НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ
Лекция 10
Вейвлеты и вокруг-II

Моргулис Андрей Борисович
д.ф.-м.н., доц., КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

5 июня 2019 г.

Мультивэйвлеты, фреймлеты, «октавы»

Мультивэйвлеты, фреймлеты, «октавы»

Структура фрейма.

Фрейм: $\ldots, \psi_{mn}^{(1)}, \psi_{mn}^{(2)}, \ldots, \psi_{mn}^{(N)}, \ldots$
$\psi_{mn}^{(\nu)}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi^{(\nu)}(2^{-m}x - nh)\ m, n \in \mathbb{Z},\ \nu = 1, \ldots, N.$
Пример: $\psi^{(\nu)}(x) = 2^{-\frac{\nu-1}{2N}} \psi(2^{-(\frac{\nu-1}{N})}x)$ – голоса октавы.

Мультивэйвлеты, фреймлеты, «октавы»

Структура фрейма.

Фрейм: $\ldots, \psi^{(1)}_{mn}, \psi^{(2)}_{mn}, \ldots, \psi^{(N)}_{mn}, \ldots$
$\psi^{(\nu)}_{mn}(x) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi^{(\nu)}(2^{-m}x - nh)$ $m, n \in \mathbb{Z},\ \nu = 1, \ldots, N.$
Пример: $\psi^{(\nu)}(x) = 2^{-\frac{\nu-1}{2N}}\psi(2^{-(\frac{\nu-1}{N})}x)$ – голоса октавы.

Цель.

Фрейм: $\psi(\lambda^{-m}x - nh)$, A, B - границы фрейма. $A/B \approx 1$ – быстрое восстановление. Цель: $A/B \approx 1$ при $\lambda = 2$.

Мультивэйвлеты, фреймлеты, «октавы»

Структура фрейма.

Фрейм: $\ldots, \psi^{(1)}_{mn}, \psi^{(2)}_{mn}, \ldots, \psi^{(N)}_{mn}, \ldots$
$\psi^{(\nu)}_{mn}(x) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi^{(\nu)}(2^{-m}x - nh)$ $m, n \in \mathbb{Z}$, $\nu = 1, \ldots, N$.
Пример: $\psi^{(\nu)}(x) = 2^{-\frac{\nu-1}{2N}}\psi(2^{-(\frac{\nu-1}{N})}x)$ – голоса октавы.

Цель.

Фрейм: $\psi(\lambda^{-m}x - nh)$, A, B - границы фрейма. $A/B \approx 1$ – быстрое восстановление. Цель: $A/B \approx 1$ при $\lambda = 2$.

Удобство $\lambda = 2$.

$\psi(2^{-m}x - nh) = \psi(\frac{x-b}{a})$, где $b = 2^m nh$, $a = 2^m$; $m \to m+1 \Longrightarrow$
$(a, b) \to 2(a, b)$.

Пример: октава MHAT

Границы фреймов вейвлетов, полученных из функции мексиканская шляпа $\psi(x) = 2/\sqrt{3}\pi^{-1/4}(1-x^2)\,e^{-x^2/2}$. *Параметр сжатия* $a_0 = 2$ *для всех случаев,* N *обозначает число голосов.*

$N = 1$

b_0	A	B	B/A
0.25	13.091	14.183	1.083
0.50	6.546	7.092	1.083
0.75	4.364	4.728	1.083
1.00	3.223	3.596	1.116
1.25	2.001	3.454	1.726
1.50	0.325	4.221	12.986

$N = 2$

b_0	A	B	B/A
0.25	27.273	27.278	1.0002
0.50	13.673	13.676	1.0002
0.75	9.091	9.093	1.0002
1.00	6.768	6.870	1.015
1.25	4.834	6.077	1.257
1.50	2.609	6.483	2.485
1.75	0.517	7.276	14.061

$N = 3$

b_0	A	B	B/A
0.25	40.914	40.914	1.0000
0.50	20.457	20.457	1.0000
0.75	13.638	13.638	1.0000
1.00	10.178	10.279	1.010
1.25	7.530	8.835	1.173
1.50	4.629	9.009	1.947
1.75	1.747	9.942	5.691

$N = 4$

b_0	A	B	B/A
0.25	54.552	54.552	1.0000
0.50	27.276	27.276	1.0000
0.75	18.184	18.184	1.0000
1.00	13.586	13.690	1.007
1.25	10.205	11.616	1.138
1.50	6.594	11.590	1.758
1.75	2.928	12.659	4.324

Вычисление вэйвлет-коэффициентов

Вычисление вэйвлет-коэффициентов

Постановка вопроса.

