УДК 519.1

О задаче размещения потребителей в сетях с распределением потока. I. NP-полнота

Свиридкин Д. О., Скороходов В. А.

Ключевые слова: *сети с потреблением потока, распределение потока, максимальный поток в сети*

Keywords: *networks with flow consumption, flow distribution, maximum flow on a network*

В данной работе рассмотрены ориентированные сети с потреблением потока. Особенностью таких сетей является то, что для некоторых вершин указана величина потребления потока, т.е. величина входящего потока в некоторую вершину может не совпадать с величиной выходящего. На таких сетях рассмотрены задачи размещения потребителей ресурса в узлах сети при различных условиях распределения потока. Задачи рассмотрены в вычислительной и оптимизационной формулировках. Условия распределения введены в случаях вещественного и целочисленного потоков. В качестве рассматриваемых условий распределения для вещественного потока предложены условия жесткого распределения, для целочисленного – условия распределения по приоритетам и нежесткого распределения с приоритетами. Выбранные условия распределения таковы, что поток фиксированной величины определяется единственным образом.

Показано, что задачи размещения потребителей, в предположении неравенства классов P и NP, не могут быть решены за полиномиальное время путем последовательного выбора. Доказано, что задача обеспечения заданной величины потребления является NP-полной независимо от выбранных условий распределения потока. Для задачи обеспечения максимальной величины потребления доказана ее NP-полнота в сильном смысле для случаев целочисленного потока и всех рассмотренных условий распределения потока. Также получен более сильный результат, что оптимизационная задача размещения потребителей является NP-полной независимо от способа распределения потока как в целочисленном, так и в вещественном случаях.

Показано, что при не совпадении классов P и NP, для всех рассмотренных в данной работе задач не существует полиномиальных по времени алгоритмов их решения.

Введение

В работе [1] рассмотрены ориентированные сети с возможностью потери (утечек) потока в вершинах и разработан метод нахождения максимального потока в таких сетях. Рассмотренные в [1] сети таковы, что величина максимальной потери $\psi(x)$ указана для каждой вершины x, и приходящий в вершину x поток обязательно уменьшается на величину $a(x)$, не превосходящую $\psi(x)$.

В настоящей работе рассмотрены сети, аналогичные сетям работы [1]: для каждого узла указаны величины потребления $\psi(x)$ ресурса, т.е. приходящий ресурс уменьшается на величину $0 < a(x) \leq \psi(x)$. Для таких сетей рассмотрены задачи максимизации суммарной величины фактического потребления, а именно: задача о выборе подмножества вершин заданной мощности, на котором достигается максимальная величина потребления при заданной величине входящего потока сети. Приходящий поток в некоторую вершину уменьшается только в том случае, если вершина принадлежит выбранному подмножеству. Ввиду неопределённости при насыщении дуг сети остатком потока, поскольку поток может проходить по сети различными путями, вводятся определённые правила, по которым дуги сети насыщаются потоком. В качестве таких правил рассмотрены различные условия распределения потока в сети (см. [2], [3]):

В случае целочисленного потока в сети рассмотрены распределение потока по приоритетам и нежесткое распределение (см. [2]) с приоритетами. В вещественном случае – жесткое распределение (см. [2], [3]).

Для каждого случая доказана сильная NP-полнота соответствующей задачи выбора подмножества для размещения потребителей для любого способа распределения потока.

1 Основные понятия

Рассмотрим сеть $G(X, U, f)$ — связный ориентированный граф с двумя выделенными вершинами: источником s и стоком t — такую, что для каждой её дуги $u \in U$ заданы две величины: пропускная способность $c(u)$ и доля $p(u)$ прохождения по ней потока, приходящего в начальную вершину дуги u (см. [4]–[6]). Обозначим через $F(u)$ величину потока F, проходящего по дуге u.

