НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 9
Вейвлеты и вокруг-I

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

12 мая 2020 г.

Проблема обращения дискретных преобразований.

Проблема обращения дискретных преобразований.

Дискретное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \alpha, h > 0, n, m \in \mathbb{Z}. \quad g^{m,n}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\alpha t} g(t - nh) = (\mathrm{e}_{m\alpha} \mathcal{T}_{-nh} g)(t)$

$f \in \mathrm{L}_2, \quad T^{win}_{m,n} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{m,n})$

Проблема обращения дискретных преобразований.

Дискретное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \alpha, h > 0, n, m \in \mathbb{Z}.\quad g^{m,n}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\alpha t} g(t - nh) = (\mathrm{e}_{m\alpha} \mathcal{T}_{-nh} g)(t)$

$f \in \mathrm{L}_2,\quad T^{win}_{m,n} f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f, g^{m,n})$

Дискретное вэйвлет преобразование.

Материнский вэйвлет: (i) $\psi \in \mathrm{L}_2$; $\quad (ii)$ $\int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{|\xi|} < \infty$.

$\lambda, h > 0,\ m, n \in \mathbb{Z} \quad \psi^{m,n}(t) = \lambda^{-\frac{m}{2}} \psi(\lambda^{-m} t - nh)$.

$f \in \mathrm{L}_2,\quad T^{wvl}_{m,n} f = (f, \psi^{m,n}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^m}} \int f(t) \psi(\lambda^{-m} t - nh) dt$.

Проблема обращения дискретных преобразований.

Дискретное оконное преобразование.

$g \in \mathrm{L}_2, \alpha, h > 0, n, m \in \mathbb{Z}.\quad g^{m,n}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{im\alpha t} g(t - nh) = (\mathrm{e}_{m\alpha} \mathcal{T}_{-nh} g)(t)$

$f \in \mathrm{L}_2,\quad T^{win}_{m,n} f \overset{\text{def}}{=} (f, g^{m,n})$

Дискретное вэйвлет преобразование.

Материнский вэйвлет: $(i)\ \psi \in \mathrm{L}_2;\quad (ii)\ \int \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi}{|\xi|} < \infty.$

$\lambda, h > 0,\ m, n \in \mathbb{Z}\quad \psi^{m,n}(t) = \lambda^{-\frac{m}{2}} \psi(\lambda^{-m} t - nh).$

$f \in \mathrm{L}_2,\quad T^{wvl}_{m,n} f = (f, \psi^{m,n}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^m}} \int f(t) \psi(\lambda^{-m} t - nh) dt.$

Главный вопрос: восстановима ли f по $T^{wvl}_{m,n} f$ $(T^{win}_{m,n} f)$

и устойчива ли эта процедура численно?

Хороший случай: $\{\psi_{m,n}\}$ $(\{g_{m,n}\})$ – ортобазис $\implies f = \sum_{m,n} (f, \psi_{m,n}) \psi_{m,n},$

$\|f\|^2 = \sum_{m,n} (f, \psi_{m,n})^2.\quad \tilde{f} = \sum_{m,n} ((f, \psi_{m,n}) + \varepsilon_{mn}) \psi_{m,n} \implies \|\tilde{f} - f\|^2 = \sum_{m,n} \varepsilon^2_{mn}.$

Базис Хаара

Вейвлет Хаара: $\psi = \theta(t) - 2\theta(t - 1/2) + \theta(t - 1)$; $\quad \hat{\psi} = \frac{2 i \sin^2(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{i\xi}{2}}}{\pi\xi}$

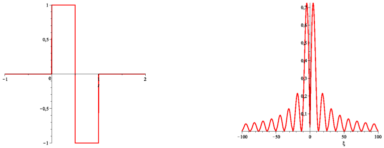

Рис. : Слева – вейвлет Хаара, справа – его Фурье-образ.

Базис: $\psi_{mn}(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)$

Базис Хаара

Вейвлет Хаара: $\psi = \theta(t) - 2\theta(t-1/2) + \theta(t-1)$; $\quad \hat{\psi} = \frac{2isin^2(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{i\xi}{2}}}{\pi\xi}$

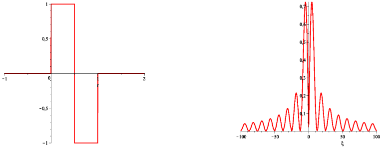

Рис. : Слева – вейвлет Хаара, справа – его Фурье-образ.

