НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 6
Уравнение Винера-Хопфа

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

2 апреля 2019 г.

Воспоминания.

Воспоминания.

Аналитическая функция одной компл. переменной

$D \subset \mathbb{R}^2,\ (x, y) \in D,\ f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y));\ f \in \mathrm{C}(D)$
$z = x + iy,\ z^* = x - iy,\ D \subset \mathbb{C},\ f = u + iv : D \mapsto \mathbb{C}$

Определение. $f = u + iv$ – аналитическая функция в $D \ \Leftrightarrow\ u, v$ дифференцируемы в каждой точке $(x, y) \in D$, причём $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$. (условия Коши-Римана)

Воспоминания.

Аналитическая функция одной компл. переменной

$D \subset \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in D,\ f : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y));\ f \in \mathrm{C}(D)$
$z = x + iy,\ z^* = x - iy,\ D \subset \mathbb{C},\ f = u + iv : D \mapsto \mathbb{C}$

Определение. $f = u + iv$ – аналитическая функция в $D \ \Leftrightarrow\ u, v$ дифференцируемы в каждой точке $(x,y) \in D$, причём $u_x = v_y,\quad u_y = -v_x$. (условия Коши-Римана)

Выражение аналитической функции «не содержит» z^*!

$2x = z + z^*;\ 2iy = z - z^*;\ \partial_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial_x - i\partial_y;\ 2\partial_z^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial_x + i\partial_y;\ 4\partial_z\partial_z^* = 4\partial_z^*\partial_z = \Delta$
$\partial_z^* f = (\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = u_x - v_y + i(u_y + v_x) \implies \partial_z^* f = 0 \Leftrightarrow$ условия К.-Р.
Пример. $x^2 + y^2 = zz^*$ – не аналитична.

Воспоминания.

Аналитическая функция одной компл. переменной

$D \subset \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in D,\ f:(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y));\ f \in \mathrm{C}(D)$
$z = x + iy,\ z^* = x - iy,\ D \subset \mathbb{C},\ f = u + iv : D \mapsto \mathbb{C}$

Определение. $f = u + iv$ – аналитическая функция в $D \ \Leftrightarrow\ u, v$ дифференцируемы в каждой точке $(x,y) \in D$, причём $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$. (условия Коши-Римана)

Выражение аналитической функции «не содержит» z^*!

$2x = z + z^*;\ 2iy = z - z^*;\ \partial_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial_x - i\partial_y;\ 2\partial_z^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial_x + i\partial_y;\ 4\partial_z\partial_z^* = 4\partial_z^*\partial_z = \Delta$
$\partial_z^* f = (\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = u_x - v_y + i(u_y + v_x) \implies \partial_z^* f = 0 \Leftrightarrow$ условия К.-Р.
Пример. $x^2 + y^2 = zz^*$ – не аналитична.

Теорема Коши. $f \in \mathcal{A}(D) \cap \mathrm{C}(\bar{D}) \ \Leftrightarrow\ \int\limits_S f(z)dz = 0,\ S = \partial D$

S – кусочно-гладкий контур, или сумма таких контуров (непересекающихся).

Продолжаем вспоминать.

Продолжаем вспоминать.

Интеграл Коши.

$$f \in \mathcal{A}(D) \cap \mathrm{C}(\bar{D}), \Omega \subset \bar{D}, c = \partial\Omega \Longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), \ \forall\ z \in \Omega \\ 0, \ \forall\ z \notin \Omega \end{cases}$$

Продолжаем вспоминать.

Интеграл Коши.

$$f \in \mathcal{A}(D) \cap \mathrm{C}(\bar{D}), \Omega \subset \bar{D}, c = \partial\Omega \implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), \ \forall \ z \in \Omega \\ 0, \ \forall \ z \notin \Omega \end{cases}$$

$\mathcal{A}(D) \subset \mathrm{C}^{\infty}(D)$

Обратное вложение неверно.

Продолжаем вспоминать.

Интеграл Коши.

$$f \in \mathcal{A}(D) \cap \mathrm{C}(\bar{D}), \Omega \subset \bar{D}, c = \partial\Omega \implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \forall\ z \in \Omega \\ 0, & \forall\ z \notin \Omega \end{cases}$$

$\mathcal{A}(D) \subset \mathrm{C}^\infty(D)$

Обратное вложение неверно.