Ясно, что для величин $p(u)$, $c(u)$ и $F(u)$ справедливы следующие выражения (см. [4], [7]):

$$\begin{cases} \sum\limits_{u \in [x]^+} p(u) = 1, & \forall x \neq t; \\ \sum\limits_{u \in [x]^-} F(u) - \sum\limits_{u \in [x]^+} F(u) = 0, & \forall x \neq s, t; \\ 0 \leq F(u) \leq c(u), & \forall u \in U. \end{cases} . \tag{1}$$

Здесь и далее через $[x]^+$ будем обозначать множество дуг, выходящих из вершины x, а через $[x]^-$ — множество дуг входящих в вершину x.

Определение 1 *Поток F в сети G называется жёстко распределённым, если для него выполняются соотношения (1), и величины пропускаемого по дугам потока пропорциональны долям потока, проходящего по этим дугам, т.е.*

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i), \quad \forall u_i, u_j \in [x]^+, \quad \forall x \in X \setminus \{t\}. \qquad (2)$$

Определение 2 *Сети, для которых рассматриваются только потоки, удовлетворяющие условиям (1) и (2) называются сетями с жёстким распределением потока.*

Определение 3 *Поток F в сети G называется нежёстко распределённым, если выполняются соотношения (1), и для каждой вершины $x \in X \setminus \{t\}$ выполняются равенства*

$$F(u_i) \cdot p(u_j) = F(u_j) \cdot p(u_i) \quad \forall u_i, u_j \in [x]^+ \setminus [x]^*, \qquad (3)$$

где $[x]^* = \{u \in [x]^+ | F(u) = c(u)\}$.

Определение 4 *Сети, для которых рассматриваются только потоки, удовлетворяющие условиям (1) и (3) будем называть сетями с нежёстким распределением потока.*

Кроме этого рассмотрим потоки с распределением по приоритетам и нежёсткое распределение с приоритетами.

Определение 5 *Будем говорить, что поток распределён по приоритетам, если для каждой вершины все исходящие из неё дуги упорядочиваются некоторым образом и выходящий из этой вершины поток распределяется по дугам в полученном порядке: весь нераспределенный поток помещается в ненасыщенную дугу с наибольшим приоритетом, если того позволяет её пропускная способность, либо дуга насыщается полностью, а величина не распределенного потока уменьшается на величину её пропускной способности, после чего описанные выше действия повторяются до полного распределения потока в вершине.*

Определение 6 *Будем говорить, что целочисленный поток распределён нежёстко с приоритетами, если для каждой вершины сети G распределение потока выполняется в два этапа:*

Пусть $F_{out}(x)$ – величина выходящего из вершины x потока, тогда:

1. Сначала каждая дуга u сети G насыщается потоком величины $\lfloor F_{out}((p_1 \circ f)(u)) \cdot p(u) \rfloor$,

2. Оставшийся не распределенный поток распределяется между ненасыщенными дугами согласно приоритетам.

Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что для каждой дуги $u \in U$ и величины входящего в вершину $(p_1 \circ f)(u)$ потока определена функция $\alpha : U \times R_+ \to R_+$ распределения потока, удовлетворяющая следующим условиям.

$$F(u) = \alpha\left(u, \sum_{v \in [(p_1 \circ f)(u)]^-} F(v)\right) \quad \forall\, u \in U. \tag{4}$$

Пусть сеть $G(X, U, f)$ с условием распределения потока такова, что для каждой её вершины $x \in X$ указана величина $\psi(x)$ — величина максимально возможного потребления потока в вершине x (см. [1]). Будем считать, что для источника s и стока t величина потребления равна нулю. В этой сети будем рассматривать потоки со следующими свойствами:

$$\begin{cases} \sum\limits_{u \in [x]^-} F(u) = \sum\limits_{u \in [x]^+} F(u) + a(x), & \forall\, x \in X; \\ 0 \le F(u) \le c(u), & \forall u \in U. \end{cases}, \tag{5}$$

где $a(x) = \min\left\{\psi(x), \sum\limits_{u \in [x]^+} F(u)\right\}$ — величина фактического потребления потока в вершине x, при этом $0 \le a(x) \le \psi(x)$.

