УДК 519.1

Максимальный поток в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени

Скороходов В.А., Чеботарева А.С.

Примером сетей с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам могут служить транспортные сети, при наличии на некоторых дорогах возможностей образования пробок. Т.е. начиная движение в разные моменты времени, один и тот же участок преодолевается потоком машин за разное время. При этом может возникать следующая ситуация: если один поток начал движение раньше, а другой позже, но в некоторой точке участка дуги догнал первый, то они оба дальше не смогут пройти. Образуется дополнительная (непредусмотренная) пробка. Таким образом, возникает вопрос: какова величина максимального потока в сети с заданным условием и как его пропустить по дугам сети таким образом, чтобы не образовывалось дополнительных пробок. Данный пример показывает существенное усложнение классической задачи из-за влияния дуг вспомогательного графа друг на друга.

В настоящей работе предложен подход для решения потоковой задачи в сетях с ограничениями, аналогичными нестандартной достижимости (см. [1], [2]).

1. Постановка задачи

Пусть $G(X,U,f)$ – ориентированная сеть, у которой для каждой дуги u указана величина $d(u,t)$ – длительность прохождения единицы потока по этой дуге в момент времени t ($\in [t_0;t_{T-1}]_Z$). Будем считать, что величины $d(u,t)$ периодические по времени с периодом T, т.е. $d(u,t+T)=d(u,t)$. Кроме этого, $0<d(u,t)\le T \quad \forall u\in U \quad \forall t\in Z_+$.

Определение 1 *Ориентированную сеть G с рассмотренным свойством будем называть сетью с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени.*

Рассмотрим задачу о нахождении максимального потока в такой сети. Поскольку по одной и той же дуге поток может быть пропущен в разное время, то будем ставить задачу нахождения не классического стационарного потока (который для рассматриваемых сетей не является стационарным), а некоторого суммарного потока за один период.

Такую задачу невозможно решать при помощи классических алгоритмов, поэтому для ее решения построим вспомогательный граф (аналогично тому, как это делается в [1] и [2]) по следующим правилам:

Каждой вершине *x* исходного графа поставим в соответствие *T* вершин вспомогательного графа. Обозначим все получившиеся из *x* вершины $\{x_i\}, (i = 0,1,\ldots,T-1)$ (в каждый момент времени t_i вершине *x* исходного графа соответствует x_i).

Каждой дуге *u* (такой, что $f(u) = (x, y)$) исходного графа будут соответствовать *T* дуг $\{u_{t_i}\}_{i=0}^{T-1}$ вспомогательного. При этом, дуги таковы,что $f'(u_{t_i}) = (x_i, y_{i+d(u,t_i)-aT})$, где значение величины *a* равно единице, если $i + d(u,t_i) \geq T$ и нулю в противном случае. Веса исходной дуги присваиваются соответствующим дугам вспомогательного графа.

Однако, для решения задачи о максимальном потоке одного построения вспомогательного графа недостаточно, поскольку на вспомогательном графе дуги могут влиять друг на друга.

Определение 2 *Через* $g(u_{t_1}, t)$ *будем обозначать множество* $g(u_{t_1}, t) = (a(t); b(t)) \cap [0; t_{T-1} - t_0]$, *где*

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{d(u,t_1)} \cdot (t - t_1), & t \geq t_1; \\ \dfrac{1}{d(u,t_1)} (t - t_1 + T), & t < t_1. \end{cases}, \qquad b(t) = a(t) + \frac{1}{d(u,t_1)}.$$

При этом, $t, t_1 \in [t_0; t_{T-1}]_Z$. *Будем говорить, что дуга* u_{t_1} *существует в момент времени* t, *если* $g(u_{t_1}, t) \neq \varnothing$.

Каждой дуге u_{t_1} ставится в соответствие объединение промежутков

$$\bigcup_{k=0}^{T-1} g(u_{t_1}, t_k).$$

Теперь, если взять пересечение промежутков $g(u', t_k)$ и $g(u'', t_k)$, то может получиться, что оно не пусто, т.е. в момент времени t_k существуют обе дуги. А так как u' и u'' соответствуют одной "физической" дуге $\tilde{u} \in G$, то, очевидно, что величина двойного потока (по дугам u' и u'') не должна превышать пропускную способность дуги $\tilde{u}$.