$f \in \mathcal{A}(D) \implies f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)(z - \zeta)^k$

в некоторой окрестности $\zeta \in D$, f_k – тэйлоровские коэффициенты.

Замечание. Не путать с вещественной аналитичностью: в этом случае

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m+n=k} f_{km}(z - \zeta)^k (z^* - \zeta^*)^m.$$

Аналитическое продолжение.

Аналитическое продолжение по непрерывности.

Теорема. Пусть $D_i,\ i = 1, 2$ – области, $S_i = \partial D_i$, $\gamma \subset S_1 \cap S_2$ – гладкая дуга, $f_i \in \mathcal{A}(D_i) \cap \mathrm{C}(\overline{D_i \cup \gamma})$, и $f_1(z) = f_2(z)\ \forall z \in \gamma$. Положим $f(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} f_1(z),\ z \in D_1, \\ f_2(z),\ z \in D_2 \end{array} \right\}$. Тогда $f \in \mathcal{A}(D_1 \cup D_2 \cup \gamma)$.

Замечание. В вещественно-аналитическом случае теорема не верна.

Пример:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 - zz^*, |z| < 1 \\ 0, z > 1. \end{array} \right.$$

Аналитическое продолжение.

Аналитическое продолжение по непрерывности.

Теорема. Пусть $D_i,\ i = 1, 2$ – области, $S_i = \partial D_i$, $\gamma \subset S_1 \cap S_2$ – гладкая дуга, $f_i \in \mathcal{A}(D_i) \cap \mathrm{C}(\overline{D_i \cup \gamma})$, и $f_1(z) = f_2(z)\ \forall z \in \gamma$. Положим $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} f_1(z),\ z \in D_1, \\ f_2(z),\ z \in D_2 \end{array} \right\}$. Тогда $f \in \mathcal{A}(D_1 \cup D_2 \cup \gamma)$.

Замечание. В вещественно-аналитическом случае теорема не верна. Пример:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 - zz^*, |z| < 1 \\ 0, z > 1. \end{array} \right.$$

Интегралы, аналитические по параметру.

Теорема. Пусть функция $g = g(z, \tau)$ определена на $D \times \gamma$, $\gamma \subset \mathbb{C}$ – гладкая дуга . Пусть $\forall\ (z, \tau) \in D \times \gamma\ g(z, \cdot)$ кусочно-непрерывна на γ, $g(\cdot, \tau) \in \mathcal{A}(D)$, и $f(z) = \int\limits_{\gamma} g(z, \tau) d\tau$ сходится равномерно по $z \in D$. Тогда $f \in \mathcal{A}(D)$.

Интегралы Фурье в комплексной области.

Интегралы Фурье в комплексной области.

Ряды Лорана.

Теорема. $f \in \mathcal{A}(B_\rho(0) \setminus \{0\}) \implies f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^k$.

Теорема. $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus B_\rho(0)) \implies f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^k$.

Интегралы Фурье в комплексной области.

Ряды Лорана.

Теорема. $f \in \mathcal{A}(B_\rho(0) \setminus \{0\}) \implies f(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k$.

Теорема. $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus B_\rho(0)) \implies f(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k z^k$.

Пример. Аналитическое продолжение преобразования Фурье.

$u \in \mathrm{C} \cap \mathrm{L}_1, u^\pm(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta(\pm t)u(t),\ (\hat{u}^\pm)(\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{F}u^\pm)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pm t>0} u(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}dt.$

$(\mathcal{F}^\pm u)(\zeta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pm t>0} u(t)\mathrm{e}^{-i\zeta t}dt, \zeta = \xi + i\sigma,\ \mp\sigma > 0;\ \hat{u}^\pm \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}^\pm u;$

$\hat{u}^\pm \in \mathcal{A}\left(\mathbb{C}^\mp\right) \cap \mathrm{C}\left(\bar{\mathbb{C}}^\mp\right),\ \mathbb{C}^\pm = \{\zeta = \xi + i\sigma, \pm\sigma > 0\}.$

Если $u \in \mathrm{L}_{1,loc}$ – медленного роста, то $\hat{u}^\pm \in \mathcal{A}\left(\mathbb{C}^\mp\right)$ (по т. об аналит. продолжении интегралов).

