УДК 519.1

Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения

Flows on graphs with varying transit times through the arcs

Скороходов В.А.

Graphs with varying transit times through the arcs are considered. The problem of finding maximum flow in such graphs is formulated and studied. To solve this problem proposed construction of the auxiliary graph. Theorems on compliance of ways on source and auxiliary graphs is formulated and proofed.

1 Графы с зависимостью длительности прохождения дуг от времени

Пусть $G_T(X,U,f)$ – орграф такой, что для каждой его дуги указан вес – длительность (количество тактов) прохождения по ней. Будем считать, что длительность каждой дуги может меняться со временем и описывается функцией $c(u)=c(u,t)$ $t\in[0;T]_Z$.

Определение 1.1 *Граф* $G_T(X,U,f)$ *с указанными свойствами будем называть графом с меняющейся длительностью прохождения.*

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего (по длительности прохождения) пути на графе G_T с заданным условием.

В том случае, когда длительность прохождения по дугам не меняется со временем (т.е. $c(u,t_1)=c(u,t_2)$ $\forall t_1,t_2\in[0;T]_Z$) поставленная задача является классической задачей о кратчайшем пути (см. [1], [2]).

Существенной особенностью поставленной нами задачи является то, что кроме нахождения самого кратчайшего пути (последовательности дуг [1]), необходимо найти еще и время начала движения по нему, поскольку кратчайшие пути могут меняться в зависимости от начальных моментов времени. Данную ситуацию проиллюстрируем следующим примером.

Пример 1.1

Рассмотрим граф G_{10} на рис.1.

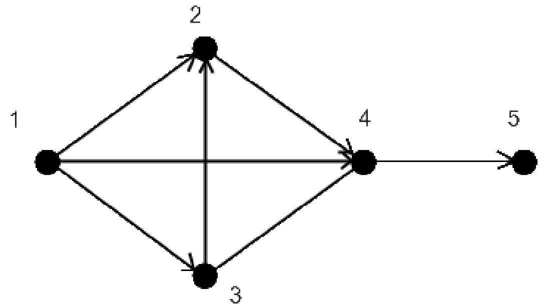

Рисунок 1.

Его дуги $\{u_1,...,u_7\}$ такие, что $f(u_1)=(1{,}2)$, $c(u_1)=\{9{,}9{,}9{,}9{,}...{,}9\}$, $f(u_2)=(1{,}3)$, $c(u_2)=\{8{,}3{,}4{,}4{,}...{,}9\}$, $f(u_3)=(1{,}4)$, $c(u_3)=\{7{,}1{,}5{,}5{,}...{,}5\}$, $f(u_4)=(2{,}4)$, $c(u_4)=\{1{,}1{,}1{,}1{,}...{,}1\}$, $f(u_5)=(3{,}2)$, $c(u_5)=\{1{,}1{,}1{,}1{,}...{,}1\}$, $f(u_6)=(4{,}3)$, $c(u_6)=\{1{,}1{,}1{,}1{,}...{,}1\}$, $f(u_7)=(4{,}5)$, $c(u_1)=\{6{,}5{,}9{,}3{,}...{,}3\}$.

Перебирая все возможные пути из вершины 1 в вершину 5 для каждого начального момента времени получим, что кратчайшим путем из вершины 1 в вершину 5 является путь $\mu_*(1{,}5)=\{u_3,u_6,u_5,u_4,u_7\}$ (в виде последовательности вершин – $1\to4\to3\to2\to4\to5$) длительностью 7 тактов. Начало движения по этому пути $t=1$.

Заметим, что вершина 4 пройдена в пути два раза, но отбросить замкнутый участок пути $\{u_6,u_5,u_4\}$ (как это делается в классическом случае [1], [2]) нельзя, поскольку каждая дуга этого участка проходится за определенное количество моментов времени, а это значит, что движение по дуге u_7 придется начинать сразу после завершения движения по дуге u_3 (в таком случае образуется путь $\{u_3,u_7\}$, который не является кратчайшим – длительность прохождения по нему равна 10 тактов), либо следует сделать задержку в вершине 4. Такой вариант не возможен вследствие того, что в каждый момент времени должно происходить движение по какой-либо дуге графа G и нет петель инцидентных вершине 4, которые позволили бы сделать такую задержку. Кроме этого, для данного примера такую задержку делать не имеет смысла, поскольку даже в том случае, если бы это было возможно, ее длительность была бы равна длительности прохождения по участку $\{u_6, u_5, u_4\}$ пути $\mu_*(1,5)$.