Пример 1.

Рассмотрим граф, состоящий из двух вершин $\{1,2\}$ и дуги u их соединяющей. Зададим для нее веса в различные промежутки времени.

	T_1	T_2	T_3	T_4
u	3	1	2	1

Вспомогательный граф *G'*, будет выглядеть следующим образом (рисунок 1):

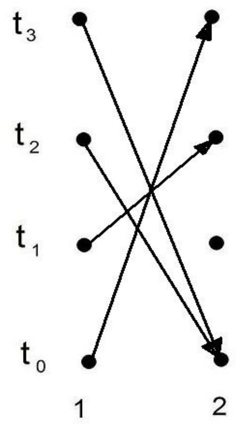

Рис. 1. Вспомогательный граф G'.

Т.к. дуги $1_2 \to 2_0$ и $1_3 \to 2_0$ приходят в одну и ту же вершину, то ясно, что некоторую (в данном случае, последнюю) часть пути они должны будут проходить одновременно, что при ограниченной пропускной способности дуги исходного графа невозможно.

Для дуг $1_0 \to 2_3$ и $1_1 \to 2_2$ ситуация аналогична. В этом случае пускать по обеим этим дугам поток, равный пропускной способности дуги, нельзя ([4]). Таким образом, одновременно мы можем пустить максимальный поток по дугам , , или , или , или , .

Проиллюстрируем взаимное влияние дуг вспомогательного графа друг на друга рисунком 2:

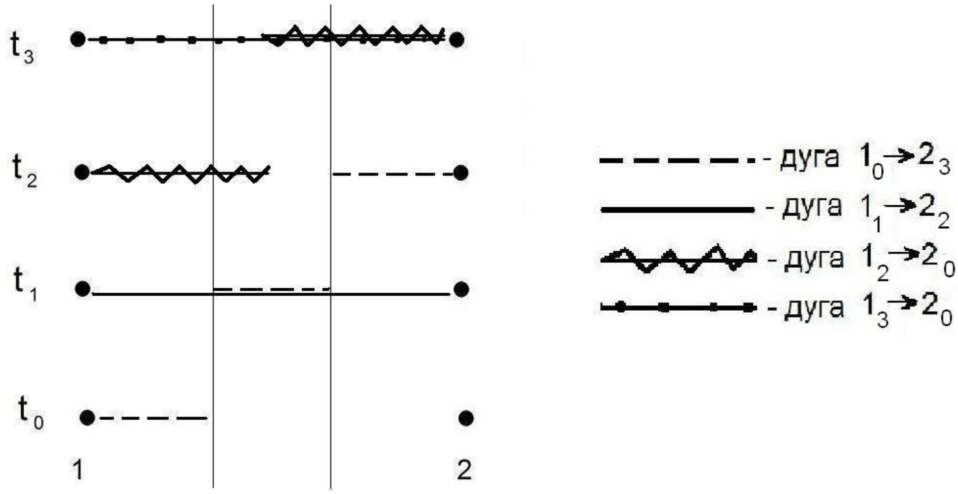

Рис.2. Иллюстрация взаимного влияния дуг вспомогательного графа.

Рисунок 2 построен следующим образом: мы разбили каждую дугу вспомогательного графа на столько частей, каков ее вес (в нашей задаче он равен длительности прохождения по дуге). Одну часть поток проходит за одну единицу времени. Легко видеть пересечения промежутков действия дуг.

Приведенный пример показывает, что использование классических методов для решения поставленной задачи о максимальном потоке в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени затруднительно. Более того, не выполняется теорема Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза (см. [4]).

Далее понадобятся следующие понятия:

Определение 3 *Будем говорить, что дуги* u_{t_1} *и влияют друг на друга, если существует момент времени t из промежутка* $[t_0;t_{T-1}]_Z$ *такой, что пересечение и не равно пустому множеству (т.е.* $\exists t \in [t_0;t_{T-1}]_Z : g(u_{t_1},t) \cap g(u_{t_2},t) \neq \varnothing$*)*

Определение 4 *Степенью влияния дуги назовем количество дуг, на которые влияет данная дуга. Обозначим* $\chi(u)=\sum_{v} h(u,v)$, *где*

$$h(u_{t_1},u_{t_2})=\begin{cases}1, \exists t\in[t_0;t_{T-1}]_Z : g(u_{t_1},t)\cap g(u_{t_2},t)\neq\emptyset;\\ 0, \nexists t\in[t_0;t_{T-1}]_Z : g(u_{t_1},t)\cap g(u_{t_2},t)\neq\emptyset.\end{cases}$$