Определение 7 *Сеть $G(X, U, f)$ будем называть сетью с потреблением, если в ней рассматриваются только такие потоки, которые удовлетворяют условию (5).*

Отметим, что условие (4) для сети с потреблением будет иметь следующий вид:

$$F(u) = \alpha \left(u, \sum_{v \in [(p_1 \circ f)(u)]^-} F(v) - a\left((p_1 \circ f)(u)\right) \right) \quad \forall\, u \in U. \tag{6}$$

Будем полагать, что рассматриваемые далее сети являются сетями без петель, кратных дуг и контуров.

Определение 8 *Задачей выбора подмножества вершин сети G с распределением потока для размещения потребителей (см. [1]) при заданной величине входного потока F_{start} (коротко: задача размещения потребителей), будем называть задачу нахождения такого k-элементного подмножества вершин V, что при выполнении (5), (6) и условии, что $a(x) = 0$ для всех вершин $x \in X \setminus V$, разность*

$$F_{start} - \sum_{u \in [t]^-} F(u)$$

максимальна.

Иначе говоря: в заданной сети, в которой уже распределен поток F_{start}, по известным для каждой вершины величинам, на которые можно максимально уменьшить величины выходящего из вершины потока, и по заданному правилу пересчета потока по исходящим дугам, требуется выбрать k вершин, после уменьшения выходящего потока из которых, в сток попадало как можно меньше единиц потока.

Пример 1.

Продемонстрируем перечисленные способы распределения. Рассмотрим сеть G на рис. 1. Дуги $\{u_1, \ldots, u_5\}$ таковы, что $f(u_1) = (s, 1)$, $f(u_2) = (1, 2)$, $f(u_3) = (1, 3)$, $f(u_4) = (2, t)$, $f(u_5) = (3, t)$. Величины потребления в вершинах указаны таблице 1, величины проходящих по дугам потоков в начальной конфигурации – в таблице 2. Числа 1 и 2 у дуг u_2 и u_3 соответственно — это нумерация в порядке убывания приоритетов.

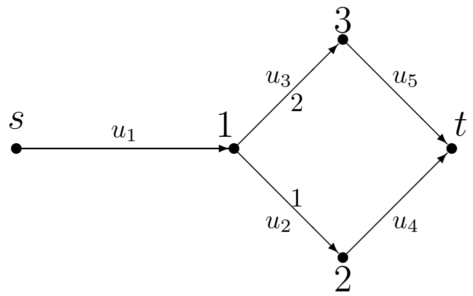

Рис. 1. Сеть G.

Таблица 1. Величины потребления в вершинах.

x	1	2	3
$\psi(x)$	7	5	5

Таблица 2. Величины проходящих по дугам потоков в начальной конфигурации.

	s	1	2	3	t
s	–	10	–	–	–
1	–	–	5	5	–
2	–	–	–	–	5
3	–	–	–	–	5

Рассмотрим несколько вариантов выбора вершин.

Вариант 1. Пусть выбирается одна вершина – вершина 1. Рассмотрим последующую конфигурацию для трех вышеописанных функций распределения. Пропускные способности, как ранее оговаривалось, будем считать равными величинам потока, проходящим в начальном состоянии.

Поскольку $a(1) = \min(\psi(1), F(u_1)) = \min(7, 10) = 7$ и в соотношениях (5) $F(u_1) = F(u_2) + F(u_3) + a(1)$, следовательно, $10 = F(u_2) + F(u_3) + 7$.

Таким образом, $F(u_2) + F(u_3) = 3$.

Распределение по приоритетам.

Сначала заполняется дуга u_2. Ее пропускная способность $c(u_2) = 5$. Величина нераспределенного потока равна трём, поэтому: $F(u_2) = 3$ и $F(u_3) = 0$.

