НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 5
Оптимальная фильтрация и уравнение Винера-Хопфа

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

27 марта 2019 г.

Линейная система.

Линейная система.

Определение 1. *Линейная система (aka линейный преобразователь, линейный фильтр)* осуществляет аффинное преобразование *входного сигнала* $f_\imath = f_\imath(\tau)$ в выходной сигнал $f_o = f_o(t)$ по следующему правилу:

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau) f_\imath(\tau)\, d\tau + b(t), \tag{1}$$

где функции k и b заданы.
Если $b \equiv 0$, то преобразование (1) линейно.

Определение 2. Функция k называется *импульсной характеристикой*, а b – *смещением.*

Определение 3. Система (1) называется *физически реализуемой*, если

$$k(t,\tau) = 0,\ \forall\, \tau > t.$$

Определение 4. Система (1) называется *стационарной*, если

$$k(t,\tau) = k(t-\tau) \text{ и } b \equiv \mathrm{const}$$

Интеграл в (1) в стационарном случае – свёртка $k * f$.

Передаточная функция

Передаточная функция

Свертка коммутирует со сдвигами:

$$\mathcal{T}_s(k * f) = k * (\mathcal{T}_s f)\,, \tag{2}$$

поэтому стационарность системы означает, что

$$f_\imath \mapsto f_o \Leftrightarrow \mathcal{T}_s f_\imath \mapsto \mathcal{T}_s f_o$$

Определение 5. *Передаточной функцией стационарной системы (1)* называется функция $\hat{k}(i\omega) = (\mathcal{F}k)(\omega)$, $\forall\,\omega \in \mathbb{R}$.

Если применима теорема о свёртке, то

$$\widehat{f_o}(i\omega) = 2\pi\hat{k}(i\omega)\widehat{f_\imath}(i\omega) + \hat{b}(i\omega), \quad \hat{b}(i\omega) = (\mathcal{F}b)(\omega),\ \widehat{f_{o,\imath}}(i\omega) = (\mathcal{F}f_{o,\imath})(\omega),$$

Если при этом $b \equiv 0$, то

$$2\pi\hat{k}(i\omega) = \widehat{f_o}(i\omega)/\widehat{f_\imath}(i\omega)$$

Определение 6. Абсолютную величину и аргумент передаточной функции *стационарной* системы (1) называют *амплитудно-частоной (или частотной) и фазо-частотной (фазовой) характеристиками* системы:

$$\hat{k}(i\omega) = A(\omega)\exp(i\varphi(\omega)),\ \forall\,\omega \in \mathbb{R}.$$

Преобразование автокорреляционной функции (АКФ)

Преобразование автокорреляционной функции (АКФ)

Если $k = k(t-\tau)$ вещественная импульсная функция, то её частотная и фазовая характеристики чётна и, соответственно, нечётна, и

$$k(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{k}(i\omega) = \int \hat{k}(i\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega = \int A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))d\omega.$$

Пусть $R_\imath, R_o$ – автокорреляционные функции (АКФ) входного и выходного сигнала. Ограничимся случаем $b \equiv 0$. Если система нестационарна

$$R_o(t) = \lim_{\rho\to+\infty} \int\int f_\imath(\sigma_1)k(\tau,\sigma_1)d\sigma_1 \int f_\imath^*(\sigma_2)k^*(t+\tau,\sigma_2)d\sigma_2\mu_\rho(\tau)d\tau =$$

$$= \int\int f_\imath(\sigma_1)f_\imath^*(\sigma_2) \lim_{\rho\to+\infty} \int k^*(t+\tau,\sigma_2)k(\tau,\sigma_1)\mu_\rho(\tau)d\tau d\sigma_2 d\sigma_1 \implies$$

$$R_o(t) = \int\int f_\imath(\sigma_1)f_\imath^*(\sigma_2)R_k(t,\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_2 d\sigma_1, \tag{3}$$

$$R_k(t,\sigma_1,\sigma_2) = \overline{k(\cdot,\sigma_1)k^*(\cdot+t,\sigma_2)}. \tag{4}$$

Пусть теперь система стационарна (и $b \equiv 0$). Тогда

$$R_k(t,\sigma_1,\sigma_2) = \overline{k(\cdot-\sigma_1)k^*(\cdot+t-\sigma_2)} = \overline{k(\cdot)k^*(\cdot+t+(\sigma_1-\sigma_2))}$$