2. Оценка величины максимального суммарного потока

Оценим величину максимального суммарного потока в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 *Пусть* (X,Y) *некоторый разрез (см. [3], [4]). Тогда величина максимального суммарного потока во вспомогательной сети G не превышает величины*

$$V\le\sum_{u\in M} C(u),$$

где M – максимальное подмножество разреза (X,Y), содержащее наибольшее число элементов множества (X,Y) такое, что $\forall u,v\in M$ *выполняется* $h(u,v)=0$.

Теорема 2 *Для величины максимального суммарного потока в сети G, с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени имеет место соотношение*

$$V\ge\min_{(X,Y)}\sum_{u\in M'} C(u),$$

где M' *- максимальное по вложению подмножество разреза (X,Y), содержащее наименьшее число элементов, множества такое, что* $\forall u,v\in M'$ *выполняется* $h(u,v)=0$.

Таким образом, как следствие первых двух теорем, справедлива следующая

Теорема 3. *Для величины максимального потока в сети G с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени имеет место соотношение*

$$\min_{(X,Y)} \sum_{u \in M'} C(u) \le V^* \le \min_{(X,Y)} \sum_{u \in M} C(u).$$

Пример 2.

На примере одного и того же "физического" графа, показанного на рисунке 3, покажем верность наших утверждений.

Пусть период, с которым изменяются веса его дуг, равен 3.

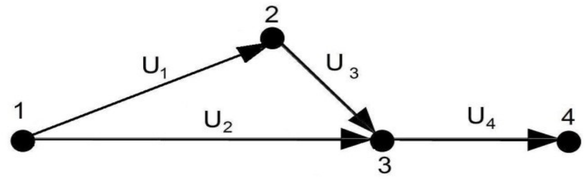

Рис.3. Исходный граф.

Зададим таблицу весов дуг этого графа в различные промежутки времени:

	T_1	T_2	T_3
u_1	1	1	2
u_2	2	1	2
u_3	3	1	2
u_4	1	1	1

Пусть пропускная способность каждой дуги этого графа равна 1.

Теперь по данным примера построим вспомогательный граф (рис. 4).

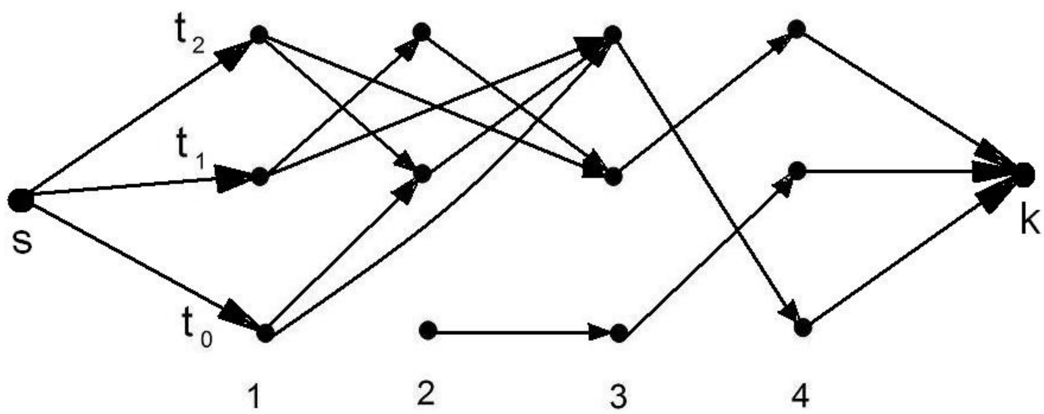

Рис.4. Вспомогательный граф.

На рисунке точки s и k- фиктивные источник и сток (пропускная способность всех дуг, выходящих из s и пропускная способность всех дуг, входящих в k считается равной ∞).