Интегралы Фурье в комплексной области. Продолжение.

Интегралы Фурье в комплексной области. Продолжение.

Определение.

$\mathrm{e}_z(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{zt}, \; z \in \mathbb{C}; \; \nu^\pm \in \mathbb{R}, \; f \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu^-} \Leftrightarrow f^\pm \mathrm{e}_{\nu^\pm} \in \mathrm{L}_1(\pm t > 0).$

Интегралы Фурье в комплексной области. Продолжение.

Определение.

$\mathrm{e}_z(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{zt}, \ z \in \mathbb{C}; \ \nu^{\pm} \in \mathbb{R}, \ f \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu^-} \ \Leftrightarrow \ f^{\pm}\mathrm{e}_{\nu^{\pm}} \in \mathrm{L}_1(\pm t > 0).$

Преобразование Фурье в L_{ν^+,ν^-}

$\nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \mathbb{C}^{\pm}_{\nu} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\zeta : \ \pm\mathrm{Im}\zeta > \pm\nu\}; \ \Pi_{\alpha,\beta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{C} : \ \alpha < \mathrm{Im}\zeta < \beta\};$

$f \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu^-}; \ 2\pi(\mathcal{F}^{\pm}f)(\zeta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\pm t>0} f(t)\mathrm{e}^{-i\zeta t}dt, \ \zeta \in \mathbb{C}^{\mp}_{\nu^{\pm}}.$

Предложение. $\mathcal{F}^{\pm}f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{\mp}_{\nu^{\pm}}); \ \nu^+ > \nu^- \implies$
$(\mathcal{F}f)(\zeta) = (\mathcal{F}^+f)(\zeta) + (\mathcal{F}^-f)(\zeta), \zeta \in \Pi_{\nu^-,\nu^+}, \ \mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\Pi_{\nu^-,\nu^+}).$

Интегралы Фурье в комплексной области. Продолжение.

Определение.

$\mathrm{e}_z(t) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{zt},\ z \in \mathbb{C};\ \nu^\pm \in \mathbb{R},\ f \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu^-} \Leftrightarrow f^\pm \mathrm{e}_{\nu^\pm} \in \mathrm{L}_1(\pm t > 0).$

Преобразование Фурье в L_{ν^+,ν^-}

$\nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbb{C}^\pm_\nu \overset{\text{def}}{=} \{\zeta :\ \pm \mathrm{Im}\zeta > \pm\nu\};\ \Pi_{\alpha,\beta} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{C} :\ \alpha < \mathrm{Im}\zeta < \beta\};$
$f \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu^-};\ 2\pi(\mathcal{F}^\pm f)(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\pm t>0} f(t)\mathrm{e}^{-i\zeta t}dt,\ \zeta \in \mathbb{C}^\mp_{\nu^\pm}.$

Предложение. $\mathcal{F}^\pm f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^\mp_{\nu^\pm});\ \nu^+ > \nu^- \implies$
$(\mathcal{F}f)(\zeta) = (\mathcal{F}^+ f)(\zeta) + (\mathcal{F}^- f)(\zeta), \zeta \in \Pi_{\nu^-,\nu^+},\ \mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\Pi_{\nu^-,\nu^+}).$

Обращение.

$\nu^+ > \nu^-;\ \hat{f} = \mathcal{F}f; \implies f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \int\limits_{\mathbb{R}+i\sigma} \hat{f}(\zeta)\mathrm{e}^{i\zeta t}d\zeta,\ \zeta = \xi + i\sigma \in \Pi_{\nu^-,\nu^+}.$

Замечание. Пусть $\mathcal{F}_0$ – обычное ПФ. Тогда
$(\mathcal{F}f)(\xi + i\sigma) = (\mathcal{F}_0(\mathrm{e}_\sigma f))(\xi);\ \mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \mathcal{F}_0^{-1}\mathrm{e}_{-\sigma}\mathcal{F}_0\mathrm{e}_\sigma f$

Свёрточные уравнения и преобразования Фурье

Свёрточные уравнения и преобразования Фурье

Свертки и комплексное преобразование Фурье.