Вычисление (f, ψ_{mn}) включает интегрирование по интервалам длины $\sim 2^m$, что приводит к трудностям при больших $m > 0$.

Вычисление вэйвлет-коэффициентов

Постановка вопроса.

Вычисление (f, ψ_{mn}) включает интегрирование по интервалам длины $\sim 2^m$, что приводит к трудностям при больших $m > 0$.

Основное предположение.

$$\exists\ \phi : \phi(x) = \sum_p c_p \phi(2x - p); \quad \psi = \sum_q d_q \phi(x - q);$$

Вычисление вэйвлет-коэффициентов

Постановка вопроса.

Вычисление (f, ψ_{mn}) включает интегрирование по интервалам длины $\sim 2^m$, что приводит к трудностям при больших $m > 0$.

Основное предположение.

$$\exists\ \phi : \phi(x) = \sum_p c_p \phi(2x - p); \quad \psi = \sum_q d_q \phi(x - q);$$

Возможность рекурсии

$$\psi_{mn}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n) = \sum_q d_q 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}x - n - q) = \sum_q d_q \phi_{m,n+q}$$

$$\phi_{m,k} \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}x - k) = \sum_p c_p \phi(2(2^{-m}x - k) - p) = \sum_p c_p \phi_{m-1,2k+p};$$

$$(f, \psi_{mn}) = \sum_q d_q (f, \phi_{m,n+q}) = \sum_{p,q} d_q c_p (f, \phi_{m-1,2(n+q)+p});$$

Пример: $\psi = c\left(\phi(x) - \frac{\phi(x+1)+\phi(x-1)}{2}\right), c:\ \|\psi\| = 1; \quad \hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\frac{\xi}{2})}{\frac{\xi}{2}}\right)^4.$

Оконные фреймы

Оконные фреймы

Дискретное оконное ПФ

$f \to T_{mn}f = (f, g_{mn}), \quad g_{mn}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ $g \in \mathrm{L}_2$ – задана.

Оконные фреймы

Дискретное оконное ПФ

$f \to T_{mn}f = (f, g_{mn}), \quad g_{mn}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ $g \in \mathrm{L}_2$ – задана.

Роль частоты Найквиста.

$\{g_{mn}\}$ – фрейм с границами $A, B \implies A \leq \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega} \leq B$;
$\|g\| = 1$ & $\{g_{mn}\}$ – жёсткий фрейм $\implies A = B = \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega}$;
$\|g\| = 1$ & $\{g_{mn}\}$ – ортобазис $1 = A = B = \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega}$;

Оконные фреймы

Дискретное оконное ПФ

$f \to T_{mn}f = (f, g_{mn}), \quad g_{mn}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ $g \in \mathrm{L}_2$ – задана.

Роль частоты Найквиста.

$\{g_{mn}\}$ – фрейм с границами $A, B \implies A \le \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega} \le B$;
$\|g\| = 1$ & $\{g_{mn}\}$ – жёсткий фрейм $\implies A = B = \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega}$;
$\|g\| = 1$ & $\{g_{mn}\}$ – ортобазис $1 = A = B = \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega}$;

Грубое достаточное условие

$\exists\ C > 0, \gamma > 1 : |g(t)| \le \frac{C}{(1+|t|)^\gamma}\ \forall\ t \implies \exists \omega_* :\ \omega < \omega_* \implies \{g_{mn}\}$ – фрейм.

Оконные фреймы

Дискретное оконное ПФ

$f \to T_{mn}f = (f, g_{mn}), \quad g_{mn}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ $g \in \mathrm{L}_2$ – задана.