Преобразование АКФ стационарной системой

Далее,

$$R_o(t) = \int\int f_\imath(\sigma_1) f_\imath^*(\sigma_2) R_k(t+\sigma_1-\sigma_2)\,d\sigma_2 d\sigma_1 =$$

$$= \int\int \lim_{\rho\to+\infty} \int k^*(t+\sigma_1-\sigma_2+\tau)k(\tau)\mu_\rho(\tau+\sigma_1)\,d\tau f_\imath(\sigma_1) f_\imath^*(\sigma_2)\,d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \lim_{\rho\to+\infty} \int\int\int k^*(\sigma)k(\tau)\mu_\rho(\sigma_1+\tau) f_\imath(\sigma_1) f_\imath^*(t-\sigma+\sigma_1+\tau)\,d\sigma_1 d\sigma d\tau =$$

$$= \int\int k^*(\sigma)k(\tau) \lim_{\rho\to+\infty} \int \mu_\rho(\sigma_1+\tau) f_\imath(\sigma_1) f_\imath^*(t-\sigma+\sigma_1+\tau)\,d\sigma_1 d\sigma d\tau =$$

$$= \int\int k^*(\sigma)k(\tau) R_\imath(t+\tau-\sigma)\,d\sigma d\tau = \int\int k^*(\sigma)k(\sigma-s)R_\imath(t-s)\,d\sigma ds \Longrightarrow$$

$$R_o = Q * R_\imath, \quad Q \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{J}k) * (k^*) \tag{5}$$

Замечаем, что $\mathcal{F}Q = 2\pi\,(\mathcal{F}\mathcal{J}k)\,(\mathcal{F}k^*) = 2\pi\,(\mathcal{J}\mathcal{F}k)\,(\mathcal{J}\mathcal{F}k)^*$; и пишем

$$\widehat{R}_o = 2\pi A^2 \widehat{R}_\imath, \quad dS_o = 2\pi A^2 dS_\imath, \quad \text{где} \quad A^2 = \mathcal{J}|\hat{k}|^2; \tag{6}$$

таким образом A – АЧХ преобразования, если импульсная функция k вещественна.

АКФ случайного сигнала

АКФ случайного сигнала

Пусть $\xi = \xi(t|r)$ – случайный сигнал. Грубо: $\xi(\cdot|r) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\ \forall r \in \mathcal{R}$ – некоторая функция (т.е. детерминированный сигнал), $\xi(t|\cdot) : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ – случайная величина на вероятностном пространстве $(\mathcal{R}, \Sigma, P)$. Для простоты считаем, что сигма-алгебра Σ и вероятностная мера P не зависят от t. Таким образом, случайный сигнал$\sim$случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$.

Математическое ожидание случайного сигнала

$$(\mathrm{E}\xi)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathcal{R}} \xi(t|r) P(dr).$$

Дисперсия случайного сигнала

$$(\mathrm{D}\xi)(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\left(\xi(t|\cdot) - (\mathrm{E}\xi)(t)\right)^2.$$

АКФ случайного сигнала

$$R_\xi(s,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}\left(\xi(t|\cdot)\xi^*(s|\cdot)\right).$$

Винеровский процесс

Винеровский процесс

Определение 1. *Случайным процессом с независимыми приращениями* называется такой случайный процесс $\xi = \xi(t|r)$, что $\forall\ t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$, $\forall\ n = 3, 4, \ldots$ независимы случайные величины $\xi(t_1|\cdot), \xi(t_2|\cdot) - \xi(t_1|\cdot), \ldots, \xi(t_n|\cdot) - \xi(t_{n-1}|\cdot)$.

Дисперсия процесса с независимыми приращениями не убывает.

Определение 2. Случайный процесс с независимыми приращениями называется *гауссовским*, если все приращения распределены нормально.

Определение 3. Гауссовский процесс с независимыми приращениями, определённый при $t \ge 0$ называется *винеровским*, если $E\xi \equiv 0$, $D\xi = \sigma^2 t$, где $\sigma > 0$ – параметр.

Приращения винеровского процесса распределены с нулевым мат. ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t - s)$. Винеровский процесс с $\sigma = 1$ называют *стандартным. АКФ винеровского процесса* w имеет вид

$$R_w(t, s) = \sigma^2 \min(t, s).$$

Траектории $w = w(\cdot|r)$ винеровского процесса $w = w(t|r)$ *почти наверное непрерывны*.

