МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Индивидуальное задание № 2 по дисциплине
«НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ»
Тема: «Свёртки и фильтры»

Содержание задания

Чтобы окончательно сформулировать ИЗ следует определить числовые данные следующих ниже задач. С этой целью по номеру варианта ИЗ следует выбрать числа n, a, b, c из специального списка (файл data.pdf). Зная свой номер варианта, следует положить $\omega_0 = \sqrt[3]{abc}$. Всего имеется 50 вариантов. За распределение вариантов отвечают старосты групп.

Дан сигнал

$$f(t) = (a\sin^n(\omega_0 t) + b\sin(25\omega_0 t))(\theta(t) - \theta(t-5T)), \quad T = 2\pi/\omega_0.$$

где θ – функция Хевисайда[1]. Далее $a\sin^n(\omega_0 t)$ рассматривается как «полезный сигнал», а $b\sin(25\omega_0 t)$ – как «шум».

1а. Выделите полезный сигнал с помощью идеального фильтра

$$\mu = \theta(\xi+\nu) - \theta(\xi-\nu)$$

, управляя параметром $\nu > 0$. Проконтролируйте результат визуально. С этой целью выведите следующие пары графиков: $\bar{f}(t), a\sin^n(\omega_0 t), t = T..3T$, $\bar{f}(t), a\sin^n(\omega_0 t), t = -T..6T$, где через $\bar{f}$ обозначен сигнал, полученный в результате фильтрации. Каждую пару графиков разместите на своей панели.

1б. С помощью узкополосной фильтрации выделите гармонические составляющие полезного сигнала, имеющие частоты ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$. С этой целью «настройте» идеальный фильтр

$$\mu = \frac{\theta(\xi+\omega+\nu) - \theta(\xi+\omega-\nu) + \theta(\xi-\omega+\nu) - \theta(\xi-\omega-\nu)}{\theta(2\omega+\nu) - \theta(2\omega-\nu) + 1},$$

управляя параметрами $\omega \geq 0, \nu > 0$. Проконтролируйте результаты визуально. С этой целью выведите следующие пары графиков: $\bar{h}_k(t), a_k\sin(k\omega_0 t), t = 0..T$, $\bar{h}_k(t), a_k\sin(k\omega_0 t), t = -T..6T$, где $k = 1,2,3$, и через $\bar{h}_k$ обозначены результаты фильтраций, а через a_k – коэффициент, с которым гармоника $\sin(k\omega_0 t)$ входит в разложение $\sin^n(\omega_0 t)$. Каждую пару графиков разместите на своей панели.

2а. Реализуйте программу действий п. 1а, пользуясь гауссовым фильтром

$$\mu = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\omega)^2}{4\nu}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+\omega)^2}{4\nu}}}{1 + \mathrm{e}^{-\omega^2/\nu}},$$

и управляя параметрами $\omega \geq 0, \nu > 0$.

2б. Реализуйте программу действий п. 1б, пользуясь гауссовым фильтром

$$\mu = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\omega)^2}{4\nu}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+\omega)^2}{4\nu}}}{1 + \mathrm{e}^{-\omega^2/\nu}}$$

.

[1] $\chi(t) = \theta(t) - \theta(t-5T)$ – характеристическая функция интервала $(0, 5T)$,

3а. Реализуйте программу действий п. 1а, пользуясь «физически приемлемым» фильтром

$$\mu = \frac{\nu^2\omega^2}{(\omega^2 - \xi^2 + i\xi\nu)^2},$$

и управляя параметрами $\omega \geq 0, \nu > 0$.

3б. Реализуйте программу действий п. 1б, пользуясь «физически приемлемым» фильтром

$$\mu = \frac{\nu^2\omega^2}{(\omega^2 - \xi^2 + i\xi\nu)^2}$$

.

Комментарии.

1. С математической точки зрения фильтрация сигнала f состоит в мультипликаторном преобразовании $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\mu\mathcal{F}f$, где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье:

$$\left(\mathcal{F}f\right)(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\xi t}dt, \quad \left(\mathcal{F}^{-1}g\right)(t) = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{i\xi t}dt$$

Здесь принята та же нормировка преобразований $\mathcal{F}^{-1}$, $\mathcal{F}$, что и в их реализациях в виде команд `fourier, invfourier` среды *Maple*. В лекциях принята другая нормировка. Полезно помнить, что указанное мультипликаторное преобразование эквивалентно свёртке $w * f$, где $w = \mathcal{F}^{-1}\mu$.