Видно, что существует шесть различных способов попасть из введенного фиктивного источника s в фиктивный сток k. Опишем и обозначим эти пути:

путь $1: s \to 1_0 \to 3_2 \to 4_0 \to k$;

путь $2: s \to 1_0 \to 2_1 \to 3_2 \to 4_0 \to k$;

путь $3: s \to 1_1 \to 3_2 \to 4_0 \to k$;

путь $4: s \to 1_1 \to 2_2 \to 3_1 \to 4_2 \to k$;

путь $5: s \to 1_2 \to 2_1 \to 3_2 \to 4_0 \to k$;

путь $6: s \to 1_2 \to 3_1 \to 4_2 \to k$.

Рассмотрим дугу $1_0 \to 2_1$. Она влияет на дугу $1_2 \to 2_1$. Величина двойного потока (по $1_0 \to 2_1$ и $1_2 \to 2_1$) не должна превышать пропускную способность дуги $1 \to 2$. Значит, пропуская по одной из этих дуг поток, равный пропускной способности дуги $1 \to 2$, по второй дуге пропустить какой-либо поток мы уже не сможем. А, следовательно, пути *2* и *5* некоторым образом влияют друг на друга, так как эти дуги являются частью путей *2* и *5*. При рассмотрении же дуги $1_1 \to 2_2$ видно, что она не влияет ни на какую другую. А значит, пока по пути 6 мы можем проходить одновременно с одним из путей *2* или *5*.

Аналогично рассматриваем $1_0 \to 3_2$. Она влияет на $1_1 \to 3_2$. Отсюда можно сделать вывод о влиянии путей *1* и *3* друг на друга. А путь *4* не влияет ни на какой другой путь.

Дуга $2_0 \to 3_0$ влияет на дуги $2_1 \to 3_2$ и $2_2 \to 3_1$ которые друг на друга не влияют. Так как эта дуга не входит ни в один из шести путей, описанных выше, значит, влиятельности путей она не меняет.

Остается рассмотреть дуги $3_2 \to 4_0$, $3_0 \to 4_1$, $3_1 \to 4_2$. Они не влияют друг на друга, значит, влиятельность путей при прохождении по ним не изменяется.

Таким образом, получили, что пути *2* и *5*, *1* и *3* некоторым образом влияют друг на друга, а пути *6* и *4* не влияют на остальные.

Насыщая одну дугу, пропуская по ней поток некоторой величины, мы должны будем уменьшить на эту же величину пропускную способность всех дуг, на которые она влияет. Насыщая некоторый путь, мы также должны уменьшить пропускную способность всех дуг, по которым он проходит, так как возможны случаи, как в нашем примере, по дуге $3_2 \to 4_0$ проходят сразу *4* пути. Ясно, что, насыщая путь *2* на некоторую величину, пропускная способность для других путей уменьшится на эту величину.

Получили, что, если мы выбираем и насыщаем путь *2* (пропускаем по нему поток равный 1), то на 1 необходимо уменьшить пропускную способность дуг $1_2 \to 2_1$, $2_0 \to 3_0$ и $3_2 \to 4_0$.

После уменьшения пропускной способности этих дуг их пропускная способность стала нулевой. А значит, пути, содержащие эти дуги, становятся недоступными. Такими стали пути *1, 3* и *5*.

Остались доступными пути *4* и *6*. Выберем и насытим один из них (например, путь *4*). Уменьшим пропускную способность дуги $3_1 \to 4_2$. Недоступным стал путь *6*.

Таким образом, величина потока в заданном графе равна 2. Больший поток мы пропустить не можем.

Теперь подсчитаем верхнюю и нижнюю оценки максимального суммарного потока во вспомогательной сети при помощи соотношения в теореме 3:

для разреза $(\{s,1_0,1_1,1_2\};\{2_0,2_1,2_2,3_0,3_1,3_2,4_0,4_1,4_2,k\})$ на вспомогательном графе, изображенном на рисунке 4, максимальное число не влияющих друг на друга дуг равно 4. Пропускная способность каждой дуги равна 1. Следовательно, $V \geq 4$ и $V \leq 4$. Рассматривая разрез $(\{s,1_0,1_1,1_2,2_1,2_2\};\{2_0,3_0,3_1,3_2,4_0,4_1,4_2,k\})$, видим что $V \leq 4$ и $V \geq 4$, как и в предыдущем разрезе. Теперь рассмотрим разрез $(\{s,1_0,1_1,1_2,2_1,2_2,3_1,3_2\};\{2_0,3_0,4_0,4_2,4_1,k\})$. Для этого разреза $V \leq 2, V \geq 2$. Для разреза $(\{s,1_0,1_1,1_2,2_0,2_1,2_2\};\{3_0,3_1,3_2,4_0,4_1,4_2,k\})V \le 4, V \ge 3$. А для разреза $(\{s,1_0,1_1,1_2,2_0,2_1,2_2,3_0,3_1,3_2\},\{4_0,4_1,4_2,k\})V \le 3, V \ge 3$.