Белый шум. Преобразование случайного сигнала

Белый шум. Преобразование случайного сигнала

Траектории $w(\cdot|r)$ винеровского процесса *не дифференцируемы почти нигде почти наверное*. Производная винеровского процесса в обобщённом мысле определяет «белый шум» – обобщённый случайный процесс. Формально, матожидание белого шума $\mathcal{N}$ равно нулю, дисперсия бесконечна, и

$$R_{\mathcal{N}}(t,s) = \sigma^2\delta(t-s), \quad S_{\mathcal{N}} = \sigma^2. \tag{7}$$

Винеровский процесс – общепризнанная модель броуновского движения. Белый шум – широко используемая модель случайной помехи.

Определение 4. Случайный процесс ξ называется *стационарным в широком смысле*, если $(\mathrm{E}\xi)(t) \equiv \mathrm{const}$ и $R_\xi(t,\tau) = R(t-\tau)\ \forall\, t,\tau$.

Белый шум стационарен в указанном смысле, а винеровский процесс – нет.

Определение 5. Линейная система (k,b) преобразует случайный сигнал $\xi_\imath = \xi_\imath(t|r)$, $t \in \mathbb{R}$ в случайный сигнал

$$\xi_o(t|r) = \int k(t,\tau)\xi_\imath(\tau|r)\,d\tau + b(t)$$

АКФ выхода линейной системы

АКФ выхода линейной системы

Предложение 1.

$$(\mathrm{E}\xi_o)(t) = \int k(t,\tau)\,(\mathrm{E}\xi_\imath)(\tau)\,d\tau + b(t)$$

◀ Предполагаем, что $P(dr) = p(r)dr$, причём $p(r) \geq 0$, $\int p(r)dr = 1\ \forall\, t$ (P – вероятностная мера на вероятностном пространстве $\mathcal{R} \ni r$); тогда

$$\mathrm{E}\left(\int k(t,\tau)\xi_\imath(\tau|r)\,d\tau + b(t)\right) = \int\limits_{\mathcal{R}} \left(\int k(t,\tau)\xi_\imath(\tau|r)\,d\tau + b(t)\right) p(r)dr =$$

$$= \int k(t,\tau) \int\limits_{\mathcal{R}} \xi_\imath(\tau|r)p(r)dr\,d\tau + b(t)$$

что и требовалось. Обоснование перемены порядка интегрирования и рассмотрение общей вероятностной меры опускаем.▶

Предложение 2. Пусть $b \equiv 0$, тогда

$$R_o(s,t) = \int\int k(t,\tau)k^*(s,\sigma)R_\imath(\sigma,\tau)d\tau d\sigma,\ \text{где } R_o = R_{\xi_o};\ R_\imath = R_{\xi_\imath}. \quad (8)$$

Стационарный случай

Стационарный случай

◀ Предполагаем, что $P(dr) = p(r)dr$.

$$\int\limits_{\mathcal{R}} \left(\int k(t,\tau)\xi_\imath(\tau|r)\, d\tau \int k^*(s,\sigma)\xi_\imath^*(\sigma|r)\, d\sigma \right) p(r)dr =$$

$$= \int \int k^*(s,\sigma)k(t,\tau) \int\limits_{\mathcal{R}} \xi_\imath(\tau|r)\xi_\imath^*(\sigma|r)\, p(r)drd\tau d\sigma$$

что и требовалось. Обоснование перемены порядка интегрирования и рассмотрение общей вероятностной меры опускаем.▶

Предложение 2. Пусть теперь процесс на входе стационарен в широком смысле, система (k, b) стационарна, и $b = 0$. Тогда

$$R_o = Q * R_\imath, \quad Q \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{J}k) * (k^*). \tag{5'}$$

◀ $$R_o(s,t) = \int \int k^*(s-\sigma)k(t-\tau)R_\imath(\sigma-\tau)d\tau d\sigma \implies$$

Спектр на выходе линейной стационарной системы

Спектр на выходе линейной стационарной системы

$$= \int\int k^*(\sigma_1)k(\tau_1)R_\imath(\delta - \sigma_1 + \tau_1)d\sigma_1 d\tau_1, \ \delta = s - t \implies$$

$$R_o = R_o(\delta) = \int\int k^*(\sigma_1)k(\sigma_1 - \varepsilon)d\sigma_1 R_\imath(\delta - \varepsilon)d\varepsilon$$