2. Реализация фильтрации может быть как символьной (команды `int, fourier, invfourier` и др), так и численной (`evalf(Int(....))`), по вашему выбору. Неудачный выбор, пусть и формально верный, может непомерно затянуть расчет или дать заведомо абсурдный результат. В таком случае нужно выбрать другой способ вычисления фильтрации.

3. В случае идеального фильтра функция w вычисляется элементарно. Поэтому рекомендуется сначала найти её, а затём – свёртку $w * f$. Её рекомендую вычислять символьно. Примеры реализации в среде *Maple* показаны на рис. 3-4. Обратите внимание, что частота ω (в роли ω_0) представлена с плавающей точкой. Её символьное задание отрицательно сказывается на визуализации.

4. Мои опыты показали, что прямое символьное вычисление $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\mu\mathcal{F}f$ в случае гауссова фильтра идёт неприемлемо долго. Однако, $\mathcal{F}^{-1}\mu$ вычисляется легко, равно как и соответствующая свёртка. Эффективность визуализация этой свёртки, как правило, почти одинакова при её символьной и численной реализациях. Остается актуальным всё сказанное в предыдущем пункте о представлении частоты.

5. Настройка фильтра состоит в том, чтобы, управляя параметрами, сделать фильтрующую функцию как можно более близкой к 1 в нужной полосе частот, и к нулю вне этой полосы. Разумеется, буквальное совпадение недостижимо. Более того, очень резкие перепады значений и острые пики могут создать проблемы при численном расчёте. Настоятельно рекомендуется использовать визуальную настройку, накладывая график фильтра на график $|\mathcal{F}f|$.

6. Фильтр μ считается физически приемлемым (реализуемым, реальным), если $\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}\mu \subset \{t > 0\}$, иначе возникают противоречия с принципом причинности.

7. При использовании реального фильтра различия между полезным сигналом и результатом фильтрации более заметны, чем в случае идеального и гауссова фильтров, см. рис 1 и 2. Изменения сильнее выражены при выделении отдельных гармоник узкополосным фильтром. В этом случае рекомендуется сделать полосу шире, чем для идеального и гауссова фильтров. Пример работы с реальным фильтром выложены в группе (рабочей дорожки TuningReal...).

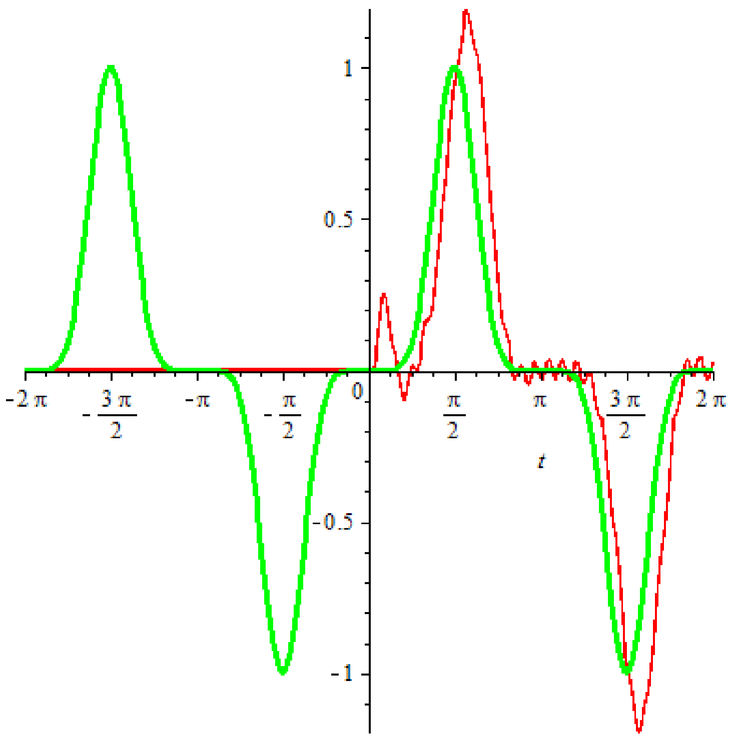

Рис. 1: Широкополосная фильтрация. Реальный фильтр. Основная частота сигнала равна 1, он наблюдается 5 периодов.