Отметим, что полученный кратчайший путь был найден путем полного перебора всех возможных путей из вершины 1 в вершину 5, а так как эти пути, вообще говоря, могут не быть простыми, то, очевидно, имеем существенную сложность для алгоритмов нахождения таких путей.

Для решения задачи о кратчайшем пути на графе G_T с зависимостью длительностей от времени будем использовать подход ([3]-[7]), согласно которому строится вспомогательный граф G' с большим количеством вершин и дуг. На вспомогательном графе каждая дуга имеет длительность перехода, равную единице (как и для классического случая) и каждому пути вспомогательного графа соответствует путь (с точностью до момента начала движения) на исходном графе.

Построение вспомогательного графа:

Каждой вершине исходного графа G_T ставится в соответствие T+1 вершина $\{x_0, ..., x_T\}$ на вспомогательном графе G'. Дуги последнего строятся по следующему правилу:

Для каждой дуги u ($f(u) = (x, y)$) исходного графа и каждого момента времени $t \in [0;T]_Z$ если $t + c(u,t) \le T$, то на вспомогательном графе достраивается дуга u_t такая, что $f'(u_t) = (x_t, y_{t+c(u,t)})$. Дуге u_t присваиваем вес равный значению $c(u,t)$.

После такого построения вспомогательного графа, задача о кратчайшем пути на исходном графе G_T с меняющейся длительностью прохождения сводится к задаче нахождения кратчайшего пути на вспомогательном графе G'.

Справедливы следующие теоремы о связи путей исходного и вспомогательного графов.

Теорема 1.1 *Вершина y достижима из вершины x на исходном графе* G_T *тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе G' из* *множества вершин* $A_x = \{x_0, x_1, ..., x_T\}$ *достижима хотя бы одна вершина множества* A_y. *Более того, каждому пути* μ' *на вспомогательном графе однозначно соответствует путь* μ *на исходном графе и имеет место равенство весов пути* μ *и пути* μ'.

Доказательство данной теоремы практически дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы для графов с нестандартной достижимостью ([6]).

Теорема 1.2 *Кратчайшему пути* μ' *на вспомогательном графе соответствует кратчайший путь* μ *на исходном графе, причем время начала движения по пути* μ *равно номеру уровня (см. [7]), которому принадлежит начальная вершина пути* μ'.

Доказательство.

Рассмотрим кратчайший путь $\mu(x_i, y_j)$ (из вершин множества A_x в вершины множества A_y) на вспомогательном графе G'. По предыдущей теореме, ему соответствует путь $\mu(x, y)$ того же веса на исходном графе G_T.

Предположим теперь, что путь μ не является кратчайшим путем из вершины x в вершину y на исходном графе, т.е. на исходном графе найдется путь $\mu_1(x, y)$ вес которого меньше, чем вес пути μ. Тогда по из правил построения вспомогательного графа и предыдущей теоремы следует, что на вспомогательном существует путь $\mu'_1(x_{\hat{i}}, y_{\hat{j}})$, которому соответствует путь μ_1 исходного графа. Отметим, что вес пути μ'_1 меньше, чем вес пути μ'. Это означает, что вес пути μ_1 меньше, чем вес пути μ, что противоречит тому, что путь μ является кратчайшим путем из вершин множества A_x в вершины множества A_y.

Теорема доказана.

Пример 1.2

Рассмотрим задачу нахождения кратчайшего пути на графе из предыдущего примера. Будем считать, что параметр $T = 8$.

Для решения данной задачи построим вспомогательный граф G', для него найдем соответствующий кратчайший путь и перенесем результат на исходный граф.

Вспомогательный граф представлен на рис.2.

Отметим, что для дуги u_1 исходного графа нет дуг на вспомогательном, которые соответствовали бы ей.