Таким образом, сток приходит три единицы потока.

Нежёсткое распределение с приоритетами.

Будем считать распределение равномерным, т.е $p(u) = \frac{1}{deg_+\{(p_1 \circ f)(u)\}}$.

Первый этап. Распределение согласно долям $p(u_2) = p(u_3) = 0,5$ при величине $F_{out}(1) = 3$ имеет вид $F(u_2) = F(u_3) = \lfloor 3 \cdot 0,5 \rfloor = 1$.

Второй этап. Оставшийся нераспределённый поток единичной величины распределяется следующим образом. Поскольку приоритет дуги u_2 выше, значит, в итоге получаем $F(u_2) = 2$, $F(u_3) = 1$.

Таким образом, в сток приходит три единицы потока.

Жёсткое распределение. В этом случае также распределение будем считать равномерным.

$F(u_2) \cdot p(u_3) = F(u_3) \cdot p(u_2)$, т.е. $F(u_2) \cdot 0.5 = F(u_3) \cdot 0,5$, значит, $F(u_2) + F(u_3) = 3$. Отсюда следует, что $F(u_2) = F(u_3) = 1,5$

Таким образом, в сток приходит три единицы потока.

<u>Вариант 2.</u> Пусть теперь выбирается две вершины: 1 и 3.

Ранее мы определили величины потока на дугах, когда выбрана вершина 1. Пересчитаем их, добавив вершину 3: $F(u_3) = F(u_5) + a(3)$.

Распределение по приоритетам.

Поскольку в этом случае $a(3) = \min(\psi(3), F(_3)) = \min(5, 0) = 0$, значит, $F(u_5) = 0$ и в сток приходит три единицы потока.

Нежёсткое распределение с приоритетами.

Поскольку в этом случае $a(3) = \min(\psi(3), F(u_3)) = \min(5, 1) = 1$, значит, $F(u_5) = 0$ и в сток приходит две единицы потока.

Жёсткое распределение.

Поскольку в этом случае $a(3) = \min(\psi(3), F(u_3)) = \min(5, 1.5) = 1,5$, значит, $F(u_5) = 0$ и в сток приходит $1,5$ единицы потока.

Конец примера 1.

Из примера 1 ясно, что величина фактического потребления в вершине зависит от способа распределения, а также от величин фактического потребления в других вершинах.

2 Алгоритмическая сложность решений задачи размещения потребителей в сети

Рассмотрим решение поставленной задачи при помощи «жадного» подхода: на каждом этапе выбирается вершина, дающая в текущий момент наибольшую прибавку к суммарному потреблению. Обратимся к рассмотренному примеру 1 и покажем, что такой подход, вообще говоря, не дает точного решения.

Пример 2.

Пусть $k = 2$:

Во всех рассмотренных случаях распределения сначала будет выбрана вершина 1, а затем вершина 2. Однако, в случая распределения по приоритетам, такой выбор даст суммарную величину потребления 10, в случае нежесткого распределения — 9, в случае жесткого — $8,5$. Хотя оптимальное решение — выбрать вершины 2 и 3 и во всех случаях получить сумму 10. Жадный подход дает верное решение на этом примере только для распределения по приоритетам, но это не гарантированно для других конфигураций.

Конец примера 2.

Ясно, что можно получить точное решение задачи можно путем перебора всех возможных подмножеств вершин величины k, но временная сложность такого решения, вообще говоря, растет экспоненциально с увеличением числа вершин и размера подмножеств. Поэтому возникает вопрос о существовании других алгоритмов, дающих точное решение, но работающих за полиномиальное время. Далее мы покажем, что вероятнее всего (если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ [8]–[9]), таких алгоритмов не существует.

Сформулируем две оптимизационные задачи размещения потребителей и докажем, что в обоих случаях они NP-полны (см. [9]) при любом рассмотренном способе распределения потока.