Базис: $\psi_{mn}(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)$

Ортогональность.

$$\mathrm{supp}\psi_{mn} = [2^m n, 2^m(n+1)] \stackrel{\text{def}}{=} I_{mn} \Longrightarrow |I_{mn} \cap I_{mk}| = 0 \Longrightarrow (\psi_{mn}, \psi_{mk}) = \delta_{kn};$$

Предложение.

$$j \in \mathbb{N} \;\&\; |I_{mn} \cap I_{m+j,q}| > 0 \Longrightarrow I_{mn} \subset I_{m+j,q} \;\&\; \psi_{m+j,q}\big|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}.$$

Базис Хаара. Продолжение.

Базис Хаара. Продолжение.

Доказательство предложения.

Предположение $\Longrightarrow\ 2^{m+j}q \le 2^m n < 2^{m+j}(q+1)\ \Leftrightarrow\ 2^j q \le n < 2^j(q+1)\ \Leftrightarrow$ $2^j q < n+1 \le 2^j(q+1)$. $\quad 2^j q \le n < 2^{j-1}(2q+1)\ \Leftrightarrow\ 2^j q < n+1 \le 2^{j-1}(2q+1)$ $\Longrightarrow\ \psi_{m+j,q}|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}.$ $\qquad 2^{j-1}(2q+1) \le n < 2^j(q+1)\ \Leftrightarrow$ $2^{j-1}(2q+1) < n+1 \le 2^j(q+1)\ \Longrightarrow\ \psi_{m+j,q}|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}.$

Базис Хаара. Продолжение.

Доказательство предложения.

Предположение $\Longrightarrow\ 2^{m+j}q \le 2^m n < 2^{m+j}(q+1) \Leftrightarrow 2^j q \le n < 2^j(q+1) \Leftrightarrow$ $2^j q < n+1 \le 2^j(q+1)$. $\ 2^j q \le n < 2^{j-1}(2q+1) \Leftrightarrow 2^j q < n+1 \le 2^{j-1}(2q+1)$ $\Longrightarrow\ \psi_{m+j,q}|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}.$ $\ 2^{j-1}(2q+1) \le n < 2^j(q+1) \Leftrightarrow$ $2^{j-1}(2q+1) < n+1 \le 2^j(q+1) \Longrightarrow \psi_{m+j,q}|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}.$

Ортогональность

Предл. $\Longrightarrow (\psi_{m+j,q}, \psi_{m,n}) = \int\limits_{I_{mn}\cap I_{m+j,n}} \psi_{m+j,q}\psi_{m,n}dt = \begin{cases} 0, & |I_{mn}\cap I_{m+j,q}| = 0, \\ \pm \int\limits_{I_{mn}} \psi_{m,n}dt = 0 & \end{cases}$

Базис Хаара. Продолжение.

Доказательство предложения.

Предположение $\Longrightarrow\ 2^{m+j}q \le 2^m n < 2^{m+j}(q+1)\ \Leftrightarrow\ 2^j q \le n < 2^j(q+1)\ \Leftrightarrow$ $2^j q < n+1 \le 2^j(q+1)$. $\quad 2^j q \le n < 2^{j-1}(2q+1)\ \Leftrightarrow\ 2^j q < n+1 \le 2^{j-1}(2q+1)$ $\Longrightarrow\ \psi_{m+j,q}|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}$. $\quad 2^{j-1}(2q+1) \le n < 2^j(q+1)\ \Leftrightarrow$ $2^{j-1}(2q+1) < n+1 \le 2^j(q+1) \Longrightarrow\ \psi_{m+j,q}|_{I_{mn}} \equiv \mathrm{const}$.

Ортогональность

Предл. $\Longrightarrow\ (\psi_{m+j,q}, \psi_{m,n}) = \int\limits_{I_{mn}\cap I_{m+j,n}} \psi_{m+j,q}\psi_{m,n}dt = \begin{cases} 0, & |I_{mn}\cap I_{m+j,q}| = 0, \\ \pm \int\limits_{I_{mn}} \psi_{m,n}dt = 0 & \end{cases}$

Полнота.

