Задачи о потере потока в ориентированных сетях.

Скороходов В.А., Шевелев М.В.

Аннотация

Рассмотрены сети, в которых для каждой вершины определена величина потери потока. Особенность таких сетей состоит в том, что в связи с потерями в некоторых вершинах, величина потока, исходящего из стока, вообще говоря не равна величине потока, входящего в сток. Для таких сетей рассмотрены две задачи: задача о максимизации потерь и задача о минимизации потерь. Для каждой из предложенных задач разработаны алгоритмы их решения.

Abstract

We consider a network with some properties: each vertex has an additional characteristic — quantity flow losses. The peculiarity of such networks is that due to loss in some vertexes, the value of the flow is coming from the source can be not equal to the flow entering into the target. For such networks, the problem of maximizing of losses and the problem of minimizing of losses are considered. Algorithms of their decision are developed for each of the offered problems.

1 Введение

Настоящая работа посвящена исследованию задачи нахождения максимального потока в сетях с потерями потока. Сеть с потерями потока представляет собой ориентированную сеть, в вершинах которой может происходить потеря потока. Для таких сетей величина исходящего потока, вообще говоря, не равна величине приходящего, поэтому находить максимальный поток, учитывая эту особенность, классическими методами не представляется возможным. Стоит отметить, что данная задача не является переформулировкой задачи нахождения потока в сетях с несколькими стоками, так как потери в вершинах задают приоритет насыщения дуг в сети, которого нет в задаче с несколькими стоками. Например, если мы не хотим много терять, то будем стараться насыщать сеть «в обход» вершин, где могут быть потери. Рассматриваемая модель естественным образом возникает при моделировании некоторых процессов в сетях. Примером такой модели может быть сеть, по которой транспортируются какие-нибудь ресурсы в течение какого-то определенного промежутка времени, и в узлах такой сети происходят потери транспортируемых ресурсов.

Потери потока в сетях — один из аналогов нестандартной достижимости на графе. Задачи нахождения потоков в сетях с нестандартной достижимостью подробно рассматривались в работах [1]–[6]. Основной подход к решению таких задач — построение вспомогательного графа G', который отражает особенности достижимости, и нахождение на нем максимального потока классическими алгоритмами или их модификациями.

В настоящей работе рассмотрены две задачи нахождения максимального потока с потерями: при условии минимизации и при условии максимизации потерь сети. В обеих задачах будем применять подход, согласно которому сначала построим вспомогательную сеть G', которая будет отражать потери потока, а затем найдем классический максимальный поток в сети G' одним из известных способов. Стоит отметить, что задача максимизации потерь решается проще, чем задача минимизации потерь.

2 Задача о потерях потока в сети

Рассмотрим сеть $G(X, U, f)$ — связный ориентированный граф с двумя выделенными вершинами: источником s и стоком t. В классическом случае потоком в сети называется функция $F : U \to R_+$, обладающая свойствами ограниченности и неразрывности (см. [7]):

$$\begin{cases} \sum\limits_{u\in[x]^-} F(u) - \sum\limits_{u\in[x]^+} F(u) = 0, \forall x \neq s, t; \\ 0 \leq F(u) \leq c(u), \qquad\qquad \forall u \in U. \end{cases}.$$

Здесь и далее через $[x]^+$ будем обозначать множество дуг, выходящих из вершины x, а через $[x]^-$ — множество дуг входящих в вершину x.

Рассмотрим сеть $G(X, U, f)$, для каждой вершины x которой задана неотрицательная величина $\psi(x)$ — максимально возможная потеря потока в этой вершине. Всюду далее будем полагать, что $\psi(s) = \psi(t) = 0$, т.е. потери в источнике и стоке равны нулю. В такой сети будем рассматривать потоки с потерями в вершинах, то есть функции $F : U \to R_+$ со следующими свойствами.

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad \sum\limits_{u \in [x]^-} F(u) = \sum\limits_{u \in [x]^+} F(u) + a(x); \\ \forall u \in U \quad 0 \leq F(u) \leq c(u). \end{cases} , \tag{1}$$

где $a(x) = \min \left\{ \psi(x), \sum\limits_{u \in [x]^+} F(u) \right\}$ – величина потери потока в вершине x. Заметим, что $0 \leq a(x) \leq \psi(x)$.