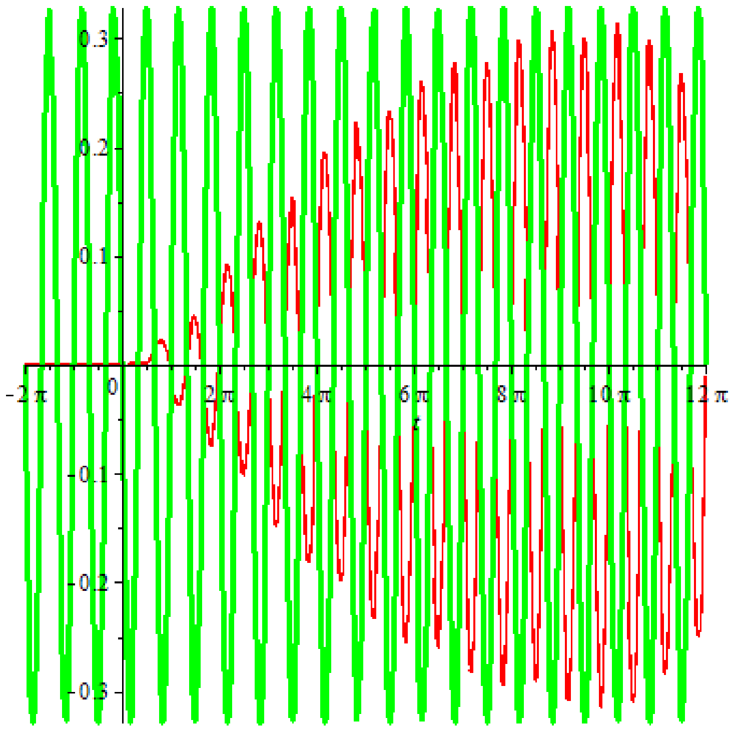

Рис. 2: Узкополосная фильтрация. Реальный фильтр. Основная частота сигнала равна 1, он наблюдается 5 периодов. Ширина полосы 0.3, выделяется гармоника тройной частоты.

$$restart;\ n := 7;\ \omega := evalf\left(\sqrt[3]{6}\right);\ with(inttrans):$$

$$g := invfourier\big(\mathrm{Heaviside}(\xi + (n+1)\cdot\omega) - \mathrm{Heaviside}(\xi - (n+1)\cdot\omega), \xi, y\big):$$

$$F := int\left(\left(\sin(\omega\cdot t)^n + \sin(25\cdot\omega\cdot t)\right)\cdot subs(y = x - t, g), t = 0\,..\,\frac{10\cdot\pi}{\omega} \right):$$

$$plot\left(\left[F, \sin(\omega\cdot x)^n\right], x = -\frac{2\cdot\pi}{\omega}\,..\,\frac{12\cdot\pi}{\omega}, thickness = [3, 1] \right);$$

Рис. 3: Пример реализации широкополосной фильтрации с идеальным фильтром.

$$restart;\ m := 2;\ n := 8;\ \omega := evalf\left(\frac{3}{\sqrt[3]{5}} \right);\ \nu := 0.2;\ with(inttrans):$$

$$combine\left(\sin(t)^n, trig\right);$$

$$A := \frac{int\left(combine\left(\sin(t)^n, trig\right)\cdot\sin(m\cdot t), t = 0\,..\,2\cdot\pi\right)}{\pi};$$

$$B := \frac{int\left(combine\left(\sin(t)^n, trig\right)\cdot\cos(m\cdot t), t = 0\,..\,2\cdot\pi\right)}{\pi};$$

$$g := \frac{int\left(\cos(y\cdot\xi), \xi = m\cdot\omega - \nu\,..\,m\cdot\omega + \nu\right)}{\pi};$$

$$F := int\left(\left(\sin(\omega\cdot t)^n + \sin(25\cdot\omega\cdot t)\right)\cdot subs(y = x - t, g), t = 0\,..\,\frac{10\cdot\pi}{\omega} \right):$$

$$plot\left(\left[F, A\cdot\sin(m\cdot\omega\cdot x) + B\cdot\cos(m\cdot\omega\cdot x)\right], x = \frac{2\cdot\pi}{\omega}\,..\,\frac{4\cdot\pi}{\omega}, thickness = [3, 1] \right);$$

Рис. 4: Пример реализации широкополосной фильтрации с идеальным фильтром.