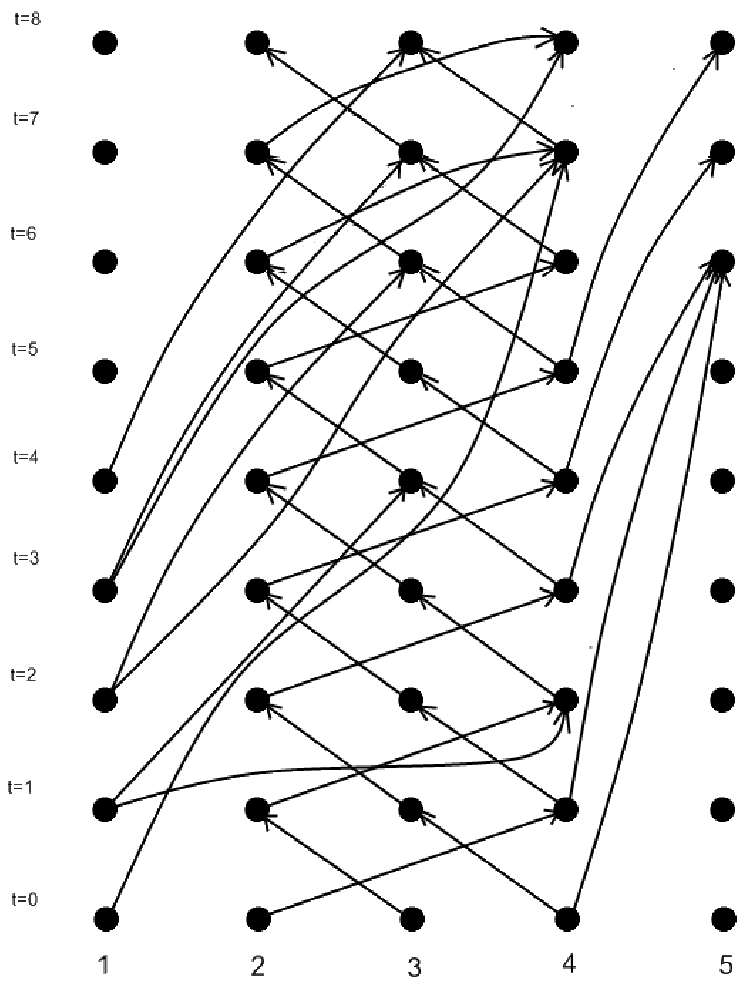

Рисунок 2.

Найдем кратчайший путь из вершины 1 в вершину 5 на исходном графе. Для этого на вспомогательном графе будем искать кратчайший путь из вершин A_1 в вершины множества A_5.

На построенном графе видно, что для $T = 8$ из вершин множества A_1 в вершины множества A_5 существует только один возможный путь μ':

$1_1 \to 4_2 \to 3_3 \to 2_4 \to 4_5 \to 5_8$. Ему соответствует путь исходного графа μ: $1_1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5$ (т.е. $\mu = \{u_1, u_6, u_5, u_4, u_7\}$).

2 Максимальный поток в сети с меняющейся длительностью прохождения

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети с меняющейся длительностью прохождения. Будем считать, что для каждой дуги u кроме пропускной способности ($c(u)$) указана длительность прохождения по ней ($d(u,t)$) единицы потока. Считаем, что зависимость длительностей прохождения по каждой дуге сети периодическая, с периодом равным T ($\in N$), т.е.

$$\forall u \in U \quad \forall t \in Z_+ \;\; d(u,t) = d(u,t+T).$$

Кроме этого, полагаем, что $d(u,t) \in [1;T]_Z$.

Задача о максимальном потоке в сети такого вида имеет существенные сложности для решения. Поскольку переход по некоторой дуге такой сети может производиться за разное количество тактов, то для каждого момента времени в концевую вершину может приходить суммарный поток, состоящий из потоков, отправленных по одной дуге в различные начальные моменты времени. Покажем эту ситуацию на следующем примере.

Пример 2.1

Рассмотрим граф G_5 на рис.3. Его единственная дуга u ($f(u) = (1,2)$) такая, что ее пропускная способность $c(u) = 1$ и заданы длительности на полном периоде $d(u) = \{5,4,3,2,1\}$.

Рисунок 3.