Роль частоты Найквиста.

$\{g_{mn}\}$ – фрейм с границами $A, B \implies A \leq \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega} \leq B$;
$\|g\| = 1$ & $\{g_{mn}\}$ – жёсткий фрейм $\implies A = B = \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega}$;
$\|g\| = 1$ & $\{g_{mn}\}$ – ортобазис $1 = A = B = \frac{2\pi\|g\|}{\tau\omega}$;

Грубое достаточное условие

$\exists\ C > 0, \gamma > 1 : |g(t)| \leq \frac{C}{(1+|t|)^\gamma}\ \forall\ t \implies \exists \omega_* :\ \omega < \omega_* \implies \{g_{mn}\}$ – фрейм.

Двойственный фрейм.

Восстановление: $f = \sum (f, g_{mn})\widetilde{g}_{mn}, \quad \widetilde{g}_{mn} = \mathrm{e}^{im\omega t}\widetilde{g}(t - n\tau), \quad \widetilde{g} = G^{-1}g.$

Гауссово окно: $g = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$

Гауссово окно: $g = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$

Полнота.

$\{g_{mn}\}$ полна в $\mathrm{L}_2 \Leftrightarrow \omega\tau \le 2\pi$.

Гауссово окно: $g = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$

Полнота.

$\{g_{mn}\}$ полна в $L_2 \Leftrightarrow \omega\tau \leq 2\pi$.

Это не ортобазис!

$$\omega\tau = 2\pi \implies \inf\{\sum_{mn} |(f, g_{mn})|^2 : \|f\| = 1\} = 0$$

Гауссово окно: $g = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}$

Полнота.

$\{g_{mn}\}$ полна в $\mathrm{L}_2 \Leftrightarrow \omega\tau \leq 2\pi$.

Это не ортобазис!

$$\omega\tau = 2\pi \implies \inf\{\sum_{mn} |(f, g_{mn})|^2 : \ \|f\| = 1\} = 0$$

$\omega\tau = 2\pi \implies$ «плохой» двойственный фрейм.

$f = \sum_{mn}(f, g_{mn})\widetilde{g}_{mn}$, $g_{mn} \notin \mathrm{L}_2$; сходимость ряда лишь в смысле распределений.

	$\omega_0 t_0 = \pi/2$				
t_0	A	$A_{\text{точное}}$	B	$B_{\text{точное}}$	B/A
0.5	1.203	1.221	7.091	7.091	5.896
1.0	3.853	3.854	4.147	4.147	1.076
1.5	3.899	3.899	4.101	4.101	1.052
2.0	3.322	3.322	4.679	4.679	1.408
2.5	2.365	2.365	5.664	5.664	2.395
3.0	1.427	1.427	6.772	6.772	4.745

	$\omega_0 t_0 = 1.9\pi$		
t_0	A	B	B/A
1.5	0.031	2.921	92.935
2.0	0.082	2.074	25.412
2.5	0.092	2.021	22.004
3.0	0.081	2.077	25.668
3.5	0.055	2.218	40.455
4.0	0.031	2.432	79.558

Теорема о частотно-временной локализации фрейма вэйвлетов.

Теорема о частотно-временной локализации фрейма вэйвлетов.

Условия локализации материнского вэйвлета.

Пусть
$\exists\ C, \alpha, \beta, \gamma > 0 :\ \forall\ x\ |\psi(x)| \leq C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^{\beta}(1+\xi^2)^{-\frac{1+\beta+\gamma}{2}}.$

Теорема о частотно-временной локализации фрейма вэйвлетов.

Условия локализации материнского вэйвлета.

Пусть
$\exists\ C, \alpha, \beta, \gamma > 0 :\ \forall\ x\ |\psi(x)| \le C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{\psi}(\xi)| \le C|\xi|^{\beta}(1+\xi^2)^{-\frac{1+\beta+\gamma}{2}}.$

Формулировка.

