

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
 Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
 «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
 Кафедра вычислительной математики и математической физики

Индивидуальное задание № 4 по дисциплине
 «ММПИС»
 Тема: «Вэйвлеты»

Содержание задания

Чтобы окончательно сформулировать ИЗ следует определить числовые данные следующих ниже задач. С этой целью по номеру варианта ИЗ следует выбрать числа n, a, b, c из специального списка, который будет передан старостам групп (файл data.pdf). Зная свой номер варианта, следует положить $\omega = \sqrt[3]{abc}$, $T = 2\pi/\omega$. Всего имеется 50 вариантов. За распределение вариантов отвечают старосты групп.

1. Даны сигналы

$$f(t) = \sin(\omega t)\theta(t)\theta(10T - t); \quad g(t) = (\theta(5T - t) * \sin(\omega t) + \theta(t - 5T) \sin(\sqrt{27}\omega t))\theta(t)\theta(10T - t);$$

$$h(t) = (\sin(\omega t) + \frac{\exp(-\frac{(t-5T)^2}{4\tau})}{2\sqrt{\pi\tau}})\theta(t)\theta(10T - t), \tau = 0.01.$$

Вычислите вэйвлет преобразования сигналов f, g, h . Материнский вэйвлет – МНАТ. Визуализируйте вэйвлет преобразования и укажите структуры указывающие (i) на гармоничность сигнала f ; (ii) на скачкообразную смену частоты сигнала g ; (ii) на дельтаобразную составляющую сигнала $h(t)$. Для визуализации результатов используйте команду трёхмерной графики `plot3d`. Опции, регулирующие формат изображения, подберите по своему усмотрению с целью наилучшей визуализации указанных особенностей.

2. Повторите программу п. 1 с материнским вэйвлетом Хаара.

3. Дан сигнал $p(t) = h(t) + \sin(\omega\sqrt{27}t)$. Восстановите сигнал p по дискретному преобразованию Хаара \hat{p}_{mj} , $(m, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с помощью ортонормированного базиса Хаара ψ_{mj} : $p(t) \approx \sum_{m,j \in Q} \hat{p}_{mj} \psi_{mj}(t)$, $Q \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Подберите по возможности наименьшее подмножество Q , обеспечивающее «грубое, но приемлемое» восстановление p .

Комментарии.

1. При выполнении задания вам придётся иметь со скачкообразным ростом частоты и дельтаобразным всплеском. Для краткости назовём эти особенности осцилляциями и концентрациями. Следует иметь в виду, что реакции вэйвлет преобразований на особенности этих типов качественно различны; именно, осцилляции приводят к выраженному смещению цепи пиков в область **меньших** значений масштабирующего параметра (рис. 2), тогда как для концентраций это смещение менее заметно (рис. 3). Вклад концентрации больше напоминает «хребет», протянувшийся в область **больших** масштабов от вершины, расположенной в области малых масштабов. Поэтому при визуализации вэйвлет-преобразования в случае осцилляций в фокусе должна быть область относительно малых масштабов $\lesssim 1$, а в случае концентраций – область малых и умеренных масштабов $\gtrsim 1$. («Единица» масштаба – полупериод основного сигнала). При этом в любом случае следует использовать диапазон сдвигов, включающий момент концентрации/осцилляции.

2. Хааровские спектры концентраций могут довольно заметно различаться, см. рис. 4. На спектре, показанном справа, эффект концентрации очень сильно локализован. Его можно разглядеть только выбрав подходящий ракурс, а именно вид сверху. Этого можно добиться с помощью интерактивной настройки изображения, встроенной в *Maple*. Кроме того, требуется достаточно высокое разрешение.

Последнее регулируется опцией `grid` команды `pot3d`).

3. Перестройка рельефа спектра, соответствующего концентрации (или осцилляции), как правило, происходит в окрестности значения смещения, равного тому интервалу времени от начала записи сигнала до наступления коцентрации/осцилляции.

4. Для вычисления преобразования Хаара лучше записывать его в виде:

$$(Hf)(r, s) = \frac{\int_s^{s+\frac{r}{2}} f(t) dt - \int_{s+\frac{r}{2}}^{s+r} f(t) dt}{\sqrt{r}}.$$

Эквивалентная (формально-математически) запись

$$(Hf)(r, s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-s}{r}\right) f(t) dt,$$

где $\psi = \psi(x)$ – материнский вэйвлет (в данном случае – хааровский) может приводить к значительным искажениям картины спектра из-за вычислительной погрешности, даже если данная функция f финитна, как, в частности, в настоящем задании. В случае вычисления МНат-спектра, наоборот, предпочтительна, скорее, вторая форма, так как в ней интеграл фактически берётся по конечному интервалу – носителю f .