Тогда, если мы будем отправлять поток величины 1 по дуге u в каждый момент времени $t \in [0;4]_Z$, то в момент времени $t = 5$ в вершину 2 придет поток величины 5 (состоящий из всех отправленных потоков), что гораздо больше пропускной способности дуги u.

Таким образом, пример показывает, что для решения задачи о максимальном потоке в сети с меняющейся длительностью прохождения недостаточно даже построения вспомогательного графа (которое позволяло решать аналогичные задачи в сетях с нестандартной достижимостью [3]-[7]). Однако этот подход может быть применен с некоторой модификацией, аналогичной алгоритму прорыва в сетях со связанными дугами (см. [5]).

Таким образом, для решения потоковой задачи в исходной сети G_T построим вспомогательную сеть G' по правилам указанным в предыдущем параграфе с поправкой на периодичность зависимости длительностей прохождения по дугам:

Каждой вершине исходного графа G ставится в соответствие T вершин на вспомогательном графе G'. Дуги последнего строятся по следующему правилу:

Для каждой дуги u ($f(u) = (x, y)$) исходного графа и каждого момента времени $t \in [0;T-1]_Z$ на вспомогательном графе достраивается дуга u_t такая, что $f'(u_t) = (x_t, y_{a(t)})$, где $a(t) = (t + d(u,t)) \bmod T$. Дуге u_t присваиваем величину пропускной способности, равную значению $c(u)$.

Отметим, что поскольку зависимость периодическая, то нас будет интересовать не величина потока в каждый отдельный момент времени, а некоторая суммарная величина таких потоков за один полный период. В соответствии с этим, построим вспомогательную сеть G'' путем добавления фиктивных источника и стока к сети G', соединив их с вершинами, соответствующими источнику и стоку исходного графа, дугами бесконечной пропускной способности. Это необходимо сделать, поскольку источник и сток разбиваются на T «двойников», каждый из которых действует в свой момент времени.

В сети G'' находим поток из фиктивного источника в фиктивный сток при помощи алгоритма прорыва, считая пока связанными дугами дуги, соответствующие одной дуге исходного графа и имеющие общую концевую вершину на графе G'' (далее будет показано, что условия связанности дуг в таком виде недостаточно и будет предложено его уточнение). В результате получаем максимальный суммарный поток за один полный период.

Покажем все этапы нахождения максимального суммарного потока в сети с меняющейся длительностью прохождения на следующем примере.

Пример 2.2

Рассмотрим сеть G_4 на рис.4.

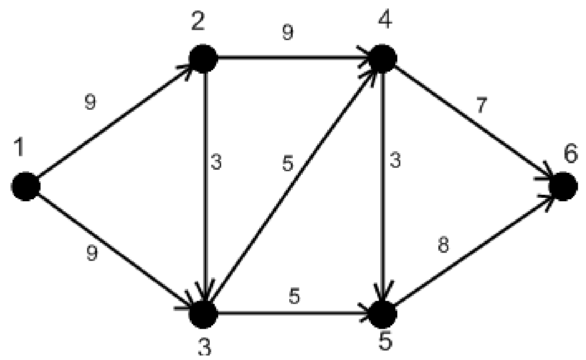

Рисунок 4.

Ее дуги $\{u_1,...,u_9\}$ такие, что $f(u_1)=(1,2)$, $d(u_1)=\{1,2,3,4\}$, $f(u_2)=(1,3)$, $d(u_2)=\{4,3,2,1\}$, $f(u_3)=(2,3)$, $d(u_3)=\{1,2,3,1\}$, $f(u_4)=(2,4)$, $d(u_4)=\{1,1,1,1\}$, $f(u_5)=(3,4)$, $d(u_5)=\{1,2,1,2\}$, $f(u_6)=(3,5)$, $d(u_6)=\{1,1,1,1\}$, $f(u_7)=(4,5)$, $d(u_7)=\{2,2,3,1\}$, $f(u_8)=(4,6)$, $d(u_8)=\{1,1,1,1\}$, $f(u_9)=(5,6)$, $d(u_9)=\{1,1,1,1\}$.

Очевидно, что без условий и зависимостей (т.е. в классическом случае), величина максимального потока равна $v^*=15$ и за один полный период величина максимального суммарного потока равна $v_s^*=60$. Рассмотрим теперь задачу с зависимостью длительности прохождения по дугам сети.