Определение 2.1. *Сеть $G(X, U, f)$, в которой рассматриваются потоки только с предложенными свойствами будем называть сетью с потерями в вершинах.*

Отметим, что в сети с потерями в вершинах величина $v_s(F)$ — величина потока F, исходящего из источника — вообще говоря не будет равна величине $v_t(F)$ — величине потока F, приходящего в сток.

Определение 2.2. *Максимальным потоком в сети $G(X, U, f)$ с потерями в вершинах будем называть поток F, удовлетворяющий условиям (1) и максимальный по величине $v_s(F)$.*

2.1 Задача о максимизации потерь в сети

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети с потерями в вершинах, для которого суммарная величина потери потока максимальна, т.е.

$$\sum_{x \in X_l} a(x) \to \max . \tag{2}$$

Поскольку максимальный поток с потерями в сети может быть не единственным, то решение поставленной задачи классическими методами представляется довольно затруднительным.

Поэтому для её решения будем использовать вспомогательный граф $G'(X', U', f')$, на котором найдем поток, обеспечивающий выполнение условия (2) для исходного графа. Далее, определенным образом перенесем найденный поток на исходный граф и продолжим нахождение максимального потока на G, являющегося решением задачи. Алгоритмы нахождения классического максимального потока описаны в работах [7] и [8].

Вспомогательный граф G' будем строить по исходному графу G следующим образом: на исходном графе добавляем вершину x_t. Затем, для каждой вершины x, такой что $\psi(x) > 0$ добавляем дугу u_x, обладающую свойством, что $f'(u_x) = (x, x_t)$. Пропускную способность каждой добавленной дуги u_x положим равной величине $\psi(x)$. Добавленную вершину x_t будем считать стоком на графе G'.

Пример 2.1.

Рассмотрим граф G на рис.1а. Вспомогательный граф G' показан на рис.1б.

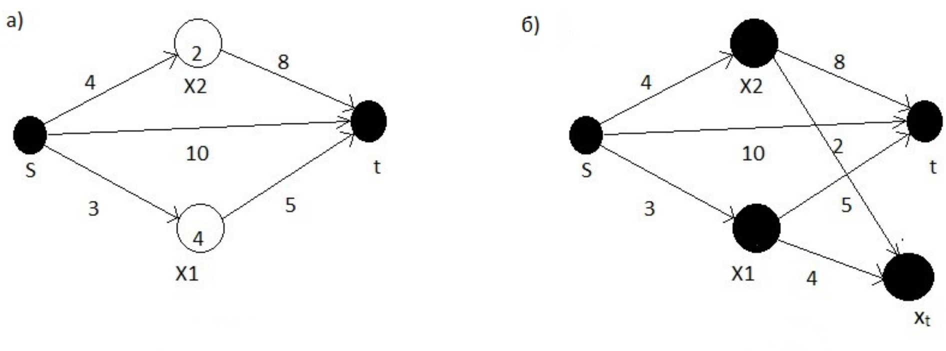

Рисунок 1 — Исходный граф G (а) и вспомогательный граф G'(б).

Теорема 2.1. *Решение задачи нахождения максимального потока при условии (2) может быть найдено при помощи следующего алгоритма.*

Алгоритм 2.1.

Шаг 1. Находим максимальный поток F' в сети G' из s в x_t.

Шаг 2. Полученный поток F' переносим на исходную сеть G следующим образом:

$$\forall u \in U \cap U' \quad F''(u) := F'(u).$$

Шаг 3. Пока это возможно, продолжаем насыщение сети G потоком из s в t. Таким образом будет найден поток F, который является *решением задачи нахождения максимального потока в исходной сети G с потерями в вершинах при условии максимизации потерь (2).*

∇ *Доказательство.*

Условие (2) означает, что необходимо пропустить поток в первую очередь через вершины, в которых происходит потеря (т.е $x \in X_l$). Таким образом, весь поток, который можно максимально потерять, будет потерян.