5. Просьба иллюстрировать выбор диапазона коэффициентов для восстановления сигнала в задаче п. 3 картиной распределения этих коэффициентов, см. рис. 1.

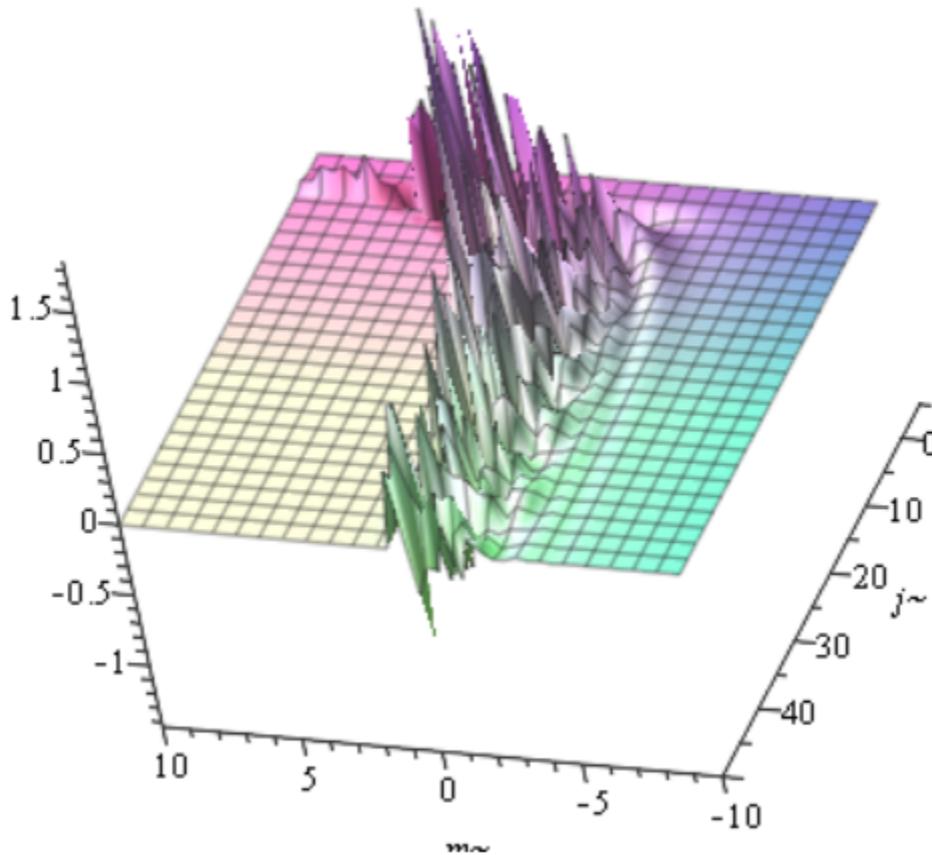


Рис. 1: Распределение коэффициентов дискретного преобразования Хаара. m – масштабирующий параметр, j – сдвиг. Сигнал имеет вид, указанный в п.3, с $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.18$