Вспомогательный граф G' представлен на рис.5.

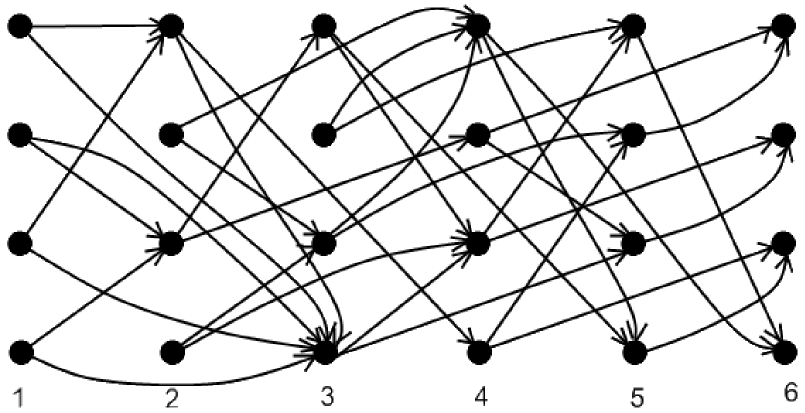

Рисунок 5.

По этому графу построим вспомогательный граф G'', добавив фиктивный источник s и фиктивный сток q. Кроме этого, удалим все получившиеся псевдоисточники и псевдостоки. Такое действие не влияет на результат, но, зачастую, сильно упрощает вид вспомогательного графа (см. [7]).

Вспомогательный граф G' представлен на рис.6.

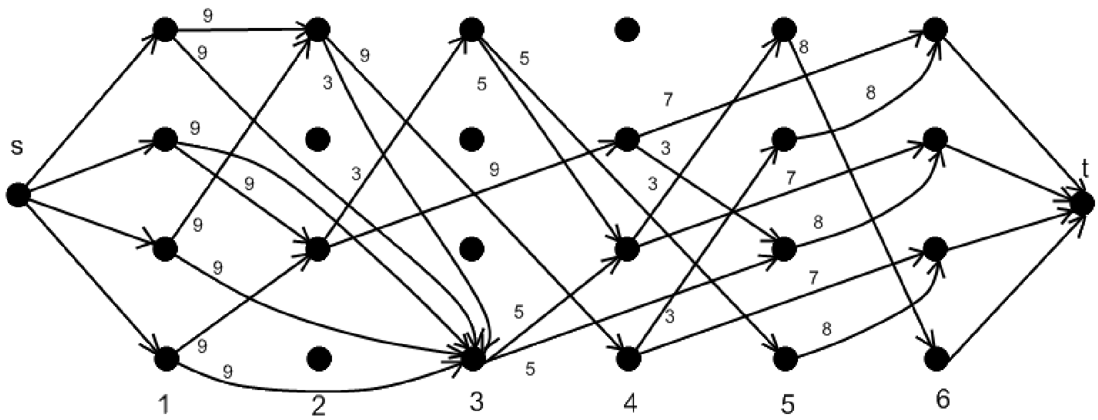

Рисунок 6.

Перечислим множества связанных дуг (поскольку здесь нет кратных дуг и структура графа достаточно сложная, то дуги здесь будем представлять в виде упорядоченной пары вершин [2]): $\{(1_0,2_1);(1_2,2_1)\}$, $\{(1_2,2_3);(1_3,2_3)\}$, $\{(1_0,3_0);(1_1,3_0);(1_2,3_0);(1_3,3_0)\}$, $\{(3_0,4_1);(3_3,4_1)\}$. Все остальные дуги не являются связанными, т.е. с ними можно работать так, как и с классическими дугами без зависимостей.