χ_{mn} – характ. функции I_{mn}, $\|\chi_{mn}\|^2 = |I_{mn}| = 2^m$.

$\forall j \in \mathbb{N}\ \ \exists q \in \mathbb{Z}:\ 2^j q \le n < 2^j(q+1)\ \Leftrightarrow\ I_{mn} \subset I_{m+j,q}$

$$\Longrightarrow\ (\chi_{m,n}, \psi_{m+j,n})^2 = 2^{-m-j}|I_{mn}|^2 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}(\chi_{mn}, \psi_{m+j,n})^2 = 2^m\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 2^m$$

Понятие фрейма

Понятие фрейма

Определение.

Пусть H – гилбертово пространство, $J \subset \mathbb{Z}^k$. Множество $\{\psi_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{H}$ – *фрейм* $\Leftrightarrow \exists A, B > 0 : B\|f\|^2 \leq \sum\limits_{j\in J} |(f, \psi_j)|^2 \leq A\|f\|^2$; A, B – *границы* фрейма. Фрейм – *жёсткий* $\Leftrightarrow$ $A = B,\ \sum\limits_{j\in J} |(f, \psi_j)|^2 = A\|f\|^2$

Понятие фрейма

Определение.

Пусть H – гилбертово пространство, $J \subset \mathbb{Z}^k$. Множество $\{\psi_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{H}$ – *фрейм* $\Leftrightarrow \exists A, B > 0 : B\|f\|^2 \leq \sum\limits_{j\in J} |(f, \psi_j)|^2 \leq A\|f\|^2$; A, B – *границы* фрейма. Фрейм – *жёсткий* $\Leftrightarrow A = B$, $\sum\limits_{j\in J} |(f, \psi_j)|^2 = A\|f\|^2$

Пример 1.

$\sqrt[3]{1} = \{1, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}\}$ – жёсткий фрейм в $\mathbb{C}$ с $A = B = 3$:
$\sum\limits_{\psi_j \in \sqrt[3]{1}} |(f, \psi_j)|^2 = \sum\limits_{\psi_j \in \sqrt[3]{1}} |f\psi_j|^2 = |f|^2 \sum\limits_{\psi_j \in \sqrt[3]{1}} |\psi_j|^2 = 3|f|^2 = 3\|f\|^2$

Понятие фрейма

Определение.

Пусть H – гилбертово пространство, $J \subset \mathbb{Z}^k$. Множество $\{\psi_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{H}$ – *фрейм* $\Leftrightarrow \exists A, B > 0 : B\|f\|^2 \le \sum\limits_{j\in J} |(f, \psi_j)|^2 \le A\|f\|^2$; A, B – *границы* фрейма. Фрейм – *жёсткий* $\Leftrightarrow$ $A = B$, $\sum\limits_{j\in J} |(f, \psi_j)|^2 = A\|f\|^2$

Пример 1.

$\sqrt[3]{1} = \{1, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}\}$ – жёсткий фрейм в $\mathbb{C}$ с $A = B = 3$:

$$\sum_{\psi_j \in \sqrt[3]{1}} |(f, \psi_j)|^2 = \sum_{\psi_j \in \sqrt[3]{1}} |f\psi_j|^2 = |f|^2 \sum_{\psi_j \in \sqrt[3]{1}} |\psi_j|^2 = 3|f|^2 = 3\|f\|^2$$

Пример 2.

$\psi_1 = (1, 0), \psi_2 = \frac{(-1,\sqrt{3})}{2}, \psi_3 = -\frac{(1,\sqrt{3})}{2}$ – жёсткий фрейм в $\mathbb{C}^2$ с $A = B = 3/2$:

$$\sum |(f, \psi_j)|^2 = |f_1|^2 + \frac{|f_2\sqrt{3}-f_1|^2}{4} + \frac{|f_2\sqrt{3}+f_1|^2}{4} = 3\|f\|^2/2$$

Свойства фреймов.

Свойства фреймов.

Фреймы и базисы.

Фрейм с $A = B = 1 = \|\psi_j\|\ \forall j \in J$ – ортонормированный базис.

Свойства фреймов.

Фреймы и базисы.