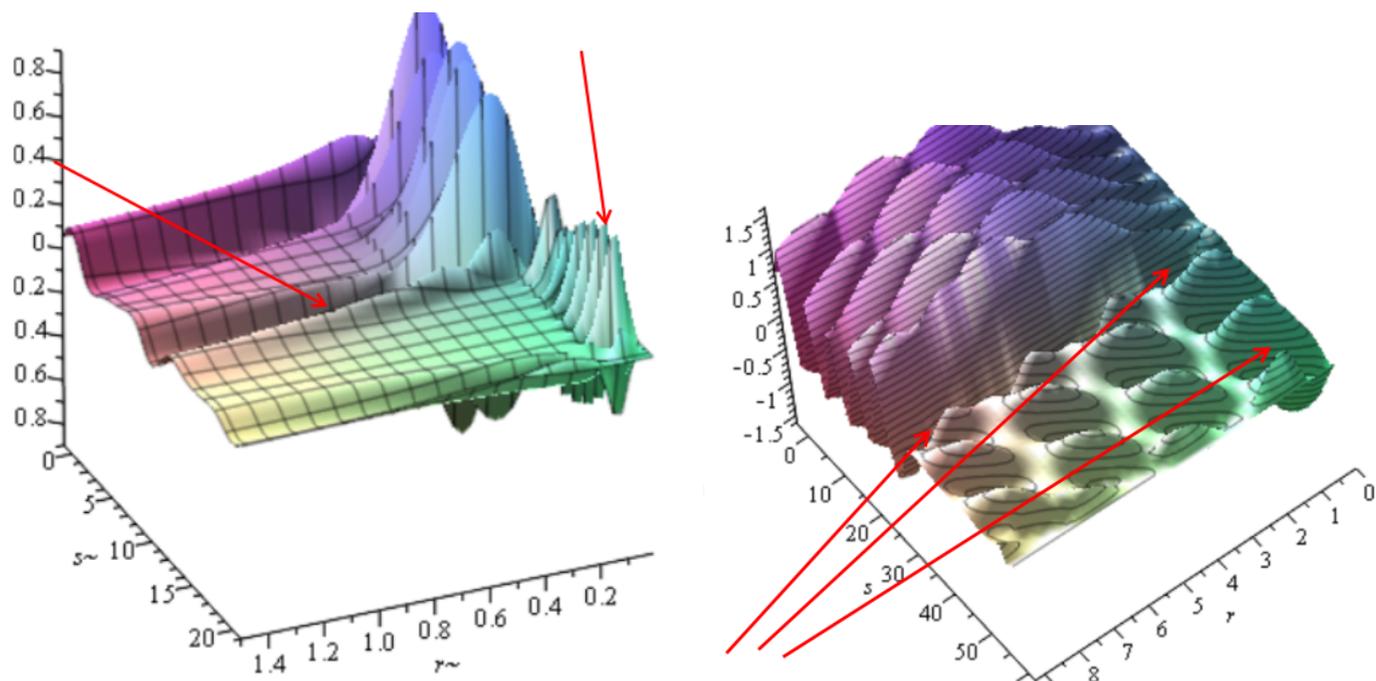


Рис. 2: Спектры осцилляций. Периоды сигналов скачком уменьшаются (а частоты соответственно увеличиваются) при $t = N * T$, где T – период до скачка (большой), и время t отсчитывается от начала приема сигнала. Слева МНАТ-спектр, $N = 10$ и $T = 1$. Справа – Хаар-спектр, $N = 5$, и $T = 6.18$. Стрелки указывают на типичные элементы рельефа.