что и требовалось. Обоснование перемены порядка интегрирования опускаем. ▶

Следствие 1. Преобразование спектра случайного стационарного сигнала линейной стационарной системой с нулевым смещением определяется формулой (6):

$$dS_o = 2\pi A^2 dS_\imath, \quad A^2 = \mathcal{J}|\hat{k}|^2, \tag{6'}$$

Если $R_\imath = \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – белый шум с параметром σ^2, то

$$dS_o = 2\pi\sigma^2 A^2 d\omega; \quad R_o = (\mathcal{J}k) * k^*. \tag{9}$$

Оптимальная фильтрация

Оптимальная фильтрация

Задача оптимальной фильтрации: на вход линейной системы (k, b) поступает сигнал $x = x(t|r) = \xi(t|r) + \eta(t|r)$; требуется выбрать k, b, так, чтобы выходной сигнал

$$\zeta(t|r) = \int\limits_{t-t_0}^{t} k(t,\tau)x(\tau|r)d\tau + b(t) =$$

был «оптимальной оценкой» сигнала ξ.

Сигнал ξ считается носителем полезной информации, а сигнал η – помехой; t_0 – время наблюдения. Искомая функция k называется *оптимальным фильтром.*

Широко применяется *среднеквадратический критерий* оптимальности:

$$(i)\ \mathrm{E}(\zeta(t|\cdot) - \xi(t|\cdot)) = 0, \quad (ii)\ \mathrm{D}(\zeta(t|\cdot) - \xi(t|\cdot)) \to \min \quad \forall\ t \in I, \tag{10}$$

где I – заданный интервал.

Сведение к центрированым сигналам

Сведение к центрированым сигналам

Вводим линейный оператор

$$(Kf)(t) = \int_{t-t_0}^{t} k(t,s)f(s), \ t \in I.$$

Преобразование сигнала системой запишем так

$$x \mapsto \zeta = b + Kx, \quad x = x(\cdot|r), \ \zeta = \zeta(\cdot|r)r \in \mathbb{R}.$$

В частности,

$$\bar{\zeta} = K\bar{\xi} + b, \bar{\xi} = \mathrm{E}\xi, \ \bar{\eta} = \mathrm{E}\eta.$$

Предполагаем, что $E\eta \equiv 0$ (помеха *центрирована*, что естественно). Поэтому полагаем

$$b = \bar{\xi} - K\bar{\xi}, \tag{11}$$

и этот выбор влечёт п. (i) критерия оптимальности (10). Если смещение b определено равенством (11), то действие системы сводится к преобразованию центрированного сигнала в центрированный без смещения

$$\zeta - \bar{\zeta} = K(x - \bar{x}), \quad \bar{x} = \mathrm{E}x = \bar{\xi}$$

Вычисление оптимального фильтра

Вычисление оптимального фильтра

Считаем сигналы ξ, η центрированными, а смещение – нулевым. Принимаем упрощающее предположение: ξ, η *некоррелированы.* Еще одно упрощающее предположение: $t_0 = +\infty$. Наконец, *сигнал x и импульсную функцию считаем вещественными.* Полагаем $k(t,s) = 0\ \forall s > t$. l пока не фиксируем.

$$\mathrm{D}(\zeta - \xi) = \mathrm{E}(\zeta - \xi)^2 = \mathrm{E}\left(Kx - \xi\right)^2 = \mathrm{E}\left(\xi(t|\cdot) - \int k(t,s)x(s|r)\,ds\right)^2 =$$

$$= \mathrm{E}(\xi^2 + (K\xi)^2 + (K\eta)^2 - 2\xi K\xi - 2\xi K\eta + 2K\xi K\eta).$$

Вводим новый целевой функционал

$$2\Phi(k) = \mathrm{E}(\zeta - \xi)^2 - \mathrm{E}\xi^2 = 2\mathrm{E}\left(-\xi K\xi - \xi K\eta + K\xi K\eta + ((K\xi)^2 + (K\eta)^2)/2\right).$$

Минимизируем Φ. Полагаем $k = k_* + \widetilde{k}$, через $\widetilde{K}, K_*$ обозначаем операторы

$$(\widetilde{K}f)(s) = \int \widetilde{k}(t,s)f(s)ds, \quad (K_*f)(s) = \int k_*(t,s)f(s)ds. \quad \text{Имеем}$$

$$\Phi(k_* + \widetilde{k}) = \Phi(k_*) + \mathrm{E}\left(-\xi\widetilde{K}\xi - \xi\widetilde{K}\eta + K_*\xi\widetilde{K}\eta + K_*\eta\widetilde{K}\xi + \widetilde{K}\xi\widetilde{K}\eta + \right.$$