$\mathcal{F}g \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-})$, $\mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-}) \implies \mathcal{F}(f * g) \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-})$, и $(\widehat{f * g}) = \hat{g}\hat{f}$.

Свёрточные уравнения и преобразования Фурье

Свертки и комплексное преобразование Фурье.

$\mathcal{F}g \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-})$, $\mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-}) \implies \mathcal{F}(f * g) \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-})$, и $(\widehat{f * g}) = \hat{g}\hat{f}$.

Уравнение.

Функции K, f заданы на $\mathbb{R}$. Найти функцию $u : u = \lambda K * u + f$ на $\mathbb{R}$.

Свертки и комплексное преобразование Фурье.

$\mathcal{F}g \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-})$, $\mathcal{F}f \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-}) \implies \mathcal{F}(f*g) \in \mathcal{A}(\Pi_{\alpha^+,\alpha^-})$, и $(\widehat{f*g}) = \hat{g}\hat{f}$.

Уравнение.

Функции K, f заданы на $\mathbb{R}$. Найти функцию $u : u = \lambda K * u + f$ на $\mathbb{R}$.

Формальное решение.

$$(1 - 2\pi\lambda\hat{K})\hat{u} = \hat{f}; \implies \hat{u} = \frac{\hat{f}}{1-2\pi\lambda\hat{K}} = \hat{f} + \frac{2\pi\lambda\hat{K}\hat{f}}{1-2\pi\lambda\hat{K}}$$

$$u = f + \lambda G * f, \; G = \mathcal{F}^{-1}M, \; M = \frac{\hat{K}}{1-2\pi\lambda\hat{K}}$$

Пример.

$$K(t) = \mathrm{e}^{-|t|}; \; \hat{K} = \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}; \; M = \frac{1}{\pi(1+\xi^2)\left(1-\frac{2\lambda}{1+\xi^2}\right)} = \frac{1}{\pi(1+\xi^2-2\lambda)}$$

$$1 - 2\lambda = \nu^2 > 0 \implies G(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\mathrm{e}^{i\xi t}d\xi}{\nu^2+\xi^2} = \frac{e^{-\nu|t|}}{\nu}, \; \nu = \sqrt{1-2\lambda},$$

Метод Винера-Хопфа. Случай однородного уравнения.

Метод Винера-Хопфа. Случай однородного уравнения.

Однородное уравнение ВХ

$u(t) = \int\limits_0^{\infty} K(t-\tau)u(\tau)d\tau, \ \forall t > 0;$ дано $K = K(t), \ t \in \mathbb{R}, \quad u =?.$

$\int\limits_0^{\infty} K(t-\tau)u(\tau)d\tau = K * u,$ при условии $u(t) = 0 \ \forall \ t < 0.$

Метод Винера-Хопфа. Случай однородного уравнения.

Однородное уравнение ВХ

$u(t) = \int\limits_0^\infty K(t-\tau)u(\tau)d\tau, \ \forall t > 0;$ дано $K = K(t), \ t \in \mathbb{R}, \quad u = ?.$

$\int\limits_0^\infty K(t-\tau)u(\tau)d\tau = K * u,$ при условии $u(t) = 0 \ \forall \ t < 0.$

Функции $u^{\pm}$ («односторонние функции»).

$u^+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(t)u(t) = \theta(t)(K * u^+)(t), \ u^-(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(-t)(K * u^+)(t); \ \hat{u}^{\pm} = \mathcal{F}u^{\pm}.$

Метод Винера-Хопфа. Случай однородного уравнения.

Однородное уравнение ВХ

$u(t) = \int\limits_0^\infty K(t-\tau)u(\tau)d\tau,\ \forall t > 0;$ дано $K = K(t),\ t \in \mathbb{R},\ \ u = ?.$

$\int\limits_0^\infty K(t-\tau)u(\tau)d\tau = K * u,$ при условии $u(t) = 0\ \forall\ t < 0.$

Функции $u^\pm$ («односторонние функции»).

