ii) $f_\varepsilon \in \mathcal{M}$ и $f_\varepsilon \to f$ в S';
(iii) Если f финитно, то $f_\varepsilon \in \mathrm{S}$; если при этом $\operatorname{supp} \mu \subset \{|x| < 1\}$, то $f_\varepsilon \in \mathrm{C}_0^\infty$ и $\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset \{\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) < \varepsilon\}$.

Доказательство предложения 3

Доказательство предложения 3

◀ Включение $f_\varepsilon \in \mathcal{M}$ – одно из утверждений теоремы о свёртке, доказанной ранее. Рассмотрим η_ε.

$$\mu_\varepsilon, \eta \in \mathrm{S} \implies \widehat{\mu_\varepsilon}, \widehat{\eta} \in \mathrm{S} \implies \widehat{\mu_\varepsilon}\widehat{\eta} \in \mathrm{S} \implies \eta_\varepsilon \in \mathrm{S}$$

(по теореме о свёртке). Докажем сходимость $\eta_\varepsilon \xrightarrow{S} \eta$, $\varepsilon \to +0$. Ввиду сильной непрерывности $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$, доказываем сходимость $\mathcal{F}\eta_\varepsilon = 2\pi\widehat{\mu_\varepsilon}\hat{\eta} \xrightarrow{S} \hat{\eta}$, $\varepsilon \to +0$. Так как $\widehat{\mu_\varepsilon}(\xi) = \hat{\mu}(\varepsilon\xi)$, и $2\pi\hat{\mu}(0) = \int \mu\, dx = 1$, имеем

$$(1 + |\xi|^2)^p(2\pi\widehat{\mu_\varepsilon}(\xi) - 1)\eta(\xi) = 2\pi(1 + |\xi|^2)^p(\hat{\mu}(\varepsilon\xi) - \mu(0))\eta(\xi) \implies$$

$$\sup(1 + |\xi|^2)^p|(2\pi\widehat{\mu_\varepsilon}(\xi) - 1)\eta(\xi)| \leq 2\pi\varepsilon \sup|\nabla\mu| \sup|(1 + |\xi|^2)^p|\xi|\eta(\xi)| \to +0,$$

$\varepsilon \to +0$, где взятия верхних граней и интегрирования производятся по $\mathbb{R}^n$. Аналогично доказываем равномерную сходимость

$$(1 + |\xi|^2)^p\partial^q(\widehat{\mu_\varepsilon}(\xi) - 1)\eta(\xi) \to 0, \ \ q \neq 0,$$

и этим завершаем (i). Далее, по теореме о свёртке и ввиду (i), $\langle f_\varepsilon, \eta\rangle = \langle f, \eta * (\mathcal{J}\mu_\varepsilon)\rangle \to \langle f, \eta\rangle$ (где $\mathcal{J}$ – инверсия), что завершает доказательство утверждения (ii).

Фильтрация сигналов.

Фильтрация сигналов.

Пусть теперь f финитно. В силу теоремы ПВШ, $\hat{f} \in \mathcal{M}$, поэтому $\widehat{f_\varepsilon} = \widehat{\mu_\varepsilon}\hat{f} \in \mathrm{S} \implies f_\varepsilon \in \mathrm{S}$. Если $\operatorname{supp}\mu \subset \{|x| < 1\}$, то $\operatorname{supp}\mu_\varepsilon \subset \{|x| < \varepsilon\}$. Отсюда следует п. (iii) для финитных $f \in \mathrm{C}_0^\infty$. В общем случае, пусть $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) > \varepsilon$, тогда

$$\exists\, N_x : \operatorname{supp}\eta_\varepsilon \subset \operatorname{null} f \ \forall \eta \in \mathrm{S} : \operatorname{supp}\eta \subset N_x \implies$$

$$\langle f_\varepsilon, \eta\rangle = \langle f, \mu_\varepsilon * \bar{\eta}\rangle = \langle f, \eta * \bar{\mu}_\varepsilon\rangle = 0 \ \forall \eta \in \mathrm{S} : \operatorname{supp}\eta \subset N_x \subset \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) > \varepsilon,$$

(здесь $\bar{\eta} = \mathcal{J}\eta$, $\bar{\mu}_\varepsilon = (\mathcal{J}\mu)_\varepsilon$); отсюда $\{x : \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} f) > \varepsilon\} \subset \operatorname{null} f$, что влечёт п. (iii). ▶

«Сигнал» – ограниченная кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{R}$; по мере необходимости отождествляется с элементом S' посредством канонической двойственности.

Под «фильтром» обычно понимается ограниченная кусочно-непрерывная функция $\hat{\varphi}$, такая что $\varphi \neq \varnothing$ или, по крайней мере, значения $\hat{\varphi}$ относительно малы вне заданного компакта («полосы»), и при этом $\hat{\varphi}$ достаточно быстро затухает на бесконечности (хотя бы, принадлежит $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$).