Продолжение вычисления оптимального фильтра

$$+\widetilde{K}\xi K_*\xi + K_*\eta\widetilde{K}\eta + ((\widetilde{K}\xi)^2 + (\widetilde{K}\eta)^2)/2\Big).$$

$$\Phi(k_*+\widetilde{k})-\Phi(k_*) = \mathrm{E}(K_*\xi\widetilde{K}\eta+K_*\eta\widetilde{K}\xi+\widetilde{K}\xi K_*\xi+K_*\eta\widetilde{K}\eta-\xi\widetilde{K}\xi-\xi\widetilde{K}\eta+\frac{1}{2}(\widetilde{K}x)^2).$$

Следовательно, равенство

$$\mathrm{E}\left(K_*\xi\widetilde{K}\eta + K_*\eta\widetilde{K}\xi + \widetilde{K}\xi K_*\xi + K_*\eta\widetilde{K}\eta - \xi\widetilde{K}\xi - \xi\widetilde{K}\eta\right) = 0 \ \forall\, \widetilde{k} \qquad (12)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция k_* минимизировала Φ. Замечаем, что все члены, включающие и η и ξ дают нулевой вклад в матожидание. Например,

$$\mathrm{E}(\xi\widetilde{K}\eta) = \int \widetilde{k}(t,s)E(\xi(t)\eta(s))ds, \text{ где } E(\xi(t)\eta(s)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} R_{\xi\eta}(\xi(t)\eta(s)) \equiv 0.$$

по предположению о некоррелированности. Поэтому условие (12) упрощаем так

$$\mathrm{E}\left(\widetilde{K}\xi K_*\xi + K_*\eta\widetilde{K}\eta - \xi\widetilde{K}\xi\right) = 0 \ \forall\, \widetilde{k}. \qquad (13)$$

Уравнение оптимального фильтра

Уравнение оптимального фильтра

Переписываем (13) с использованием АКФ

$$\int\int(\widetilde{k}(t,\tau)k_*(t,\sigma)(R_\xi(\tau,\sigma)+R_\eta(\tau,\sigma)) = \int\widetilde{k}(t,\tau)R_\xi(t,\tau)d\tau,\ \forall\,\widetilde{k},\ \forall\,t\in I;$$

или

$$\int\widetilde{k}(t,\tau)\left(\int k_*(t,\sigma)\left(R_\xi(\tau,\sigma)+R_\eta(\tau,\sigma)\right)\,d\sigma - R_\xi(t,\tau)\right)d\tau = 0,\ \forall\,\widetilde{k},\ \forall\,t\in I,$$

что равносильно интегральному уравнению относительно оптимального фильтра k_*:

$$R_\xi(t,\tau) = \int k_*(t,\sigma)R_x(\tau,\sigma)\,d\sigma. \tag{14}$$

где $R_x(\tau,\sigma) = R_\xi(\tau,\sigma)+R_\eta(\tau,\sigma)$ ввиду некоррелированности ξ и η. Строго говоря, нужно ещё, чтобы $k_*(t,\sigma)=0,\ t<\sigma$.

Стационарное уравнение оптимального фильтра

Стационарное уравнение оптимального фильтра

Предполагаем, что процесс ξ, η стационарны в широком смысле. Полагаем в (14) $R_x(\tau,\sigma) = R_x(\sigma-\tau)$, $R_\xi(t,\tau) = R_\xi(\tau-t)$, $k_*(t,\sigma) = k_*(t-\sigma)$. Тогда уравнение оптимального фильтра есть уравнение в свёртках

$$R_\xi(s) = \int k_*(s-h) R_x(h)\, dh, \tag{15}$$

где $h = \sigma - \tau$, $s = t - \tau$. Требование $k_*(t,s) = 0$, $t < s$ сводится физической реализуемости фильтра $k_*(t-s) = 0$, $t - s < 0$. Уравнение физически реализуемого оптимального фильтра выглядит так

$$R_\xi(t) = \int\limits_0^\infty k_*(\tau) R_x(t-\tau)\, d\tau, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Это – уравнение Винера-Хопфа 1-го рода.

Уравнение оптимального фильтра в случае белого шума

Уравнение оптимального фильтра в случае белого шума

Предполагаем, что процесс η – белый шум с параметром σ^2. Тогда $R_\eta(t-\tau) = \sigma^2\delta(t-\tau)$ и (15) принимает вид

$$R_\xi(t) = \sigma^2 k_*(t) + \int\limits_0^\infty k_*(\tau)R_\xi(t-\tau)\,d\tau,\ \forall t > 0 \tag{16}$$

Это – уравнение Винера-Хопфа 2-го рода.