НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 8
Вейвлеты и вокруг

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

17 марта 2018 г.

Финитные спектры и теорема Пэли-Винера-Шварца

Финитные спектры и теорема Пэли-Винера-Шварца

Финитный спектр.

Определение 1. Нуль-множеством N_f функции $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ называется объединение всех интервалов $I: \ f = 0$ всюду на I.
Определение 2. Носителем функции $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ называется множество $\operatorname{supp} f \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus N_f$.
Определение 3. Нуль-множеством N_f обобщённой функции $f \in \mathrm{S}'$ называется объединение всех интервалов $I: \ \langle f, \eta \rangle = 0, \ \forall \eta \in \mathrm{S}: \operatorname{supp} \eta \subset I$.
Определение 4. Носителем обобщённой функции $f \in \mathrm{S}'$ называется множество $\operatorname{supp} f \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus N_f$.
Определение 5. Спектр сигнала финитен $\Leftrightarrow$ $\operatorname{supp} \mathcal{F} f$ – компакт.

Финитные спектры и теорема Пэли-Винера-Шварца

Финитный спектр.

Определение 1. Нуль-множеством N_f функции $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ называется объединение всех интервалов $I: \; f = 0$ всюду на I.
Определение 2. Носителем функции $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ называется множество $\operatorname{supp} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R} \setminus N_f$.
Определение 3. Нуль-множеством N_f обобщённой функции $f \in \mathrm{S}'$ называется объединение всех интервалов $I: \; \langle f, \eta \rangle = 0, \; \forall \eta \in \mathrm{S}: \operatorname{supp} \eta \subset I$.
Определение 4. Носителем обобщённой функции $f \in \mathrm{S}'$ называется множество $\operatorname{supp} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R} \setminus N_f$.
Определение 5. Спектр сигнала финитен $\Leftrightarrow \; \operatorname{supp} \mathcal{F} f$ – компакт.

Теорема Пэли-Винера-Шварца.

Спектр сигнала $f = f(x) \in \mathrm{S}'$ финитен $\Leftrightarrow \exists \, \tilde{f} = \tilde{f}(x + iy) \in \mathcal{A}(\mathbb{C}): \; f(x) = \tilde{f}(x), \; \exists m \geq 0: \; |\tilde{f}(x + iy)| \leq C_p \mathrm{e}^{p|y|}(1 + |x|)^m \;\; \forall p: \operatorname{supp} \mathcal{F} f \subset \{|\xi| \leq p\}$.
Примеры: $\hat{f} = \sum_k c_k \delta^{(k)} \implies p > 0$ – любое, и f – полином;
$\hat{f} = \theta(p^2 - \xi^2) \implies f = \sin(p\xi)/\xi$.

Интерполяция и теорема Котельникова

Интерполяция и теорема Котельникова

Можно ли восстановить

целую функцию по счётному числу значений в заданных точках?

Интерполяция и теорема Котельникова

Можно ли восстановить

целую функцию по счётному числу значений в заданных точках?

Интерполяция сигналов с финитным спектром.

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset (-p,p) \implies \forall\, \xi \in (-p,p)\ \hat{f}(\xi) = F(\xi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k \mathrm{e}^{ikh\xi},$$

$$h = \frac{\pi}{p},\ \ \hat{f}_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-ikh\xi}d\xi.\ \hat{f} = \mathcal{F}f \implies \hat{f}_k = \frac{f(-kh)}{2p}\ \&\ f(x) =$$

$$\int \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}d\xi = \int_{-p}^{p} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k \int_{-p}^{p} \mathrm{e}^{i\xi(x+hk)}d\xi = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_k \sin p(x+hk)}{(x+hk)}$$

Теорема Котельникова

$$\operatorname{supp} \mathcal{F}f =\subset (-p,p) \implies f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kh)\mathrm{sc}(px-\pi k),\ \ h = \frac{\pi}{p},\ \ \mathrm{sc}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{\sin(t)}{t}.$$

Замечание. Функции $\mathrm{sc}(px-\pi k)$ попарно ортогональны в $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Перенасыщение

Перенасыщение

Что будет, если известны $f(kh_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, и $h_1 < \frac{\pi}{p}$ (перенасыщение, oversampling)?