Пусть ψ удовлетворяет условию локализации, и $\psi_{mn}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{-\frac{m}{2}}\psi(\lambda^{-m}x - nh)$ образуют фрейм с границами A, B. Тогда
$\forall\ \varepsilon, \omega_0, \omega_1, T > 0\ \exists\ M \subset \mathbb{Z}^2 :\ |M| < \infty\ \&\ \forall f \in \mathrm{L}_2\ \ \|f - \sum_{(m,n)\in M} (f, \psi_{mn})\widetilde{\psi}_{mn}\| \le$
$\sqrt{\frac{B}{A}}(\|\hat{f}\|_{2,(-\omega_0,\omega_0)} + \|\hat{f}\|_{2,(-\infty,\omega_1)} + \|\hat{f}\|_{2,(\omega_1,\infty)} + \|f\|_{2,(-\infty,T)} + \|f\|_{2,(T,\infty)} + \varepsilon\|f\|)$

Теорема о частотно-временной локализации фрейма вэйвлетов.

Условия локализации материнского вэйвлета.

Пусть
$\exists\ C, \alpha, \beta, \gamma > 0 :\ \forall\ x\ |\psi(x)| \le C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{\psi}(\xi)| \le C|\xi|^{\beta}(1+\xi^2)^{-\frac{1+\beta+\gamma}{2}}.$

Формулировка.

Пусть ψ удовлетворяет условию локализации, и $\psi_{mn}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda^{-\frac{m}{2}}\psi(\lambda^{-m}x - nh)$ образуют фрейм с границами A, B. Тогда
$\forall\ \varepsilon, \omega_0, \omega_1, T > 0\ \exists\ M \subset \mathbb{Z}^2 :\ |M| < \infty\ \&\ \forall f \in \mathrm{L}_2\ \ \|f - \sum\limits_{(m,n)\in M}(f, \psi_{mn})\widetilde{\psi}_{mn}\| \le$
$\sqrt{\frac{B}{A}}(\|\hat{f}\|_{2,(-\omega_0,\omega_0)} + \|\hat{f}\|_{2,(-\infty,\omega_1)} + \|\hat{f}\|_{2,(\omega_1,\infty)} + \|f\|_{2,(-\infty,T)} + \|f\|_{2,(T,\infty)} + \varepsilon\|f\|)$

Замечание.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \lim\limits_{\omega_0\to+0,\omega_1,T\to\infty} \frac{|M|}{4T(\omega_1-\omega_0)} \sim \varepsilon^{\frac{2}{\gamma}}$

Теорема о частотно-временной локализации оконного фрейма.

Теорема о частотно-временной локализации оконного фрейма.

Условия локализации окна.

Пусть $\exists\ C, \alpha > 0 :\ \forall\ x\ |g(x)| \leq C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{g}(\xi)| \leq C(1+\xi^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$

Теорема о частотно-временной локализации оконного фрейма.

Условия локализации окна.

Пусть $\exists\ C, \alpha > 0 :\ \forall\ x\ |g(x)| \le C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{g}(\xi)| \le C(1+\xi^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}}$.

Формулировка.

Пусть g удовлетворяет условию локализации, и $g_{mn}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ образуют фрейм с границами A, B. Тогда $\forall\ \varepsilon, \Omega, T > 0\ \exists\ M \subset \mathbb{Z}^2 :\ |M| < \infty$ $\&\ \forall f \in \mathrm{L}_2\ \ \|f - \sum\limits_{(m,n)\in M} (f, g_{mn})\widetilde{g}_{mn}\| \le$

$$\sqrt{\frac{B}{A}}(\|\hat{f}\|_{2,(-\infty,-\Omega)} + \|\hat{f}\|_{2,(\Omega,\infty)} + \|f\|_{2,(-\infty,-T)} + \|f\|_{2,(T,\infty)} + \varepsilon\|f\|)$$

Теорема о частотно-временной локализации оконного фрейма.

Условия локализации окна.

Пусть $\exists\ C, \alpha > 0 :\ \forall\ x\ |g(x)| \le C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{g}(\xi)| \le C(1+\xi^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}}$.

Формулировка.