Рассмотрим результат выполнения шага 1. Для любой достроенной дуги u_x графа G' возможны две ситуации :

1. Пропускная способность равна величине потока (т.е. $c(u_x) = F'(u_x)$). Это означает, что через вершину x, пропущен поток величины $\psi(x)$. Значит, поток F'', найденный в процессе выполнения шага 2, насыщает граф G таким образом, что величина $a(x) = \psi(x)$ (т.е. фактическая потеря равна максимально возможной для вершины x).

2. Пропускная способность больше величины потока ($c(u_x) > F'(u_x)$). Это означает, что через вершину x, пропущен поток величины меньше $p(x)$. Следовательно, минимальный разрез графа G' не содержит дугу u_x. Значит, поток F'', найденный в процессе выполнения шага 2, насыщает граф G, таким образом, что через данную вершину x невозможно пропустить никакого потока на шаге 3.

Таким образом, в результате выполнения этапа 2 на исходном графе G получен поток с потерями, удовлетворяющий одновременно и условию (1), и условию (2). Однако, этот поток вообще говоря не является максимальным.

Насыщение сети G потоком из вершины s в вершину t на шаге 3 для каждой вершины x не меняет величины $a(x)$. Это означает, что условия (1) и (2) для результирующего потока F выполнены и, при этом, поток F с потерями является максимальным.

Δ

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 2.1 определяется трудоёмкостью нахождения максимального классического потока и в данном случае ограничена величиной $O(n^2 \cdot m)$ (см. [10]), где $n = |X|$, $m = |U|$.

Пример 2.2.

Рассмотрим сеть G с потерями потока в вершинах на рис.2, дуги $\{u_1, \ldots, u_7\}$ которого таковы, что: $f(u_1) = (s, x_1)$, $c(u_1) = 4$; $f(u_2) = (s, x_2)$, $c(u_2) = 5$; $f(u_3) = (s, x_3)$, $c(u_3) = 3$; $f(u_4) = (x_1, x_3)$, $c(u_4) = 5$; $f(u_5) = (x_1, t)$, $c(u_5) = 3$; $f(u_6) = (x_2, t)$, $c(u_6) = 2$; $f(u_7) = (x_3, t)$, $c(u_7) = 6$. Также, для вершин сети G указаны следующие величины максимально возможных потерь: $\psi(x_1) = 2$, $\psi(x_2) = 4$, $\psi(x_3) = 0$.

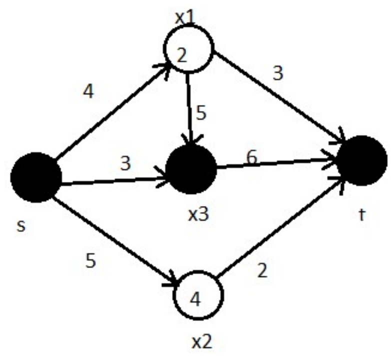

Рисунок 2 — Исходная сеть G.

Построим вспомогательный граф G' (см рис.3)

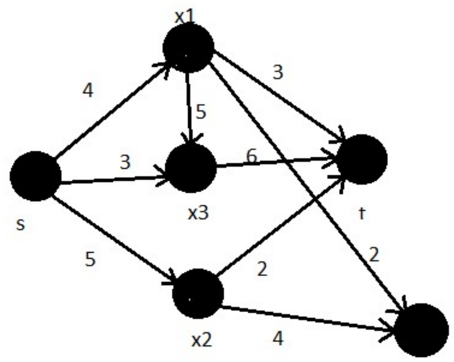

Рисунок 3 — Вспомогательная сеть G'.

Поток F', полученный в результате выполнения шага 1 алгоритма 2.1, показан на рис.4.

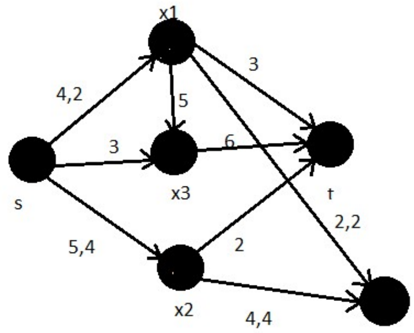

Рисунок 4 — Поток в сети G' после выполнения этапа 1.