По рисунку видно, что, рассматривая другие разрезы, получить более низких оценок не удастся.

Таким образом, $\min\{4,4,3,...,2\} \le V^* \le \min\{4,4,3,...,2\}$. То есть $2 \le V^* \le 2$.

Полученная нами пропускная способность потока меньше либо равна 2, значит неравенство верно.

Теперь пусть пропускная способность всех дуг, кроме дуги $3 \to 4$, равна 1. А пропускную способность дуги $3 \to 4$ зададим равной 2. Тогда пропускные способности всех разрезов, не содержащих ни одну из трех дуг: $3_0 \to 4_1$, $3_1 \to 4_2$, $3_2 \to 4_0$ не изменятся, а пропускная способность, например, разреза $(\{s,1_0,1_1,1_2,2_0,2_1,2_2,3_0,3_1,3_2\},\{4_0,4_1,4_2,k\})$ станет равной шести единицам.

При таких условиях, наше утверждение примет вид: $V^* \le \min\{4,4,6,...\}$. Или $V^* \le 4$.

Рассматривая, выбирая и насыщая некоторые пути, получаем поток, равный 4 (насытили пути *1, 2, 4, 6*) . В этом случае мы достигли верхней границы.

3. Алгоритм построения максимального потока в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени

Определение 5 *Степенью влияния цепи μ будем называть количество цепей, на которые он влияет. Обозначим* $\chi(\mu) = \sum_{\eta} h(\mu,\eta),$ *где*

$$h(\mu,\eta) = \begin{cases} 1, \exists u \in \eta, \exists v \in \mu : \chi(u,v) = 1; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}.$$

Для нахождения максимального потока построим вспомогательный граф, который назовем графом влиятельностей. Каждая вершина графа влиятельностей будет соответствовать одному простому пути в нашей вспомогательной сети. Если два пути влияют друг на друга, то на графе влиятельностей вершины, им соответствующие, будут смежны. Рассмотрим, например, граф влиятельностей некоторой вспомогательной сети (рисунок 5).

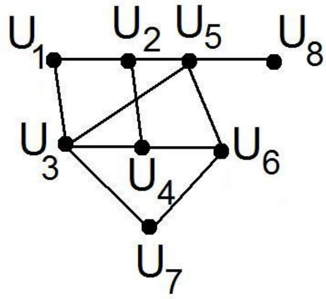

Рис.5. Граф влиятельностей некоторой вспомогательной сети.

В данном графе 8 вершин, то есть в сети 8 простых путей. Вершину u_1 соединяют с другими вершинами две дуги. Значит, путь влияет на два других пути. По определению это означает, что степень влияния пути равна 2 ($\chi(u_1) = 2$). Аналогично рассматривая все остальные вершины построенного графа, можем определить степени влияния всех остальных путей данной сети.

Теперь можем описать алгоритм построения максимального потока как набора путей, насыщающих дуги вспомогательной сети с учетом влиятельностей.

Алгоритм.

0. Находим все насыщающие цепи. Если таких цепей нет, то поток построен.

1. Строим граф влиятельностей.

2. Всем вершинам графа влиятельностей ставим в соответствие метки $m = \infty, k$ *- равная степени влияния пути.*

3. Из вершин, метка m которых равна ∞*, выбираем вершину x с наименьшей степенью влияния k.*

4. Ей назначаем метку $m = \xi (\in Z_+)$*, которая является наименьшим числом, которое не равно числам на смежных с x вершинах.*

5. Степени влияния k вершин, смежных с x уменьшаем на единицу.

6. Если остались вершины, у которых метка m равна ∞, то идем на шаг 3. Иначе работа по пометке вершин завершена.

7. Разобьем множество вершин графа влиятельностей на подмножества $\bigcup_{i=0}^{r} x_i$, отнеся к x_i - те вершины, у которых метка m=i . r - максимальная метка.