$u^+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(t)u(t) = \theta(t)(K * u^+)(t),\ u^-(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(-t)(K * u^+)(t);\ \hat{u}^\pm = \mathcal{F}u^\pm.$

Техническое предположение

$\exists \nu^\pm:\ u^- + u^+ \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu^-} \implies u^- \in \mathrm{L}_{\nu,\nu^-}, u^+ \in \mathrm{L}_{\nu^+,\nu};\ \forall \nu \in \mathbb{R} \implies$
$\hat{u}^\pm \in \mathcal{A}\left(\mathbb{C}^\mp_{\nu^\pm}\right)$

Замечание. $K \in \mathrm{L}_{\kappa^+,\kappa^-}\ \&\ \kappa^- < \nu^+ \implies u^+, \hat{K} \in \mathcal{A}(\Pi_{\kappa^-,\nu^+}) \implies K * u^+$ определена. При этом $\nu^- = \kappa^-$ по определению u^-.

Факторизация.

Факторизация.

Подстановка

$u^+ + u^- = K * u^+; \Leftrightarrow \ \hat{u}^+ + \hat{u}^- = 2\pi\hat{K}\hat{u}^+ \ \Leftrightarrow \ M\hat{u}^+ + \hat{u}^- = 0; \quad M \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - 2\pi\hat{K}.$

Факторизация.

Подстановка

$u^+ + u^- = K * u^+; \Leftrightarrow \hat{u}^+ + \hat{u}^- = 2\pi\hat{K}\hat{u}^+ \Leftrightarrow M\hat{u}^+ + \hat{u}^- = 0; \quad M \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - 2\pi\hat{K}.$

Предположение о факторизации

Пусть $\exists\ \tau^+ > \tau^-, M^\pm \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{\mp}_{\tau^\pm}) :\ M = M^+/M^-$

$u^+ M^+ \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^-_{\min(\nu^+,\tau^+)}); \quad u^- M^- \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^+_{\max(\nu^-,\tau^-)});$

Факторизация.

Подстановка

$u^+ + u^- = K * u^+; \Leftrightarrow \hat{u}^+ + \hat{u}^- = 2\pi\hat{K}\hat{u}^+ \Leftrightarrow M\hat{u}^+ + \hat{u}^- = 0; \quad M \stackrel{\text{def}}{=} 1 - 2\pi\hat{K}.$

Предположение о факторизации

Пусть $\exists\ \tau^+ > \tau^-, M^\pm \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{\mp}_{\tau^\pm}) :\ M = M^+/M^-$
$u^+M^+ \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^-_{\min(\nu^+,\tau^+)}); \quad u^-M^- \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^+_{\max(\nu^-,\tau^-)});$

В силу факторизации

$\min(\nu^+,\tau^+) \geq \max(\nu^-,\tau^-) \implies \hat{u}^+M^+ = -\hat{u}^-M^-$ в общей полосе аналитичности.

Замечание. Как уже говорилось, $\nu^- = \kappa^-$. Поэтому
$\min(\nu^+,\tau^+) \geq \max(\nu^-,\tau^-) \implies \nu^+ > \kappa^-.$

Решение факторизованной задачи

Решение факторизованной задачи

Аналитическая склейка.

По теореме о непр. продолжении функция $C(\zeta) = \pm\hat{u}^{\pm} M^{\mp}(\zeta)$, – аналитическая во всей плоскости ζ, т.е. целая.

Решение факторизованной задачи

Аналитическая склейка.

По теореме о непр. продолжении функция $C(\zeta) = \pm\hat{u}^{\pm} M^{\mp}(\zeta)$, – аналитическая во всей плоскости ζ, т.е. целая.

Теорема Лиувилля.

Пусть целая функция f допускает оценку $|f(z)| \leq c(1 + |z|^n)$, $c = \mathrm{const}$. Тогда f – многочлен, и $\mathrm{deg} f \leq n$.

Решение факторизованной задачи

Аналитическая склейка.

По теореме о непр. продолжении функция $C(\zeta) = \pm\hat{u}^{\pm} M^{\mp}(\zeta)$, – аналитическая во всей плоскости ζ, т.е. целая.

Теорема Лиувилля.