Фрейм с $A = B = 1 = \|\psi_j\|\ \forall j \in J$ – ортонормированный базис.

Фрейм-преобразование

$\mathrm{F}:\ f \to \hat{f}_j = (f, \psi_j), \quad \mathrm{F}: \mathrm{H} \to \mathrm{l}_2(J)$ – ограничен.

Свойства фреймов.

Фреймы и базисы.

Фрейм с $A = B = 1 = \|\psi_j\|\ \forall j \in J$ – ортонормированный базис.

Фрейм-преобразование

$\mathrm{F}:\ f \to \hat{f}_j = (f, \psi_j), \quad \mathrm{F} : \mathrm{H} \to \mathrm{l}_2(J)$ – ограничен.

Обращение F в жёстком случае.

$$A\|f\| = \|\hat{f}\|_{\mathrm{l}_2} \implies A(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = \sum_{j \in J} (f, \psi_j)(\psi_j, g) \implies f = \sum_{j \in J} \frac{(f, \psi_j)\psi_j}{A}.$$

Обращение F в общем случае.

$\|\hat{f}\|^2_{\mathrm{l}_2}$ – квадратичная форма над H, $\exists G : \mathrm{H} \to \mathrm{H},\ \|G\| \le B,\ G^* = G, \|\hat{f}\|^2_{\mathrm{l}_2} = (Gf, f) \implies Gf = \sum_{j \in J} (f, \psi_j)\psi_j \implies f = \sum_{j \in J} (f, \psi_j)\widetilde{\psi}_j, \quad \widetilde{\psi}_j = G^{-1}\psi_j.$

Двойственность фреймов.

Двойственность фреймов.

Определение.

$\{\psi_j\}_{j\in J}$ – фрейм $\implies \{\widetilde{\psi}_j\}_{j\in J} \stackrel{\mathrm{def}}{=} G^{-1}\{\psi_j\}_{j\in J}$ – *двойственный* фрейм; его границы – A^{-1}, B^{-1}; двойственный оператор обозначается $\widetilde{\mathrm{F}}$.

$\widetilde{\widetilde{\psi}}_j = \psi_j \implies \sum\limits_{j\in J}(f,\widetilde{\psi}_j)\psi_j = f = \sum\limits_{j\in J}(f,\psi_j)\widetilde{\psi}_j$.

$B = A \implies (Gf,f) = A\|f\|^2 \implies G = A\mathrm{id} \implies \widetilde{\psi}_j = \frac{\psi_j}{A}$.

Двойственность фреймов.

Определение.

$\{\psi_j\}_{j\in J}$ – фрейм $\implies \{\widetilde{\psi}_j\}_{j\in J} \stackrel{\mathrm{def}}{=} G^{-1}\{\psi_j\}_{j\in J}$ – *двойственный* фрейм; его границы – A^{-1}, B^{-1}; двойственный оператор обозначается $\widetilde{\mathrm{F}}$.
$\widetilde{\widetilde{\psi}}_j = \psi_j \implies \sum\limits_{j\in J}(f,\widetilde{\psi}_j)\psi_j = f = \sum\limits_{j\in J}(f,\psi_j)\widetilde{\psi}_j$.
$B = A \implies (Gf,f) = A\|f\|^2 \implies G = A\mathrm{id} \implies \widetilde{\psi}_j = \frac{\psi_j}{A}$.

Вариационные свойства.

$\check{f} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\mathrm{F}}f$. $\quad \|\check{f}\|^2_{\mathrm{l}_2} = \inf\{\|c\|^2_{\mathrm{l}_2}, c : \sum\limits_{j\in J} c_j\widetilde{\psi}_j = f\}$

Двойственность фреймов.

Определение.

$\{\psi_j\}_{j\in J}$ – фрейм $\Longrightarrow$ $\{\widetilde{\psi}_j\}_{j\in J} \overset{\text{def}}{=} G^{-1}\{\psi_j\}_{j\in J}$ – *двойственный* фрейм; его границы – A^{-1}, B^{-1}; двойственный оператор обозначается $\widetilde{\mathrm{F}}$.
$\widetilde{\widetilde{\psi}}_j = \psi_j \Longrightarrow \sum\limits_{j\in J}(f, \widetilde{\psi}_j)\psi_j = f = \sum\limits_{j\in J}(f, \psi_j)\widetilde{\psi}_j$.
$B = A \Longrightarrow (Gf, f) = A\|f\|^2 \Longrightarrow G = A\mathrm{id} \Longrightarrow \widetilde{\psi}_j = \frac{\psi_j}{A}$.