Заметим, что для вершин x_1 и x_2,мы получили, что $c(u_{x_1}) = F'(u_{x_1})$ и $c(u_{x_2}) = F'(u_{x_2})$. Это означает, что через эти вершины пропущен поток величины $\psi(x_1)$ и $\psi(x_2)$ соответственно, т.е. потери в данных вершинах являются максимально возможными.

Результат переноса потока F' на сеть G (шаг 2 алгоритма 2.1) показан на рис.5).

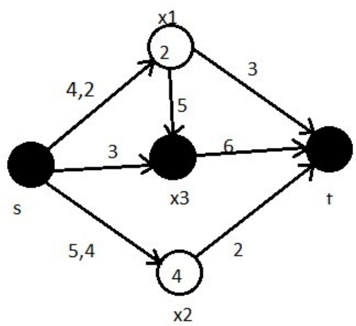

Рисунок 5 — Поток в сети G после выполнения этапа 2.

Окончательное решение задачи нахождения максимального потока в сети G с потерями в вершинах показано на рис.6.

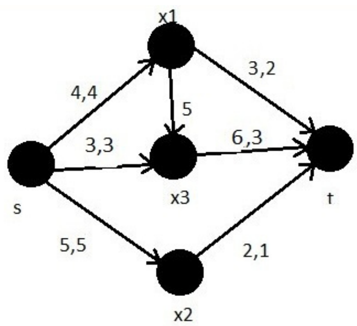

Рисунок 6 — Максимальный поток в исходной сети G с потерями в вершинах.

2.2 Задача о минимизации потерь в сети

Рассмотрим задачу нахождения максимального потока в сети с потерями, для которого величина суммарная величина потерь минимальна, т.е.

$$\sum_{x \in X_l} a(x) \to \min . \tag{3}$$

Для поиска максимального потока F на графе G такого, что выполняется условие (3), будем применять алгоритм 2.2, основанный на алгоритме нахождения максимального потока минимальной стоимости (см. [9], [10]). Для этого с каждой дугой $u \in U$ свяжем величину $b(u)$ – стоимость прохождения по ней единицы потока.

Теорема 2.2. *Решение задачи нахождения максимального потока при условии (3) может быть найдено при помощи следующего алгоритма.*

Алгоритм 2.2.

Шаг 1. На исходном графе G для любой вершины x, такой что $x \in X_l$, величину стоимости $b(u)$ для каждой дуги u, входящей в x, полагаем равной $b(u) = \min\{c(u), \psi(x)\}$. Для всех остальных дуг стоимость полагаем равной нулю.

Шаг 2. Выполняем одну итерацию алгоритма нахождения максимального потока минимальной стоимости, при условии, что искомый поток на данной итерации будет единичной величины. В результате такой итерации получим увеличивающую цепь $\mu = \{u_1, \ldots, u_k\}$. Для нее определим величину насыщения $e(\mu) = \min\limits_{i=1,\ldots,k}(c(u_i) - F(u_i))$.

Шаг 3. Если такой цепи не найдено, то делаем вывод, что поток F является максимальным и алгоритм заканчивает работу.

Шаг 4. Введем в рассмотрение величину a_μ – фактические потери потока при насыщении цепи μ. Положим $a_\mu = 0$ (так как насыщение по найденной цепи не происходило, а значит и потерь не было).

Шаг 5. Произведем насыщение сети G потоком, по найденой цепи, причем делать это будем последовательно, для каждой дуги этой цепи, начиная с первой.

Рассмотрим дугу $u_i = \mu(i)\ \forall i \in [1;k]_N$. *Если ее стоимость равна нулю* ($b(u_i) = 0$), *то выполняем насыщение следующим образом:*

$$F(u_i) := F(u_i) + e(\mu) - a_\mu,$$

иначе выполняем следующую последовательность действий:

$$F(u_i) := F(u_i) + e(\mu) - a_\mu,$$

$$a_\mu := a_\mu + \min(\psi(x), e(\mu) - a_\mu),$$

$$\psi(x) := \psi(x) - \min(\psi(x), e(\mu) - a_\mu).$$

Шаг 6. Возвращаемся к шагу 1.