Идеальный фильтр

Под «фильтрацией» сигнала f понимается мультипликаторное преобразование $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}\mathcal{F}f$. Не очевидно, что оно определено для произвольного сигнала, но заведомо определены регуляризованные преобразования

$$f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}_\epsilon \mathcal{F}f, \;\varphi_\varepsilon = \mu_\varepsilon * (\chi_\varepsilon \varphi), \;\chi_\varepsilon(\xi) = \theta(1 - \varepsilon|\xi|),$$

где θ – функция Хевисайда, μ_ε – усредняющее ядро, так что можно изучать предел при $\epsilon \to +0$.

Задача фильтрации – исключение из сигнала определённой полосы частот. В самом деле, $f(x) = \int \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x}dx$, так что сигнал есть сумма гармонических сигналов $\mathrm{e}^{i\xi x}$ с частотой ξ и амплитудой $\hat{f}(\xi)$. Фильтрация обнуляет (или значительно уменьшает) амплитуды всех частот вне заданной полосы.

Определение 8. *Идеальный фильтр* определяет функция

$$\chi(\omega|a,b) = \begin{cases} 1, & \omega \in (a,b) \\ 0, & \omega \notin (a,b) \end{cases}$$

Реальные фильтры

Идеальный фильтр выделяет частоты в заданном интервале (a, b) и только их. Идеальная фильтрация эквивалентна свёрточному преобразованию

$$f \mapsto \check{\chi}(\cdot|a, b) * f; \quad (\check{\chi}(\cdot|a, b) * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \check{\chi}(s|a, b) * f(t - s)\, ds.$$

В частности,

$$\check{\chi}(s| - b, b) = \frac{\sin(bs)}{\pi s}.$$

В общем случае $\check{\chi}(\cdot|a, b) \in \mathrm{L}_2, \check{\chi}(\cdot|a, b) \notin \mathrm{L}_1$, $\operatorname{supp} \check{\chi}(\cdot|a, b) = \mathbb{R}$. Отсюда практические недостатки идеального фильтра:
относительно медленное затухание в $\check{\chi}(\cdot|a, b)$;
для вычисления фильтрованого сигнала в момент времени t нужно знать исходный сигнал в моменты времени, *следующие за* t.

Определение 9. Функция φ задает *физически реализуемый* (реальный) фильтр, если $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, +\infty)$.

В случае реального фильтра вычисление фильтрованного сигнала в момент времени t требует информации об исходном сигнале только в предшествующие t моменты времени.

Среднее

Среднее

Теорема. Пусть $g, f \in \mathrm{S}'$, причём хотя бы одно из этих распределений финитно. Тогда $f * g \in \mathrm{S}'$.

Пусть μ – усредняющее ядро. Если это ядро финитно, то определена свёртка μ с произвольным сигналом.

Определение 10. Число $\bar{u} \equiv \mathrm{const}$ называется средним значением сигнала u, если $\overline{u} = \lim\limits_{\rho \to +\infty} (\mu_\rho * u)$, где смысл предельного перехода должен быть уточнён (поточечно, в S', равномерно и т.д.)

Пример 5. Пусть $f = \sum_k f_k \mathrm{e}_k,\ \mathrm{e}_k(x) = \mathrm{e}^{ikx}$ – тригонометрический многочлен, μ – ограниченное усредняющее ядро.

$$(\mu_\rho * f)(t) = \frac{1}{\rho} \int\limits_{\mathbb{R}} \mu\left(\frac{s}{\rho}\right) f(t-s)\, ds = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \mathrm{e}^{ikt} \int\limits_{\mathbb{R}} \mu(\sigma) \mathrm{e}^{ik\rho\sigma}\, d\sigma \to f_0,\ \ \rho \to \infty.$$

Итак, $\bar{f} = f_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) ds$. Указанное равенство имеет место и для любой непрерывной периодической функции, и для любых равномерно сходящихся рядов $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{i\omega_k x}$. Функции, представленные такими рядами уже не периодичны, но входят в класс т.н. почти периодических функций.

Автокорреляция и средняя мощность.

Автокорреляция и средняя мощность.

Определение 10. Автокорреляцией сигнала f называется функция

$$R_f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f\mathcal{T}_s f^*}.$$

Автокорреляция некоторых сигналов не определена.