Задача 1. (Об установлении фиксированого значения фактического потребления): Существует ли подмножество $\hat{V} \subset X$ такое, что $|\hat{V}| = k$ и суммарная величина фактического потребления после размещения потребителей равна A, где A задано заранее?

Задача 2. (Об установлении величины фактического потребления, не меньшей заданного значения): Существует ли подмножество

$\hat{V} \subset X$ такое, что $|\hat{V}| = k$ и суммарная величина фактического потребления после размещения потребителей не меньше A, где A задано заранее?

Ясно, что задача 2 соответствует оптимизационной задаче (найти множество вершин, обеспечивающих максимальное потребление), а задача 1 – вычислительной (определить множество вершин, если известна величина утечек). Ясно, что многократным решением задачи 1 можно без выполнения дополнительных преобразований решить задачу 2, но не наоборот.

Теорема 1 *Задача 1 является NP-полной независимо от способа распределения потока, если функция распределения может быть вычислена за полиномиальное от числа дуг время.*

Доказательство.

Задача 1 принадлежит классу NP, поскольку если представлен сертификат решения (см. [8]) — подмножество вершин $\hat{V}$, то можно расставить потребителей в выбранных вершинах и проверить результирующий поток за полиномиальное время. Алгоритм размещения: провести топологическую сортировку сети (что возможно, т.к в сети нет контуров), начиная от источника. Далее, двигаясь по полученному в результате списку, размещать потребителей, пересчитывая выходящий поток и применяя функцию распределения, по условию вычисляемую за полиномиальное от числа дуг время.

Сведем задачу о сумме подмножества к задаче 1.

Пусть $N = |S|$, где S —это некоторое заданное мультимножество натуральных чисел. Под мультимножеством будем понимать множество, возможно содержащее одинаковые элементы)

Построим сеть $G(X, U, f)$ следующим образом. Определим множество вершин $X = \{s, 1, \ldots, N, t\}$, где вершины s и t являются соответственно источником и стоком сети G. Дуги сети $\{u_0, \ldots, u_N\}$ таковы, что $f(u_0) = (s, 1)$, $f(u_N) = (N, t)$ и $f(u_i) = (i, i+1)$, для всех $i \in [1; N-1]_Z$.

Зафиксируем некоторую нумерацию элементов во множестве S: $S = \{S_1, \ldots, S_N\}$. Положим пропускные способности всех дуг сети G, а также величину стартового потока F_{start} равными величине $\sum_{i=1}^{N} S_i$. Величины потребления в вершинах сети G зададим следующим образом: $\psi(i) = S_i$ для всех значений $i \in [1; N-1]_Z$.

Заметим, что построение сети G осуществляется за полиномиальное время.

Ясно, что если существует способ выбрать k чисел множества S так, чтобы их сумма была равной заданному числу A, то существует способ выбрать K вершин-потребителей в построенной сети G так, чтобы величина фактического потребления в сети была равна A. Обратное также верно.

Поскольку задача определения существования k-элементного подмножества с заданной суммой NP-полна (см. [9]), то и задача 1 тоже NP-полна.

Теорема 2 *Задача 2 для случаев распределения с приоритетами и нежесткого распределения NP-полна в сильном смысле (см. [9]).*

Доказательство. Аналогично задаче 1, можно показать принадлежность задачи 2 к классу NP.

Сведем задачу о вершинном покрытии (см. [8] [9]) к Задаче 2.

Сводить задачу о вершинном покрытии будем в следующей формулировке: *Существует ли для заданного связного неориентированного графа G вершинное покрытие величины k?*

Подмножество вершин $\hat{V} \in X$ называется вершинным покрытием, если для каждой дуги $u \in U$ или $(p_1 \circ f)(u) \in \hat{V}$, или $(p_2 \circ f)(u) \in \hat{V}$.