Проводя всю последовательность действий решения задачи о максимальном потоке на вспомогательном графе со связанными дугами ([5]) получим следующий результат (показан на рис.7.):

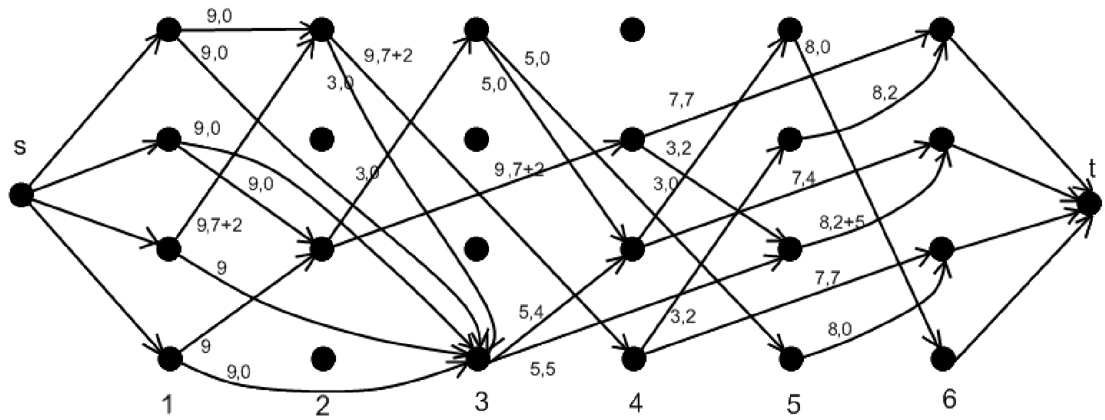

Рисунок 7.

Приведем решение – последовательность увеличивающих цепей (цепи представлены в виде последовательности вершин):

μ_1 : $s \to 1_0 \to 2_1 \to 4_2 \to 6_3 \to q$, $F(\mu_1) = 7$, $d(\mu_1) = 3$;

μ_2 : $s \to 1_0 \to 2_1 \to 4_2 \to 5_1 \to 6_2 \to q$, $F(\mu_2) = 2$, $d(\mu_2) = 6$;

μ_3 : $s \to 1_0 \to 3_0 \to 5_1 \to 6_2 \to q$, $F(\mu_3) = 5$, $d(\mu_3) = 5$;

μ_4 : $s \to 1_1 \to 3_0 \to 4_1 \to 6_2 \to q$, $F(\mu_4) = 4$, $d(\mu_4) = 5$;

μ_5 : $s \to 1_1 \to 2_3 \to 4_0 \to 6_1 \to q$, $F(\mu_5) = 7$, $d(\mu_5) = 4$;

μ_6 : $s \to 1_1 \to 2_3 \to 4_0 \to 5_2 \to 6_3 \to q$, $F(\mu_6) = 2$, $d(\mu_6) = 6$.

Получили, что величина максимального суммарного потока за один период гораздо меньше базового (т.е. без условия зависимости длительностей прохождения).

Отметим, что длительности путей μ_2, μ_3, μ_4 и μ_6 превышают период изменения длительностей прохождения по дугам сети G. Кроме этого, ни один путь не начинается в моменты времени $t = 2 + T$ и $t = 3 + T$, однако, насыщая дуги вспомогательного графа потоком можно выбрать другие пути. Для рассмотренной сети существует вариант насыщения, при котором поток будет отправляться из источника в каждый момент времени.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 *Величина суммарного потока произвольной сети* G_T *с меняющейся длительностью прохождения не превосходит величины*

$$v_s^* \le \sum_{u \in (Y,Y')} c(u) \cdot |D_T(u,[0;T-1]_Z)|$$

где (Y,Y') 1 *– некоторый произвольный разрез в сети* G_T, *а* $|D_T(u,[0;T-1]_Z)|$ *– количество элементов в образе множества* $\{u\} \times [0;T-1]_Z$ *при отображении* $D_T : U \times [0;T-1]_Z \to [0;T-1]_Z$, *действующем по правилу* $D_T(u,t) = (t + d(u,t)) \bmod T$.

Доказательство.

Рассмотрим некоторый произвольный разрез (Y,Y') в сети G_T. Поток, проходящий через данный разрез равен сумме потоков по каждой его дуге. Это справедливо как в классическом случае, так и в случае, когда длительности прохождения по дугам рассматриваемой сети зависят от времени.