Пример 6. $f(t) = \mathrm{e}^{it^2} \implies R_f(s) = \mathrm{e}^{-is^2}\overline{\mathrm{e}^{-2ist}} = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}$

Пример 7. $f(t) = \mathrm{e}^{it} \implies R_f(s) = \mathrm{e}^{-is}$

Пример 8. $f(t) = \sum_k c_k \mathrm{e}^{i\omega_k t}, \ \omega_k \neq \omega_m \implies$

$$R_f(s) = \sum_{k,m} \mathrm{e}^{-i\omega_m s} c_k c_m^* \overline{\mathrm{e}^{i(\omega_k - \omega_m)t}} = \sum_m \mathrm{e}^{-i\omega_m s} |c_m|^2.$$

Определение 11.Средней мощностью интервала частот (a, b) называется значение функции интервала $E_f : (a, b) \mapsto \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \overline{\left| \mathcal{F}^{-1}\left(\chi_\varepsilon(\cdot|a, b)\hat{f}\right)\right|^2}$

Спектр мощности

Задача: найти $S = S(\omega)$: $E_f(a,b) = \int_a^b dS(\omega)$.

Более общая задача:

найти $S_f = S_f(\omega)$: $\overline{\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\hat{f}\right)\right|^2} = \int |\psi|^2 dS_f(\omega)\ \forall\ \hat{\psi} \in \mathrm{S}$. $\quad (\bigstar)$

Спектр мощности

Задача: найти $S = S(\omega): \; E_f(a,b) = \int_a^b dS(\omega)$.

Более общая задача:

найти $S_f = S_f(\omega): \; \overline{\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\hat{f}\right)\right|^2} = \int |\psi|^2 dS_f(\omega) \; \forall \; \hat{\psi} \in \mathrm{S}. \qquad (\bigstar)$

Определение. Энергетическим спектром (спектром мощности)

сигнала f называется функция S_f, удовлетворяющая интегральным тождествам $(\bigstar)$.

Спектр мощности

Задача: найти $S = S(\omega): \; E_f(a,b) = \int_a^b dS(\omega)$.

Более общая задача:

найти $S_f = S_f(\omega): \; \overline{\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\hat{f}\right)\right|^2} = \int |\psi|^2 dS_f(\omega) \; \forall \; \hat{\psi} \in \mathrm{S}. \qquad (\bigstar)$

Определение. Энергетическим спектром (спектром мощности)

сигнала f называется функция S_f, удовлетворяющая интегральным тождествам $(\bigstar)$.

Цель: выразить S_f через R_f.

Предполагаем, что автокорреляция непрерывна

Выражаем S_f через R_f.

Выражаем S_f через R_f.

Пусть $\hat{\psi} = \mathcal{F}\psi$.

$$\overline{\left|\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{\psi}\hat{f}\right)\right|^2} = \frac{1}{4\pi^2}\overline{|\psi * f|^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\rho\to+\infty}\int\int f(t-\tau-\sigma_1)\psi(\sigma_1)d\sigma_1\int f^*(t-\tau-\sigma_2)\psi^*(\sigma_2)d\sigma_2\mu_\rho(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\rho\to+\infty}\int\int\int f(t-\tau-\sigma_1)f^*(t-\tau-\sigma_2)\mu_\rho(\tau)d\tau\psi(\sigma_1)\psi^*(\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\rho\to+\infty}\int\int\int f(\sigma)f^*(\sigma+\sigma_1-\sigma_2)\mu_\rho(t-\sigma_1-\sigma)d\sigma\psi(\sigma_1)\psi^*(\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\int\overline{f\mathcal{T}_{\sigma_1-\sigma_2}f^*}\psi(\sigma_1)\psi^*(\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{1}{4\pi^2}\langle R_f * \psi^*, \psi\rangle$$

Заканчиваем выражение S_f через R_f.

Заканчиваем выражение S_f через R_f.

$\frac{1}{4\pi^2}\langle R_f * \psi^*, \psi\rangle =$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(R_f * \psi^*\right), \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\psi\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \mathcal{J}\mathcal{F}\left(R_f * \psi^*\right), \hat{\psi}\rangle = \langle \mathcal{J}\left(\hat{R}_f\mathcal{F}\psi^*\right), \hat{\psi}\rangle =$$

$$= \langle \mathcal{J}\hat{R}_f\mathcal{J}\mathcal{F}\psi^*, \hat{\psi}\rangle = \langle \mathcal{J}\hat{R}_f\left(\mathcal{F}\psi\right)^*, \hat{\psi}\rangle = \langle \mathcal{J}\hat{R}_f, \hat{\psi}^*\hat{\psi}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \mathcal{F}^{-1}R_f, \hat{\psi}^*\hat{\psi}\rangle =$$

$$= \int |\hat{\psi}(\omega)|^2\frac{\left(\mathcal{F}^{-1}R_f\right)(\omega)d\omega}{2\pi} = \int |\hat{\psi}(\omega)|^2 dS_f(\omega),$$

где

$$dS_f = \frac{\left(\mathcal{F}^{-1}R_f\right)(\omega)d\omega}{2\pi}; \qquad (\bigstar\bigstar)$$

$$S_f(\omega) = \int R_f(\tau)\frac{e^{i\omega\tau} - 1}{2\pi i\tau}d\tau.$$