На основе графа G будем строить сеть G' и, одновременно с построением сети, распределять в ней поток. В конечном итоге будет построена сеть, в которой для каждой вершины x, отличной от источника и стока, будет справедливо утверждение: проходящий через x поток равен числу инцидентных ей дуг в графе G, а проходящий через всю сеть поток равен числу дуг графа G.

Построение сети и распределение потока будем проводить в несколько этапов:

1. Выберем любую вершину графа G или любой набор независимых вершин. Пометим эти вершины, как использованные и поместим их в очередь Q.

2. Пока Q не пуста:

2.1. Выбираем некоторую вершину x из Q и полагаем $\psi(x) = \deg(x)$.

2.2. Если для вершины x остались инцидентные ей дуги, для которых не зафиксирована ориентация, то достраиваем дугу u такую, что $f(u) = (s, x)$ и пропускаем по ней поток, равный числу таких дуг.

2.3. Каждую еще не ориентированную дугу u ориентируем так, что вершина x является её началом, и пропускаем по ней поток, равный единице. Полагаем доли прохождения потока по этим дугам равными между собой. Если вершина на другом конце дуги u не помечена, помечаем её и добавляем в конец очереди Q.

2.5. Если величина полученного выходящего из вершины x потока меньше величины входящего, то достраиваем дугу v такую, что $f(v) = (x, t)$, и пропускаем по ней разницу входящего и выходящего потока. Этой дуге назначаем долю, равную нулю и наименьший приоритет.

Заметим, что построение сети выполняется за полиномиальное время обходом исходного графа в ширину.

Докажем теперь, что в исходном графе G существует вершинное покрытие мощности k тогда и только тогда, когда в построенной сети G' существует способ выбора k вершин-потребителей такой, что $F_{start} - B = 0$, где B – суммарная величина фактического потребления в сети.

Необходимость.

Пусть множество $\hat{V}$ — это вершинное покрытие мощности k. Покажем, что если выбраны вершины из $\hat{V}$, то в построенной сети выходящий поток равен нулю.

Поскольку $\hat{V}$ — вершинное покрытие, то для каждой дуги u графа G либо вершина $x = (p_1 \circ f)(u)$, либо вершина $y = (p_2 \circ f)(u)$ принадлежит множеству $\hat{V}$.

Отметим, что вершина y гарантированно имеет дугу в сток, поскольку в нее входит поток величины $\deg_+(y)$ по входящим дугам, присутствующим в исходном графе и величины $\deg_-(y)$ из источника, а по дугам, отличным от дуги в сток, проходит только поток величины $\deg_-(y)$, при этом величина $\deg_+(y)$ не меньше единицы.

В силу того, что дугам, ведущим в сток, присвоен наименьший приоритет, следовательно, если после размещения потребителей по дуге u проходит нулевой поток, то из вершины x в сток также проходит только нулевой поток.

Разместим потребителей в выбранных вершинах множества $\hat{V}$ и рассмотрим каждую дугу u исходного графа.

1. Если по ней проходит нулевой поток, то, как было отмечено ранее, в сток попадает на единицу меньший поток, чем до размещения.

2. Если по ней проходит единичный поток, то поскольку $\hat{V}$ — вершинное покрытие, значит, $x \notin \hat{V}$, $y \in \hat{V}$. Отсюда следует, что весь выходящий поток из v обнуляется и, значит, в сток попадает на единицу меньший поток, чем до размещения.

Поскольку за каждую дугу поток уменьшается на единицу, результирующий поток будет уменьшен на $|U|$. Т.к. через всю сеть проходил поток $|U|$, то результирующий поток равен 0.

Достаточность.

Пусть для размещения потребителей выбрано подмножество вершин $\hat{V}$ мощности k, на котором достигается минимальное значение результирующего потока $F_{start} - B = 0$ (структура G' такова, что $\hat{V}$ существует). Покажем, что $\hat{V}$ является вершинным покрытием.

Предположим противное, что существует непокрытое ребро u.