Пусть g удовлетворяет условию локализации, и $g_{mn}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ образуют фрейм с границами A, B. Тогда $\forall\ \varepsilon, \Omega, T > 0\ \exists\ M \subset \mathbb{Z}^2 :\ |M| < \infty$ & $\forall f \in \mathrm{L}_2\ \ \|f - \sum\limits_{(m,n)\in M} (f, g_{mn})\widetilde{g}_{mn}\| \le$

$$\sqrt{\frac{B}{A}}(\|\hat{f}\|_{2,(-\infty,-\Omega)} + \|\hat{f}\|_{2,(\Omega,\infty)} + \|f\|_{2,(-\infty,-T)} + \|f\|_{2,(T,\infty)} + \varepsilon\|f\|)$$

Замечание.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon :\ \ M \subset \widetilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(m,n) : |m\omega| < \Omega + \sigma_\varepsilon,\ |n\tau| \le T + \delta_\varepsilon\};$

$$\lim_{\Omega, T \to \infty} \frac{|\widetilde{M}|}{4T\Omega} = \frac{1}{\tau\omega}$$

Теорема о частотно-временной локализации оконного фрейма.

Условия локализации окна.

Пусть $\exists\ C,\alpha > 0:\ \forall\ x\ |g(x)| \le C(1+x^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},\ |\hat{g}(\xi)| \le C(1+\xi^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}}$.

Формулировка.

Пусть g удовлетворяет условию локализации, и $g_{mn}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t-n\tau)$ образуют фрейм с границами A, B. Тогда $\forall\ \varepsilon, \Omega, T > 0\ \exists\ M \subset \mathbb{Z}^2 :\ |M| < \infty$ $\&\ \forall f \in \mathrm{L}_2\ \ \|f - \sum\limits_{(m,n)\in M} (f, g_{mn})\widetilde{g}_{mn}\| \le$

$$\sqrt{\frac{B}{A}}(\|\hat{f}\|_{2,(-\infty,-\Omega)} + \|\hat{f}\|_{2,(\Omega,\infty)} + \|f\|_{2,(-\infty,-T)} + \|f\|_{2,(T,\infty)} + \varepsilon\|f\|)$$

Замечание.

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon :\ \ M \subset \widetilde{M} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(m,n) : |m\omega| < \Omega + \sigma_\varepsilon,\ \ |n\tau| \le T + \delta_\varepsilon\};$

$\lim\limits_{\Omega, T\to\infty} \frac{|\widetilde{M}|}{4T\Omega} = \frac{1}{\tau\omega}$

Проблема ортогонального базиса оконных функций.

Проблема ортогонального базиса оконных функций.

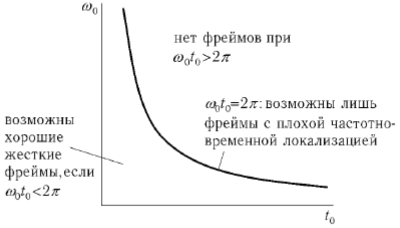
Оконные базисы плохо локализованы.

Теорема. Пусть $\tau\omega = 2\pi$ и оконные функции $g_{mn}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ образуют фрейм. Тогда расходится хотя бы один из интегралов $\int \xi^2 \hat{g}(\xi) d\xi \quad \int x^2 g(x) dx$.

Проблема ортогонального базиса оконных функций.

Оконные базисы плохо локализованы.

Теорема. Пусть $\tau\omega = 2\pi$ и оконные функции $g_{mn}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{im\omega t} g(t - n\tau)$ образуют фрейм. Тогда расходится хотя бы один из интегралов $\int \xi^2 \hat{g}(\xi) d\xi \quad \int x^2 g(x) dx$.



Базисы оконного типа.

$$G_{mn} = \varphi(x - \tfrac{n}{2}) \begin{cases} \cos 2\pi mx, & m+n \text{ чётно} \\ \sin 2\pi mx, & m+n \text{ нечётно} \end{cases}, \quad \varphi \in \mathbb{S}.$$

Кратномасштабный анализ.

Кратномасштабный анализ.

Определение.