Перенасыщение

Что будет, если известны $f(kh_1)$, $k \in \mathbb{Z}$, и $h_1 < \frac{\pi}{p}$ (перенасыщение, oversampling)?

Посмотрим...

$p_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\pi}{h_1} > p$, $\hat{\psi}_{p,p_1} : \mathrm{supp}\hat{\psi}_{p,p_1} \subset (-p_1, p_1)$, $\{\hat{\psi}^{-1}_{p,p_1}(1)\} \supset (-p, p)$,

$\hat{f}_{1k} = \frac{1}{2p_1} \int\limits_{-p_1}^{p_1} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-ikh_1\xi} d\xi = \frac{f(-kh_1)}{2p_1}$. $f(x) = \int \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi} d\xi = \int\limits_{-p}^{p} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi} d\xi =$

$\int\limits_{-p_1}^{p_1} \hat{\psi}_{p,p_1}(\xi)\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi} d\xi = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k \int\limits_{-p_1}^{p_1} \hat{\psi}_{p,p_1}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi(x+h_1k)} d\xi =$

$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f(kh_1)\psi_{p,p_1}(x - h_1k)$, $\psi_{p,p_1}(x) = \frac{1}{2p_1} \int\limits_{-p_1}^{p_1} \hat{\psi}_{p,p_1}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x} d\xi$

Замечание. Функция $\hat{\psi}_{p,p_1}$ может быть выбрана непрерывной или даже гладкой, что значительно ускорит затухание ψ_{p,p_1} по сравнению с *sc*. Однако, функции $\psi_{p,p_1}(x + h_1k)$ не обязаны быть ортогональными.

Недонасыщение

Недонасыщение

Что будет, если известны $f(kh_2)$, $k \in \mathbb{Z}$, и

$h_2 > \frac{\pi}{p}$ (недонасыщение, undersampling)?

Недонасыщение

Что будет, если известны $f(kh_2)$, $k \in \mathbb{Z}$, и

$h_2 > \frac{\pi}{p}$ (недонасыщение, undersampling)?

Посмотрим...

$$p_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{h_2} < p < 3p_2, \; f(kh_2) = \int\limits_{-p}^{p} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ikh_2\xi}d\xi = \int\limits_{-3p_2}^{3p_2} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ikh_2\xi}d\xi =$$

$$\int\limits_{-p_2}^{p_2} \mathrm{e}^{ikh_2\xi}(\hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi - 2p_2) + \hat{f}(\xi + 2p_2))d\xi \stackrel{\text{def}}{=} 2p_2\hat{f}_{2,-k}$$

$$\sum_k f(kh_2)sc(p_2x - k\pi) = \sum_k \hat{f}_{2,k} \int\limits_{-p_2}^{p_2} \mathrm{e}^{i\xi(x+h_2k)}d\xi = \int\limits_{-p_2}^{p_2} (\sum_k \hat{f}_{2,k}\mathrm{e}^{i\xi h_2 k})\mathrm{e}^{i\xi x}d\xi$$

Замечание. $\sum \hat{f}_{2,k}\mathrm{e}^{i\xi h_2 k}$ – ряд Фурье $2p_2-$периодизации исходной функции $\hat{f}(\xi)$. Из-за этого возможно паразитное усиление некоторых частот, даже тех, которых не было в исходной полосе.

Теорема Котельникова и ортогональные разложения

Теорема Котельникова и ортогональные разложения

Лемма. $\mathcal{F}\mathrm{e}_\omega\mathcal{T}_\tau g = \mathcal{T}_{-\omega}\mathrm{e}_\tau\mathcal{F}g \quad \forall\tau,\omega\in\mathbb{R}\ \forall g\in\mathrm{S}'$.

$g\in\mathrm{S} \implies \int g(t+\tau)\mathrm{e}^{i(\omega-\xi)t}dt = \mathrm{e}^{i(\xi-\omega)\tau}\int g(s)\mathrm{e}^{-i(\xi-\omega)s}ds.$

Следствие. $f,g\in\mathrm{L}_2 \implies (f,(\mathcal{T}_\tau g)\mathrm{e}_\omega) = (\hat{f},\mathcal{T}_{-\omega}(\mathrm{e}_\tau\hat{g}))$.