8. В качестве множества M выбираем то множество x_i, у которого наибольшее число элементов.

9.Производим насыщение по множеству M . Возврат на шаг 0.

Пример 3 .

В качестве примера, иллюстрирующего работу приведенного алгоритма, рассмотрим вспомогательную сеть *G'* на рисунке 6. Пропускные способности указаны рядом с дугами.

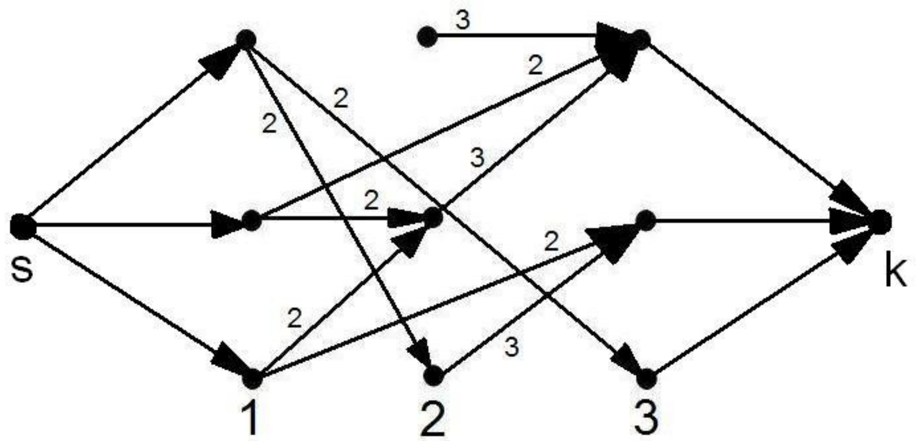

Рис.6. Вспомогательная сеть *G'*.

Перечислим все простые пути, их веса и степени влияния в этой сети:

$\mu_1 : 1_0 \to 2_1 \to 3_2, c(\mu_1) = 2, \chi(\mu_1) = 2$;

$\mu_2 : 1_1 \to 2_1 \to 3_2, c(\mu_2) = 2, \chi(\mu_2) = 3$;

$\mu_3 : 1_2 \to 2_0 \to 3_1, c(\mu_3) = 2, \chi(\mu_3) = 2$;

$\mu_4 : 1_0 \to 3_1, c(\mu_4) = 3, \chi(\mu_4) = 1$;

$\mu_5 : 1_1 \to 3_2, c(\mu_5) = 3, \chi(\mu_5) = 1$;

$\mu_6 : 1_2 \to 3_0, c(\mu_6) = 3, \chi(\mu_6) = 1$.

Для рассматриваемой сети построим соответствующий ему граф влиятельностей (рисунок 7).

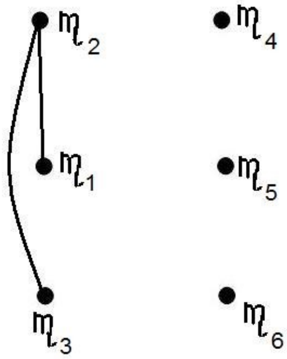

Рис. 7. Граф влиятельностей для вспомогательной сети *G'*.

Применяя алгоритм, получим, что множество насыщающих цепей имеет вид: $\mu_1, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$.

А так как больше насыщающих цепей нет, то это означает, что величина максимального суммарного потока равна 10.

Литература

1. *Басангова Е.О., Ерусалимский Я.М.* Алгоритм нахождения максимального потока в частично – ориентированной сети. // в сб. Дискретные структуры и их приложения. Элиста, КГУ. 1988. -с. 23-28.

2. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А*. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях. // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003, № 2, с. 3-8.

3. *Оре О.* Теория графов. Пер. с анг. -М: Наука, 1980. -334с.

4. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. Пер. с анг. -М: Мир, 1966. - 223с.

The problem of the maximum flow in nets of a special kind is considered. In such networks for each arc duration of passage on it is specified. Thus, duration of passage is periodic on time. It is shown that for such networks it is not carried out Ford and Fulkerson theorems that the size of the maximum flow is equal to throughput of the minimum cut. Estimations of size of the maximum total flow in a net with cyclic dependence durations passages are offered on arcs from time. The algorithm of a finding of the maximum total flow in considered networks is developed.