Доказательство данной теоремы следует из обоснования алгоритма поиска максимального потока минимальной стоимости и доказательства теоремы 2.1.

Вычислительная трудоёмкость алгоритма 2.2 определяется трудоёмкостью нахождения максимального классического потока минимальной стоимости и в данном случае ограничена величиной $O(n^3 \cdot m)$ (см. [10]), где $n = |X|$, $m = |U|$.

Пример 2.3.

Рассмотрим сеть с потерями, приведенную на рис.7. На рисунке возле каждой дуги указана величина пропускной способности. Также считаем, что каждая закрашенная вершина принадлежит множеству X_l, а каждая незакрашенная вершина принадлежит множеству X_o (величина $\psi(x)$ указана внутри вершин).

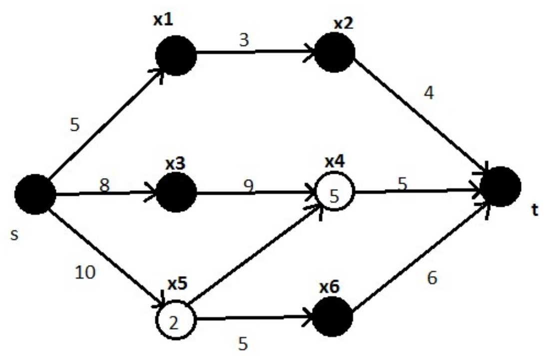

Рисунок 7 — Исходная сеть.

Обозначим дуги: $f(u_1) = (s, x_1)$, $f(u_2) = (s, x_3)$, $f(u_3) = (s, x_5)$, $f(u_4) = (x_1, x_2)$, $f(u_5) = (x_3, x_4)$, $f(u_6) = (x_5, x_6)$, $f(u_7) = (x_5, x_4)$, $f(u_8) = (x_2, t)$, $f(u_9) = (x_4, t)$, $f(u_{10}) = (x_6, t)$

На рассматриваемой сети для поиска максимального потока такого, что выполняется условие (3), применим алгоритм 2.2:

Итерация 1.

1.1. Стоимости дуг устанавливаются следующим образом: $b(u_1) = 0$, $b(u_2) = 0$, $b(u_3) = 2$, $b(u_4) = 0$, $b(u_5) = 5$, $b(u_6) = 0$, $b(u_7) = 4$, $b(u_8) = 0$, $b(u_9) = 0$, $b(u_{10}) = 0$.

1.2. В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_1, u_4, u_8\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu : s \to x_1 \to x_2 \to t$), при этом $e(\mu) = 3$.

1.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е $a := 0$).

1.4. Произведем насыщение сети G по цепи μ:

Рассмотрим первую дугу пути μ: $\mu(1) = u_1$. Поскольку $b(u_1) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_1) := F(u_1) + e(\mu) - a = 0 + 3 - 0 = 3.$$

Рассмотрим вторую дугу пути μ: $\mu(2) = u_4$. Поскольку $b(u_4) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_4) := F(u_4) + e(\mu) - a = 0 + 3 - 0 = 3.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ: $\mu(2) = u_8$. Поскольку $b(u_8) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_8) := F(u_8) + e(\mu) - a = 0 + 3 - 0 = 3.$$

Итерация 2.

2.1. Поскольку на предыдущей итерации ни одна из величин $\psi(x)$ не изменилась, то величины $b(u)$ остались прежними.

2.2. В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_2, u_5, u_9\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu : s \to x_3 \to x_4 \to t$), при этом $e(\mu) = 5$.

2.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е $a := 0$).