Теперь осталось подсчитать, сколько раз за полный период по некоторой дуге $u \in (Y,Y')$ может быть пропущен поток. Отметим, что если для пары различных моментов времени t_1 и t_2 выполняется $D_T(u,t_1) = D_T(u,t_2)$, то это означает, что поток не может быть пропущен два раза (и для начального момента t_1, и для начального момента t_2). В таком случае поток может быть отправлен только один раз, поскольку иначе к моменту времени $t_1 + d(u,t_1)$ в концевую вершину дуги u придет поток в два раза больший, чем пропускная способность этой дуги. Таким образом, поток может быть пропущен по дуге u не больше раз, чем количество различных значений функции $D_T(u,t)$ для рассматриваемой дуги u и всех моментов времени $t \in [0;T-1]_Z$ (т.е. количество элементов в образе множества $\{u\} \times [0;T-1]_Z$ при отображении D_T).

Таким образом, получили, что величина максимального суммарного потока, проходящего через разрез за полный период равна сумме величин потока по каждой его дуге u за полный период, которые не превышают величин $c(u)\cdot|D_T(u,[0;T-1]_Z)|$.

Теорема доказана.

В качестве следствия предыдущей теоремы выступает следующая теорема.

Теорема 2.2 *Величина суммарного потока произвольной сети* G_T *с меняющейся длительностью прохождения не превосходит величины*

$$v_s^* \le \min_{Y\subset X}\left\{\sum_{u\in(Y,Y')} c(u)\cdot|D_T(u,[0;T-1]_Z)|\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

Отметим, что неравенство (2) превращается в равенство в том случае, если для каждой дуги u разреза, на котором достигается минимум, выполняется следующее свойство: для каждой пары моментов времени $t_1,t_2\in[0;T-1]_Z$ если $t_1\le t_2$, то $t_1+d(u,t_1)\le t_2+d(u,t_2)$.

Приведенные теоремы об оценке величины максимального суммарного потока удобно проиллюстрировать следующими примерами.

Пример 2.3

Рассмотрим сеть G_4 из примера 2.1. Ее единственная дуга u такая, что $c(u)=1$ и $d(u)=\{4,1,1,2\}$.

Очевидно, что здесь всего один разрез, состоящий из единственной дуги u.

В данном случае легко вычисляется величина $|D_T(u,[0;T-1]_Z)|$. Данная величина равна количеству вершин вспомогательного графа, которые являются концевыми для дуг, соответствующих дуге u исходного графа.

Таким образом, для нашего графа $|D_T(u,[0;T-1]_Z)|=4$, т.е. величина максимального суммарного потока за полный период на превышает величины $v_s^*\le 1\cdot 4$. Однако, можно заметить, что если отправить поток по дуге u в момент времени $t=0$, то этот поток будет идти по ней 4 такта, т.е. дуга будет некоторое время блокирована (в нашем случае время блокирования дуги составляет полный период). В этом случае за один полный период по сети будет проходить суммарный поток величины 1, тогда как если ничего не отправлять в момент времени $t = 0$, то за полный период через сеть может быть пропущен суммарный поток величины 3 (отправляя потоки величины 1 в моменты времени $t = 1,2,3$), который и будет максимальным.

Отметим, что в данном случае, несмотря на то, что единственный разрез состоит только из одной дуги u и величина $|D_T(u,[0;T-1]_Z)| = T$, нет равенства в соотношении (2).

Пример 2.4

Рассмотрим сеть G из предыдущего примера. Пусть $d(u) = \{4,2,1,1\}$.

В данном случае $|D_T(u,[0;T-1]_Z)| = 2$. Величина максимального суммарного потока за полный период равна $v_s^* = 2$ $v^*_s=2$. Этот результат получен следующим образом: момент времени $t = 0$ следует пропустить, иначе дуга u будет блокирована, далее единица потока должна быть отправлена либо в момент времени $t = 1$, либо в момент $t = 2$ (эти две возможности блокируют друг друга) и, наконец, единица потока отправляется в момент времени $t = 3$.

Предложенные примеры показывают, что наше допущение о том, что связанными дугами в сети G'' являются дуги, соответствующие некоторой одной дуге исходного графа и имеющие общую концевую вершину на графе G'', требует уточнения как это было сказано ранее. Отметим, однако, что в примере 2.2 действительно найден максимальный по величине суммарный поток за полный период.