Пусть целая функция f допускает оценку $|f(z)| \leq c(1 + |z|^n)$, $c = \mathrm{const}$. Тогда f – многочлен, и $\mathrm{deg} f \leq n$.

Доп. предположение: C ограничена.

$\implies C \equiv \mathrm{const} \implies M^+\hat{u}^+ = -M^-\hat{u}^- = C \equiv \mathrm{const} \implies \hat{u}^+ = \frac{C}{M^+}$

Решение факторизованной задачи

Аналитическая склейка.

По теореме о непр. продолжении функция $C(\zeta) = \pm\hat{u}^{\pm} M^{\mp}(\zeta)$, – аналитическая во всей плоскости ζ, т.е. целая.

Теорема Лиувилля.

Пусть целая функция f допускает оценку $|f(z)| \leq c(1 + |z|^n)$, $c = \mathrm{const}$. Тогда f – многочлен, и $\mathrm{deg} f \leq n$.

Доп. предположение: C ограничена.

$\Longrightarrow C \equiv \mathrm{const} \Longrightarrow M^+\hat{u}^+ = -M^-\hat{u}^- = C \equiv \mathrm{const} \Longrightarrow \hat{u}^+ = \frac{C}{M^+}$

Восстановление решения.

$u^+ = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}^+$

Пример: $u(t) = \lambda \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-|t-\tau|} u(\tau)\,d\tau,\ \lambda \in \mathbb{C}$

Пример: $u(t) = \lambda \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-|t-\tau|} u(\tau) d\tau, \ \lambda \in \mathbb{C}$

Ядро

$K = \lambda e^{-|x|}; \kappa^- = -1; \quad \hat{K}(\xi) = \frac{\lambda}{\pi(1+\xi^2)}.$

Пример: $u(t) = \lambda \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-|t-\tau|} u(\tau) d\tau, \ \lambda \in \mathbb{C}$

Ядро

$K = \lambda e^{-|x|}; \kappa^- = -1; \quad \hat{K}(\xi) = \frac{\lambda}{\pi(1+\xi^2)}.$

Факторизация.

$M = 1 - 2\pi \hat{K} = \frac{\xi^2+1-2\lambda}{(\xi-i)(\xi+i)} = \frac{(\xi-\nu)(\xi+\nu)}{(\xi-i)(\xi+i)}, \ \nu^2 = 2\lambda - 1.$

$M^- = \zeta + i; \quad M^+ = \frac{\zeta^2-\nu^2}{\zeta-i};$

Пример: $u(t) = \lambda \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-|t-\tau|} u(\tau) d\tau, \ \lambda \in \mathbb{C}$

Ядро

$K = \lambda e^{-|x|}; \kappa^- = -1; \quad \hat{K}(\xi) = \frac{\lambda}{\pi(1+\xi^2)}.$

Факторизация.

$M = 1 - 2\pi\hat{K} = \frac{\xi^2+1-2\lambda}{(\xi-i)(\xi+i)} = \frac{(\xi-\nu)(\xi+\nu)}{(\xi-i)(\xi+i)}, \ \nu^2 = 2\lambda - 1.$
$M^- = \zeta + i; \quad M^+ = \frac{\zeta^2-\nu^2}{\zeta-i};$

Функция $\hat{u}^+$.

$\hat{u}^+(\zeta) = O(\zeta^{-1}), \ \zeta \to \infty \implies C(\zeta) = (\hat{u}^+ M^+)(\zeta) = \implies C(\zeta) = O(1), \ \zeta \to \infty, \ \implies C(\zeta) \equiv \mathrm{const} \ \implies \hat{u}^+(\zeta) = C\frac{\zeta-i}{\zeta^2-\nu^2}.$

Вычисление u

Вычисление u

Полуплоскость аналитичности $\hat{u}^+$.

$\hat{u}^+(\zeta) = C\frac{\zeta - i}{\zeta^2 - \nu^2}, \hat{u}^+ \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^-_{\nu_+}),\ \nu_+ = \nu_* \stackrel{\text{def}}{=} -|\mathrm{Im}\nu| \leq 0,\ \nu^2 = 2\lambda - 1$

Требуем $\nu^+ > \kappa^- \quad \Leftrightarrow \quad \nu_* > -1 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathrm{Im}\sqrt{2\lambda - 1}| < 1$

Вычисление u

Полуплоскость аналитичности $\hat{u}^+$.