2.4. Произведем насыщение сети G по цепи μ:

Рассмотрим первую дугу пути μ: $\mu(1) = u_2$. Поскольку $b(u_2) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_2) := F(u_2) + e(\mu) - a = 0 + 5 - 0 = 5.$$

Рассмотрим вторую дугу пути μ: $\mu(2) = u_5$. Поскольку $b(u_5) \neq 0$, то выполняем следующие действия:

$$F(u_2) := F(u_2) + e(\mu) - a = 0 + 5 - 0 = 5,$$

$$a := a + \min\{5, 5\} = 0 + 5 = 5,$$

$$\psi(x_4) := \psi(x_4) - a = 5 - 5 = 0.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ: $\mu(3) = u_9$. Поскольку $b(u_9) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_9) := F(u_9) + e(\mu) - a = 0 + 5 - 5 = 0.$$

Итерация 3.

3.1 Произведем пересчет стоимости дуг следующим образом: $b(u_5) = 0$, остальные стоимости не изменились.

3.2 В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_2, u_5, u_9\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu : s \to x_3 \to x_4 \to t$), при этом $e(\mu) = 3$.

3.3 Полагаем фактические потери равными нулю (т.е $a := 0$).

3.4 Произведем насыщение сети G по цепи μ:

Рассмотрим первую дугу пути μ: $\mu(1) = u_2$. Поскольку $b(u_2) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_2) := F(u_2) + e(\mu) - a = 5 + 3 - 0 = 8.$$

Рассмотрим вторую дугу пути μ: $\mu(2) = u_5$. Поскольку $b(u_5) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_5) := F(u_5) + e(\mu) - a = 5 + 3 - 0 = 8.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ: $\mu(3) = u_9$. Поскольку $b(u_9) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_9) := F(u_9) + e(\mu) - a = 0 + 3 - 0 = 3.$$

Итерация 4.

4.1. Поскольку на предыдущей итерации ни одна из величин $\psi(x)$ не изменилась, то величины $b(u)$ остались прежними.

4.2. В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_3, u_6, u_{10}\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu : s \to x_5 \to x_6 \to t$), при этом $e(\mu) = 5$.

4.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е $a := 0$).

4.4 Произведем насыщение сети G по цепи μ:

Рассмотрим первую дугу пути μ: $\mu(1) = u_3$. Поскольку $b(u_3) \neq 0$, то выполняем следующие действия:

$$F(u_3) := F(u_3) + e(\mu) - a = 0 + 5 - 0 = 5,$$

$$a := a + \min\{2, 3\} = 0 + 2 = 2,$$

$$\psi(x_4) := \psi(x_4) - a = 2 - 2 = 0.$$

Рассмотрим вторую дугу пути μ: $\mu(2) = u_6$. Поскольку $b(u_6) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_6) := F(u_6) + e(\mu) - a = 0 + 5 - 2 = 3.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ: $\mu(3) = u_{10}$. Поскольку $b(u_{10}) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_{10}) := F(u_{10}) + e(\mu) - a = 0 + 5 - 2 = 3.$$

Итерация 5.

5.1. Произведем пересчет стоимости дуг следующим образом: $b(u_3) = 0$, остальные стоимости не изменились.

5.2.В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_3, u_6, u_{10}\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu : s \to x_5 \to x_6 \to t$), при этом $e(\mu) = 2$.

5.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е $a := 0$).

5.4. Произведем насыщение сети G по цепи μ:

Рассмотрим первую дугу пути μ: $\mu(1) = u_3$. Поскольку $b(u_3) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_3) := F(u_3) + e(\mu) - a = 5 + 2 - 0 = 7.$$

Рассмотрим вторую дугу пути μ: $\mu(2) = u_6$. Поскольку $b(u_6) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_6) := F(u_6) + e(\mu) - a = 3 + 2 - 0 = 5.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ: $\mu(2) = u_{10}$. Поскольку $b(u_{10}) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_{10}) := F(u_{10}) + e(\mu) - a = 3 + 2 - 0 = 5.$$

Итерация 6.

6.1. Поскольку на предыдущей итерации ни одна из величин $\psi(x)$ не изменилась, то величины $b(u)$ остались прежними.

6.2. В сети G находим увеличивающую цепь $\mu = \{u_3, u_7, u_9\}$ минимальной стоимости (в качестве последовательностей вершин: $\mu : s \to x_5 \to x_4 \to t$), при этом $e(\mu) = 2$.