Теорема Котельникова и ортогональные разложения

Лемма. $\mathcal{F}\mathrm{e}_\omega\mathcal{T}_\tau g = \mathcal{T}_{-\omega}\mathrm{e}_\tau\mathcal{F}g \;\; \forall\tau,\omega\in\mathbb{R}\;\forall g\in\mathrm{S}'$.

$g\in\mathrm{S}\implies\int g(t+\tau)\mathrm{e}^{i(\omega-\xi)t}dt=\mathrm{e}^{i(\xi-\omega)\tau}\int g(s)\mathrm{e}^{-i(\xi-\omega)s}ds$.

Следствие. $f,g\in\mathrm{L}_2\implies(f,(\mathcal{T}_\tau g)\mathrm{e}_\omega)=(\hat{f},\mathcal{T}_{-\omega}(\mathrm{e}_\tau\hat{g}))$.

Базис Котельникова: $g^{m,n}(t)=\frac{\mathrm{e}^{2impt}\sin(pt-\pi n)}{pt-\pi n},\;\; p>0,\;\; n,m\in\mathbb{Z}$.

$g(t)=sc(pt)\implies g^{m,n}=e_{2mp}\mathcal{T}_{-nh}g\;\&\;(\mathcal{F}g)(\xi)=\frac{\theta(p^2-\xi^2)}{2p}$;

$(g_{mn},g_{kl})=(\mathcal{F}g_{mn},\mathcal{F}g_{kl})=(T_{-2mp}e_{-nh}\mathcal{F}g,\,T_{-2kp}e_{-lh}\mathcal{F}g)\implies(g_{mn},g_{kl})=$

$C_{n,l}\delta_{k,m};\; C_{n,l}=(g_{mn},g_{ml})=\frac{1}{4p^2}\int\limits_{-p-2mp}^{p-2mp}\mathrm{e}^{i(l-n)h(\xi-2mp)}d\xi=\frac{\delta_{n,l}}{2p}$

$\frac{(f,g^{m,n})}{\|g^{m,n}\|^2}=\frac{(\hat{f},\mathcal{T}_{-2mp}(\mathrm{e}_{-nh})\mathcal{F}g)}{\|g^{m,n}\|^2}=\int\limits_{-p-2mp}^{p-2mp}\mathrm{e}^{inh\xi}\hat{f}(\xi)d\xi;$

$m=0\;\&\;\mathrm{supp}\,f\subset(-p,p)\implies\frac{(f,g^{m,n})}{\|g^{m,n}\|^2}=f(nh)\delta_{0m}$.

Оконное преобразование Фурье.

Оконное преобразование Фурье.

Дискретное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \alpha, h > 0, n, m \in \mathbb{Z}. \quad g^{m,n}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\alpha t} g(t - nh) = (\mathrm{e}_{m\alpha} \mathcal{T}_{-nh} g)(t)$

$f \in \mathrm{L}_2, \quad T^{win}_{m,n} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{m,n})$

Оконное преобразование Фурье.

Дискретное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \alpha, h > 0, n, m \in \mathbb{Z}. \quad g^{m,n}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\alpha t} g(t - nh) = (\mathrm{e}_{m\alpha} \mathcal{T}_{-nh} g)(t)$

$f \in \mathrm{L}_2, \quad T^{win}_{m,n} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{m,n})$

Непрерывное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \quad g^{\omega,\tau} \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_\omega \mathcal{T}_{-\tau} g.$

$f \in \mathrm{L}_2, \quad T^{win}_{\omega,\tau} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{\omega,\tau}) = \int f(t) e^{-i\omega t} g^*(t - \tau) dt.$

Оконное преобразование Фурье.

Дискретное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \alpha, h > 0, n, m \in \mathbb{Z}. \quad g^{m,n}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\alpha t} g(t - nh) = (\mathrm{e}_{m\alpha} \mathcal{T}_{-nh} g)(t)$

$f \in \mathrm{L}_2, \quad T^{win}_{m,n} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{m,n})$

Непрерывное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \quad g^{\omega,\tau} \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_\omega \mathcal{T}_{-\tau} g.$

$f \in \mathrm{L}_2, \quad T^{win}_{\omega,\tau} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{\omega,\tau}) = \int f(t) e^{-i\omega t} g^*(t - \tau) dt.$

Требования к g: частотно-временная локализация

g называют окном, оболочкой. Как правило, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Хорошая частотно-временная локализация $\Leftrightarrow$ быстрое затухание $g(t), (\hat{g})(\xi)$ при $t, \xi \to \pm\infty$. Например, $g(t) = e^{-t^2/2}$ – распространённый выбор.