$\hat{u}^+(\zeta) = C\frac{\zeta - i}{\zeta^2 - \nu^2}, \hat{u}^+ \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^-_{\nu_+}),\ \nu_+ = \nu_* \stackrel{\text{def}}{=} -|\mathrm{Im}\nu| \leq 0,\ \nu^2 = 2\lambda - 1$

Требуем $\nu^+ > \kappa^- \ \Leftrightarrow\ \nu_* > -1 \ \Leftrightarrow\ |\mathrm{Im}\sqrt{2\lambda - 1}| < 1$

Восстановление u^+. Применяем вычеты.

$\sigma < \nu_* < 0;\ t > 0,\ u^+(t) = \int\limits_{\mathbb{R}+i\sigma} \hat{u}^+(\zeta)\mathrm{e}^{it\zeta} d\zeta = \int\limits_{\mathbb{R}+i\sigma} \frac{(\zeta - i)\mathrm{e}^{it\zeta} d\zeta}{\zeta^2 - \nu^2} =$

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{(\zeta - i)\mathrm{e}^{it\zeta} d\zeta}{\zeta^2 - \nu^2},\quad C_R = \partial\Omega_R,\ \Omega_R = \{|\zeta| < R,\ \mathrm{Im}\zeta > \sigma\},$

$\exists R_0 :\ \pm\nu \in \Omega_R\ \forall R > R_0 \implies u^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{(\nu - i)\mathrm{e}^{it\nu}}{2\nu} + \frac{(\nu + i)\mathrm{e}^{-it\nu}}{2\nu}\right) \implies$

$u^+(t) = C\left(\cos\nu t + \frac{\sin\nu t}{\nu}\right),\ \nu^2 = 2\lambda - 1 \neq 0,\ C \in \mathbb{C}$

Вычисление u

Полуплоскость аналитичности $\hat{u}^+$.

$\hat{u}^+(\zeta) = C\frac{\zeta - i}{\zeta^2 - \nu^2}, \hat{u}^+ \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^-_{\nu_+}),\ \nu_+ = \nu_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} -|\mathrm{Im}\nu| \le 0,\ \nu^2 = 2\lambda - 1$

Требуем $\nu^+ > \kappa^- \ \Leftrightarrow\ \nu_* > -1 \ \Leftrightarrow\ |\mathrm{Im}\sqrt{2\lambda - 1}| < 1$

Восстановление u^+. Применяем вычеты.

$\sigma < \nu_* < 0;\ t > 0,\ u^+(t) = \int\limits_{\mathbb{R}+i\sigma} \hat{u}^+(\zeta)\mathrm{e}^{it\zeta}d\zeta = \int\limits_{\mathbb{R}+i\sigma} \frac{(\zeta - i)\mathrm{e}^{it\zeta}d\zeta}{\zeta^2 - \nu^2} =$

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{(\zeta - i)\mathrm{e}^{it\zeta}d\zeta}{\zeta^2 - \nu^2}, \quad C_R = \partial\Omega_R,\ \Omega_R = \{|\zeta| < R,\ \mathrm{Im}\zeta > \sigma\},$

$\exists R_0 :\ \pm\nu \in \Omega_R\ \forall R > R_0 \ \Longrightarrow\ u^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{(\nu - i)\mathrm{e}^{it\nu}}{2\nu} + \frac{(\nu + i)\mathrm{e}^{-it\nu}}{2\nu}\right) \ \Longrightarrow$

$u^+(t) = C\left(\cos\nu t + \frac{\sin\nu t}{\nu}\right),\ \nu^2 = 2\lambda - 1 \ne 0,\ C \in \mathbb{C}$

Замечания.

1. $2\lambda > 1\,\&\, C \in \mathbb{R} \implies u^+(t) \in \mathbb{R}$; $2\lambda < 1\ \&\lambda > 0\,\&\, C \in \mathbb{R} \implies u^+(t) \in \mathbb{R}$.
2. $2\lambda > 1 \implies u^+$ ограничена.