6.3. Полагаем фактические потери равными нулю (т.е $a := 0$).

6.4. Произведем насыщение сети G по цепи μ:

Рассмотрим первую дугу пути μ: $\mu(1) = u_3$. Поскольку $b(u_3) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_3) := F(u_3) + e(\mu) - a = 7 + 2 - 0 = 9.$$

Рассмотрим вторую дугу пути μ: $\mu(2) = u_7$. Поскольку $b(u_7) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_7) := F(u_7) + e(\mu) - a = 0 + 2 - 0 = 0.$$

Рассмотрим третью дугу пути μ: $\mu(2) = u_9$. Поскольку $b(u_9) = 0$, то выполняем насыщение:

$$F(u_9) := F(u_9) + e(\mu) - a = 3 + 2 - 0 = 5.$$

Итерация 7. Поскольку на полученном графе G не возможно построить ни одну увеличивающую цепь μ, алгоритм 2.2. Полученный поток представлен на рис.8.

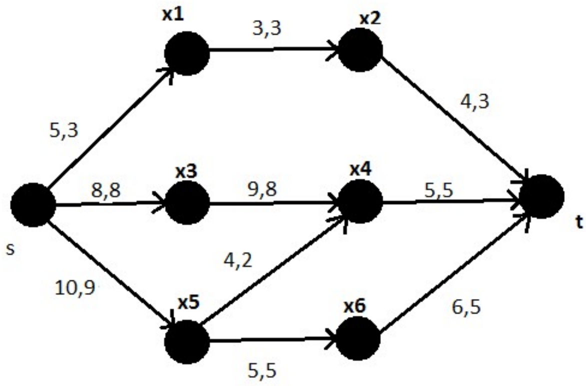

Рисунок 8 — Найденный поток.

Замечание 2.1. *Если в описании алгоритма 2.2 на шаге 2 пропускную способность насыщающей цепи цепи μ вычислять по следующей формуле, то количество итераций при применении алгоритма сократится.*

$$c(\mu) = \min_{i=1,\ldots,|\mu|} \left\{ \min \left\{ c(u_i) - F(u_i), \sum_{j=1}^{i} \psi((p_2 \circ f)(u_j)) \right\} \right\}. \qquad (4)$$

Это произойдет по той причине, что цепь μ, пропускная способность которой вычислена по формуле (4), будет полностью насыщена, тогда как при строгом применении алгоритма насыщение некоторых цепей разбивается на два этапа: насыщение с потерями и насыщение без потерь. Данная ситуация представлена в примере 2.3 – итерации 2 и 3, а так же итерации 4 и 5.

Список используемой литературы:

[1] *Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю.* Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996, №2, -с. 14-17.

[2] *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Потоки в сетях со связанными

дугами.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 2003, №8, -с. 3-8.

[3] *Ерусалимский Я.М., Водолазов Н.Н.* Нестационарный поток в сети.// Вестник ДГТУ. –2009. –Т. 9. –№3(42). – С. 402-409.

[4] *Скороходов В.А., Ерусалимский Я.М.* Нестандартная достижимость на графах: модели и алгоритмы.// Lambert Academic Publishing (LAP, Saarbrücken, Germany), 2011. 188p., ISBN 978-3-8433-0592-1.

[5] *Скороходов В.А.* Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами. Моделирование и анализ информационных систем.// Т.19, 2012, №2, -с. 41-52.

[6] *Скороходов В.А.* Задача о перераспределении ресурсов на графах с нестандартной достижимостью.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010, №1, -с. 22-26.

[7] *Ерусалимский Я.М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения.// -М.: Вузовская книга. 2001. -279с.

[8] *Водолазов Н.Н., Ерусалимский Я.М.* Максимальный всплеск в сети и максимальный объем сети.// Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. - 2010. - №6. - С. 9-13.

[9] *Басакер Р., Саати Т.Л.* Конечные графы и сети.//-М.:Наука. 1974.

[10] *Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B.* Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. —New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1993. — 864 p.