Далее введем в рассмотрение обобщение понятия сети со связанными дугами. Как рассматривалось ранее в [5], сеть со связанными дугами – это сеть, у которой множество дуг представлено как объединение попарно непересекающихся подмножеств $U = U^H \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} U^i \right)$. При этом, $|U^i| \geq 1 \ \ \forall i \in [1;k]_Z$ и считается, что пропускные способности заданы для дуг множества U^H ($c(u)\ \forall u \in U^H$), а также заданы суммарные пропускные способности для множеств U^i ($c(U^i)$ $\forall i \in [1;k]_Z$). Другими словами, дуги каждого множества U^i связаны некоторым соотношением, а именно, сумма величин потоков по каждой дуге множества U^i не может превышать суммарной пропускной способности множества $c(U^i)$, т.е.

$$\sum_{u \in U^i} f(u) \le c(U^i) \qquad \textbf{(2)}$$

Определение 2.1 Отношением связанности дуг сети G будем называть характеристическую функцию $\chi : U \times U \to \{0,1\}$, такую, что если $\chi(u_1, u_2) = 1$, то говорим, что дуга u_1 влияет на дугу u_2. В противном случае ($\chi(u_1, u_2) = 0$) дуга u_1 не влияет на дугу u_2.

Отметим, что отношение связанности в произвольной вспомогательной сети G'' для сети G с меняющейся длительностью прохождения обладает свойствами рефлексивности и симметричности, но не обладает свойством транзитивности (см. [1]).

Перенумеруем элементы каждого множества U^i ($i \in [1;k]_Z$), т.е. представим множества U^i в виде $U^i = \{u_1^i, u_2^i, ..., u_{|U^i|}^i\}$.

Определение 2.2 *Обобщенной сетью со связанными дугами будем называть ориентированную сеть со связанными дугами, для которой имеет место соотношение:*

$$\sum_{1 \le i \le j \le |U^p|} \chi(u_i^p, u_j^p) \cdot F(u_i^p) \le c(U^p) \cdot \left|U^p\right| \quad \forall p \in [1;k]_Z . \qquad \textbf{(4)}$$

Заметим, что рассмотренные ранее сети со связанными дугами являются частным случаем обобщенных сетей со связанными дугами, если положить определить отношение связанности дуг сети следующим образом:

$$\chi(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & u_1, u_2 \text{ принадлежат одному множеству } U^p; \\ 0, & u_1, u_2 \text{ принадлежат разным множествам } U^p \text{ и } U^h. \end{cases}$$

В таком случае, в соотношении (4) получаем

$$\sum_{1 \le i \le |U^p|} \left|U^p\right| \cdot F(u_i^p) \le c(U^p) \cdot \left|U^p\right| \quad \forall p \in [1;k]_Z ,$$

а это, очевидно, то же самое, что и соотношение (3).

Определение 2.3 *Степенью влияния дуги u в обобщенной сети со связанными дугами G будем называть величину* $\delta(u)=\sum_{v\in U}\chi(u,v)$.

Определение 2.4 *Степенью влияния цепи* μ *в обобщенной сети со связанными дугами будем называть величину* $\delta(\mu)=\sum_{u\in\mu}\delta(u)$.

Для решения задачи о максимальном потоке в обобщенной сети со связанными дугами будем пользоваться алгоритмом прорыва (см. [5]) с учетом длительности и степени влияния следующей увеличивающей цепи.

Литература

1. *Ерусалимский Я.М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. -М.: Вузовская книга. 2001. -279с.

2. *Зыков А.А.* Основы теории графов. -М: Наука, 2004. -584с.

3. *Басангова Е.О., Ерусалимский Я.М.* Алгоритм нахождения максимального потока в частично-ориентированной сети.// в сб. Дискретные структуры и их приложения. Элиста, КГУ. 1988. -с.23-28.

4. *Ерусалимский Я.М.* Эйлеровость графов со смешанной достижимостью.// в сб. Модели, графы и алгебраические структуры. Элиста, 1989. -с. 45-48.

5 *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Потоки в сетях со связанными дугами.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2003, №8, -с. 3-8.

6. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Общий подход к нестандартной достижимости на графах.// Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естестественные науки. 2005, Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. -с 64-67.

7. *Скороходов В.А.* Случайные блуждания и потоки в сетях с магнитной достижимостью.// в сб. Модели и дискретные структуры. Элиста, 2002. - с. 93-100.