Кратномасштабный анализ (КМА) состоит из цепочки подпространств $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots V_j \subset \ldots \subset \mathrm{L}_2,\ j \in \mathbb{Z}$, и функции $\varphi \in \mathrm{L}_2$,
таких, что $\mathrm{L}_2 = \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$,

$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0, \quad f \in V_0 \Longrightarrow f(\cdot - n) \in V_0$

$\varphi_{0n} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\cdot - n)$ – образуют ортобазис в V_0. Функция φ называется масштабирующей.

Кратномасштабный анализ.

Определение.

Кратномасштабный анализ (КМА) состоит из цепочки подпространств $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots V_j \subset \ldots \subset \mathrm{L}_2,\ j \in \mathbb{Z}$, и функции $\varphi \in \mathrm{L}_2$, таких, что $\mathrm{L}_2 = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$,

$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j\cdot) \in V_0, \quad f \in V_0 \implies f(\cdot - n) \in V_0$

$\varphi_{0n} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(\cdot - n)$ – образуют ортобазис в V_0. Функция φ называется масштабирующей.

Пример.

КМА Хаара: $V_0 = \overline{\mathrm{Lin}(\{\varphi_{0n}\})}, \quad \varphi = \theta(t) - \theta(t-1)$.

Кратномасштабный анализ.

Определение.

Кратномасштабный анализ (КМА) состоит из цепочки подпространств $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots V_j \subset \ldots \subset \mathrm{L}_2,\ j \in \mathbb{Z}$, и функции $\varphi \in \mathrm{L}_2$, таких, что $\mathrm{L}_2 = \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j}$,

$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j\cdot) \in V_0, \quad f \in V_0 \Longrightarrow f(\cdot - n) \in V_0$

$\varphi_{0n} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(\cdot - n)$ – образуют ортобазис в V_0. Функция φ называется масштабирующей.

Пример.

КМА Хаара: $V_0 = \overline{\mathrm{Lin}(\{\varphi_{0n}\})}, \quad \varphi = \theta(t) - \theta(t-1)$.

Замечание.

$\varphi_{m,n} = 2^{-\frac{m}{2}}\varphi(2^{-m}\cdot - n)$ – ортонормированный базис в $V_m\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

КМА и вэйвлеты.

Основной принцип.

Для любого KMA найдётся материнский вэйвлет ψ, такой, что $\psi_{mn} = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}\cdot -n)$ образуют ортобазис в L_2, причём $P_{j-1}f = P_j f + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(f,\psi_{jn})\psi_{jn}$, P_j – ортопроектор на V_j.

КМА и вэйвлеты.

Основной принцип.

Для любого КМА найдётся материнский вэйвлет ψ, такой, что $\psi_{mn} = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}\cdot - n)$ образуют ортобазис в L_2, причём $P_{j-1}f = P_j f + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (f, \psi_{jn})\psi_{jn}$, P_j – ортопроектор на V_j.

Вычисление материнского вэйвлета.

$\psi = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \chi^*_{1-n}\varphi_{-1,n}, \quad \chi_n = (\varphi, \varphi_{-1,n})$

КМА и вэйвлеты.

Основной принцип.

Для любого КМА найдётся материнский вэйвлет ψ, такой, что $\psi_{mn} = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}\cdot - n)$ образуют ортобазис в L_2, причём $P_{j-1}f = P_j f + \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (f,\psi_{jn})\psi_{jn}$, P_j – ортопроектор на V_j.

Вычисление материнского вэйвлета.

$$\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \chi^*_{1-n}\varphi_{-1,n}, \quad \chi_n = (\varphi, \varphi_{-1,n})$$

Пример. Базис Хаара.

$$\chi_n = \sqrt{2}\int(\theta(t)-\theta(t-1))(\theta(2t-n)-\theta(2t-n-1))dt = \int\limits_{(0,1)\cap(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2})} dt =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n\in\{0,1\} \\ 0, & n\notin\{0,1\} \end{cases} \implies \psi(t) = \frac{\varphi_{-1,0}(t)-\varphi_{-1,1}(t)+}{\sqrt{2}} =$$

$$(\theta(2t)-\theta(2t-1)) - (\theta(2t-1)-\theta(2t-2)) = (\theta(t)-2\theta(t-1/2)+\theta(t-1))$$