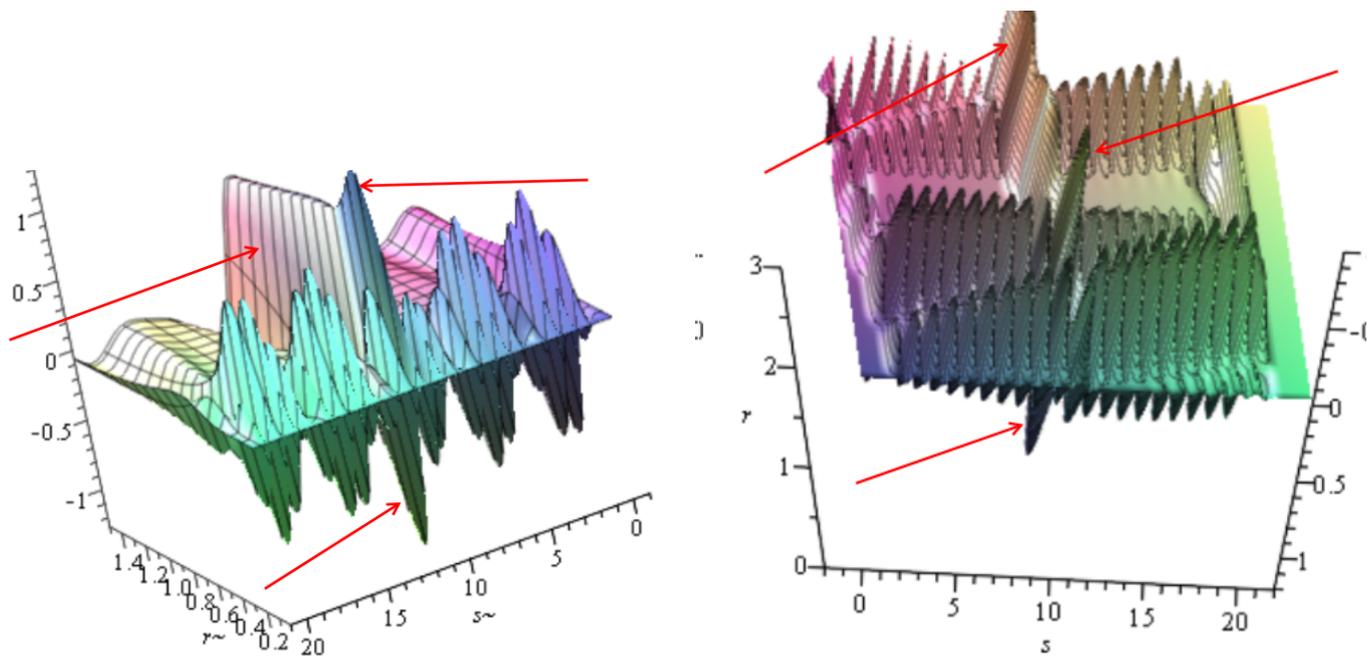


Рис. 3: Спектры концентраций. На T -периодический сигнал наложен изолированный пик, локализованный в окрестности $t = t_0$, $t_0 = 10T$, $T = 1$, и время t отсчитывается от начала приема сигнала. Слева МНАТ-спектр, справа – Хаар-спектр. Стрелки указывают на типичные элементы рельефа.

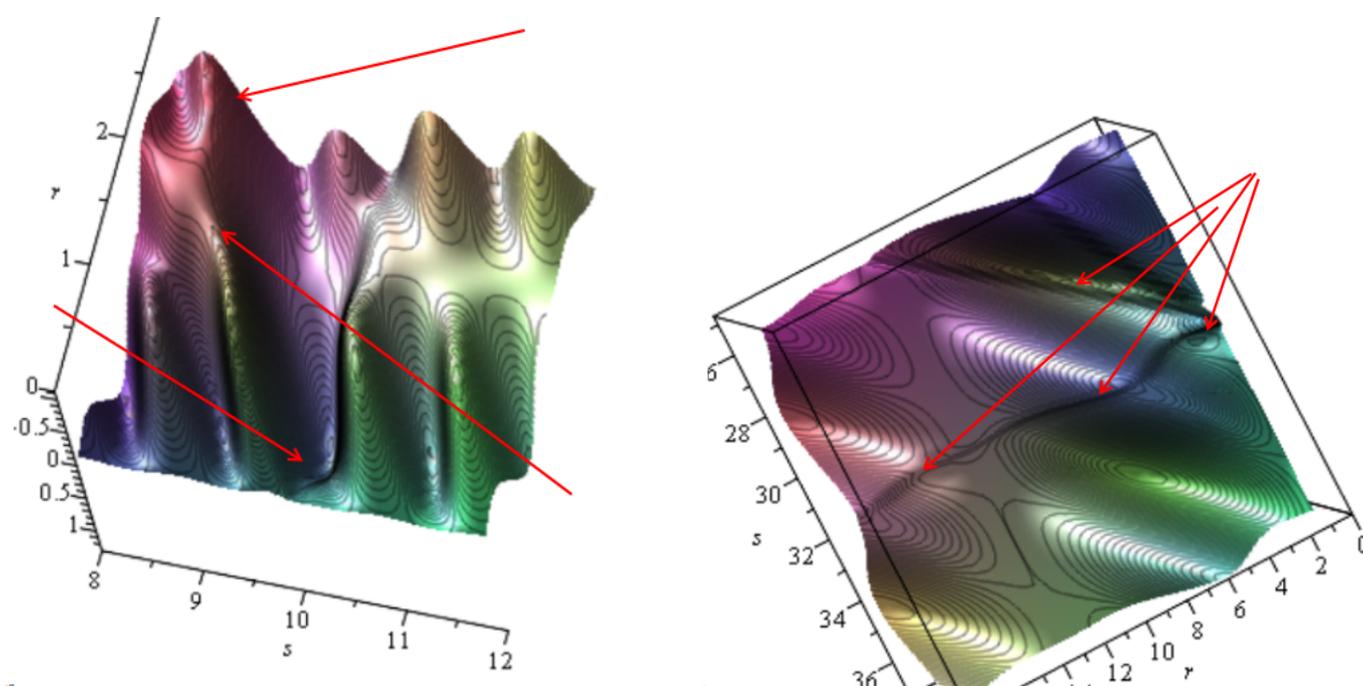


Рис. 4: Различные Хаар-спектры концентраций. На T -периодические сигналы наложены одинаковые изолированные пики, локализованные в окрестностях $t = t_0$, где время t отсчитывается от начала приема сигнала. Слева $t_0 = 10T$, $T = 1$, справа $t_0 = 5 * T$, $T = 6.18$ Стрелки указывают на типичные элементы рельефа. На спектре справа эффект концентрации сильно локализован.