Вариационные свойства.

$\check{f} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{\mathrm{F}}f$. $\quad \|\check{f}\|^2_{\mathrm{l}_2} = \inf\{\|c\|^2_{\mathrm{l}_2}, c : \sum\limits_{j\in J} c_j\widetilde{\psi}_j = f\}$

Пример 3.

$\psi_1 = (1, 0), \psi_2 = \frac{(-1,\sqrt{3})}{2}, \psi_3 = -\frac{(1,\sqrt{3})}{2}, f = \frac{2((f,\psi_1)\psi_1+(f,\psi_2)\psi_2+(f,\psi_3)\psi_3)}{3} = \frac{2(((f,\psi_1)+c)\psi_1+((f,\psi_2)+c)\psi_2+((f,\psi_3)+c)\psi_3)}{3}$ $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Фреймы вейвлетов.

Фреймы вейвлетов.

Итерационное обращение G.

$\mathrm{G}u = v \Leftrightarrow u = u - \lambda(Gu - v) \Leftrightarrow u = Ku + \lambda v,\ K = id - \lambda\mathrm{G}$.
$\lambda = \frac{2}{A+B} \implies \frac{A-B}{A+B}\|u\|^2 \le ((u - \lambda\mathrm{G})u, u) \le \frac{B-A}{A+B}\|u\|^2 \implies \|K\| \le \frac{B-A}{A+B} < 1 \implies$ работает метод простой итерации.
Формула восстановления
$\implies f = \sum\limits_{j\in J}(f,\psi_j)\tilde{\psi}_j,\ \tilde{\psi}_j = \mathrm{G}\psi_j \implies \mathrm{G}f = g,\ g = \sum\limits_{j\in J}(f,\psi_j)\psi_j$.

Необходимое условие.

$\psi \in \mathrm{L}_2,\ \lambda > 1,\ h > 0,\ \psi_{mn}(t) \overset{\text{def}}{=} \lambda^{-\frac{m}{2}}\psi(\lambda^{-m}t - nh),\ \{\psi_{mn}\}$ – фрейм с границами $A, B \implies \frac{Ah\ln\lambda}{\pi} \le \int\limits_{\pm\xi>0} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi}{|\xi|} \le \frac{Bh\ln\lambda}{\pi}$

Фреймы вейвлетов.

Итерационное обращение G.

$\mathrm{G}u = v \Leftrightarrow u = u - \lambda(Gu - v) \Leftrightarrow u = Ku + \lambda v,\ K = id - \lambda \mathrm{G}$.
$\lambda = \frac{2}{A+B} \implies \frac{A-B}{A+B}\|u\|^2 \le ((u - \lambda \mathrm{G})u, u) \le \frac{B-A}{A+B}\|u\|^2 \implies \|K\| \le \frac{B-A}{A+B} < 1 \implies$ работает метод простой итерации.
Формула восстановления
$\implies f = \sum\limits_{j \in J} (f, \psi_j)\tilde{\psi}_j,\ \tilde{\psi}_j = \mathrm{G}\psi_j \implies \mathrm{G}f = g,\ g = \sum\limits_{j \in J} (f, \psi_j)\psi_j$.

Необходимое условие.

$\psi \in \mathrm{L}_2,\ \lambda > 1,\ h > 0,\ \psi_{mn}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda^{-\frac{m}{2}}\psi(\lambda^{-m}t - nh),\ \{\psi_{mn}\}$ – фрейм с границами $A, B \implies \frac{Ah \ln \lambda}{\pi} \le \int\limits_{\pm\xi > 0} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi}{|\xi|} \le \frac{Bh \ln \lambda}{\pi}$

Достаточное условие.

$|\hat{\psi}(\xi)| \le C|\xi|^{\alpha}(1 + |\xi|)^{-\gamma},\ \alpha > 0,\ \gamma > 1 + \alpha \implies \exists\, h_* :\ \forall\, h < h_*\ \{\psi_{mn}\}$ – фрейм.