Вэйвлет-преобразование.

Вэйвлет-преобразование.

Материнский вэйвлет.

(i) $\psi \in \mathrm{L}_2$; (ii) $C_\psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{|\xi|} < \infty$.
От материнского вейвлета, как правило, требуется хорошая частотно-временная локализация $\Longrightarrow \psi \in \mathrm{L}_1 \Longrightarrow \hat{\psi} \in \mathrm{C}$.

В таком случае $C_\psi < \infty \Longrightarrow \hat{\psi}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$.

Вэйвлет-преобразование.

Материнский вэйвлет.

$(i)\ \psi \in \mathrm{L}_2;\quad (ii)\ C_\psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{|\xi|} < \infty.$
От материнского вейвлета, как правило, требуется хорошая частотно-временная локализация $\Longrightarrow \psi \in \mathrm{L}_1 \Longrightarrow \hat{\psi} \in \mathrm{C}$.

В таком случае $C_\psi < \infty \Longrightarrow \hat{\psi}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$.

Непрерывное преобразование.

$a, b \in \mathbb{R},\quad \psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(\frac{t-b}{a}).$

$f \in \mathrm{L}_2,\quad (T^{wvl}f)(a,b) = (f, \psi^{a,b}) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(t)\psi(\frac{t-b}{a})dt.$

Вэйвлет-преобразование.

Материнский вэйвлет.

(i) $\psi \in \mathrm{L}_2$; (ii) $C_\psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{|\xi|} < \infty$.
От материнского вейвлета, как правило, требуется хорошая частотно-временная локализация $\implies \psi \in \mathrm{L}_1 \implies \hat{\psi} \in \mathrm{C}$.
В таком случае $C_\psi < \infty \implies \hat{\psi}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$.

Непрерывное преобразование.

$a, b \in \mathbb{R}$, $\psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(\frac{t-b}{a})$.
$f \in \mathrm{L}_2$, $(T^{wvl}f)(a,b) = (f, \psi^{a,b}) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(t)\psi(\frac{t-b}{a})dt$.

Дискретное преобразование.

$\lambda, h > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ $\psi^{m,n}(t) = \lambda^{-\frac{m}{2}}\psi(\lambda^{-m}t - nh)$.
$f \in \mathrm{L}_2$, $T^{wvl}_{m,n}f = (f, \psi^{m,n}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^m}} \int f(t)\psi(\lambda^{-m}t - nh)dt$.

Обращение.

Обращение.

Непрерывное вейвлет-преобразование.

$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int \frac{(f, \psi^{a,b}) \psi^{a,b}(t) dadb}{a^2}$.

Обращение.

Непрерывное вейвлет-преобразование.

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int \frac{(f, \psi^{a,b})\psi^{a,b}(t) da db}{a^2}.$$

Непрерывное оконное преобразование.

$$f(t) = \frac{1}{C_g} \int \int (f, g^{\omega,\tau}) g^{\omega,\tau}(t) d\omega d\tau, \quad C_g = (2\pi \|g\|^2).$$

Обращение.

Непрерывное вейвлет-преобразование.

$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int \frac{(f, \psi^{a,b})\psi^{a,b}(t) dadb}{a^2}.$

Непрерывное оконное преобразование.

$f(t) = \frac{1}{C_g} \int \int (f, g^{\omega,\tau}) g^{\omega,\tau}(t) d\omega d\tau, \quad C_g = (2\pi \|g\|^2).$

Обращение дискретных преобразований

Всё не так просто...
1. Образуют ли функции $\psi^{m,n}$ ортобазис?
2. Образуют ли функции $\psi^{m,n}$ хоть какой-то базис?
3. Насколько численно устойчива процедура восстановления сигнала по вейвлет-базису?