Отметим, что в таком случае по нему протекает как минимум единица потока, поскольку к в вершине $x = (p_1 \circ f)(u)$ подведена дуга из источника, через которую поступает столько единиц потока, сколько у вершины x исходящих дуг, не ведущих в сток.

Таким образом, в $y = (p_2 \circ f)(u)$ поступает хотя бы единица потока по входящим дугам из вершин, отличных от источника. Весь поток по исходящей от источника дуге к вершине y распределяется по исходящим из y дугам, не ведущим в сток, заполняя их полностью. Отсюда следует, что приходящая по дуге u единица потока будет распределена из вершины y в сток напрямую. Значит, в сток попадает хотя бы единица потока. Получаем противоречие с тем, что величина результирующего потока равна нулю.

Таким образом, сильная NP-полнота задачи 2 следует из сильной NP-полноты задачи о вершинном покрытии.

Теорема 2 доказана.

Сведение, использованное в доказательстве Теоремы 2, для жесткого случая не применимо, так как опирается именно на приоритеты.

Весьма примечательно, что задачу поиска вершинного покрытия для двудольного графа, имеющую полиномиальное решение (см. [9]), можно решить при помощи Задачи 2 для жесткого случая:

Возьмем то же самое сведение, что и в Теореме 2, но в качестве начальных вершин обозначим все вершины первой доли. Они, очевидно, независимы.

В построенной сети ни одна вершина первой доли не будет иметь дуги в сток, т.к в процессе построения все инцидентные им дуги еще не будут ориентированы, а ни одна вершина второй доли не будет иметь дуги из источника, т.к все инцидентные ей дуги уже будут ориентированы как входящие. В таком случае приоритеты не нужны.

Авторы признательны проф. Ерусалимскому Я.М. за ценное обсуждение содержания статьи и благожелательное отношение к их научной деятельности.

Список литературы / References

[1] Скороходов В. А., Шевелев М. В., “Задачи о потере потока в ориентированных сетях”, *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, **2 (186)** (2015), 47–53; [Skorokhodov V. A., Shevelev M. V., “Problems of loosing of flow in directed networks”, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, **2 (186)** (2015), 47–53, (in Russian).]

[2] Скороходов В. А., Чеботарева А. С., “Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **22**:3 (2015), 55–74; English transl.: Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S., “The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **9**:3 (2015), 435–446.

[3] Ерзин А. И., Тахонов И. И., “Задача поиска сбалансированного потока”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **IX**:4(28) (2006), 50–63; [Erzin A. I., Takhonov I. I., “The problem of finding of balanced flow”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **IX**:4(28) (2006), 50–63, (in Russian).]

[4] Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г., *Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения*, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2009; [Erusalimsky Ya. M., Skorokhodov V. A., Kuzminova M. V., Petrosyan A. G., *Graphs with nonstandard reachability: problems, applications*, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 2009, (in Russian).]

[5] Скороходов В. А., “Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **19**:2 (2012), 41–52; [Skorokhodov V. A., “Flows in generalized nets with related arcs”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **19**:2 (2012), 41–52, (in Russian).]

[6] Скороходов В. А., “Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения”, *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, **1** (2011), 21–26; [Skorokhodov V. A., “Flows on graphs with varying transit times through the arcs”, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, **1** (2011), 21–26, (in Russian).]

[7] Ford L. R., Fulkerson D. R., *Flows in networks*, Princeton University Press, Princenton, New Jersey, 1974.

[8] Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C., *Introduction to Algorithms. — 3rd.*, MIT Press, 2009.

[9] Gary M., Johnson D., *Computing Machines and Hard-to-Solve Problems [Russian translation]*, Mir, Moscow, 1982.

The Problems of Consumers Placement in Networks with Conditions of Flow Distribution

Sviridkin D. O., Skorohodov V. A.

Abstract:

We consider the directed networks with flow consumption. The feature of these networks is that some vertex has the value of flow consumption, so value of incomming and outcomming flows for some vertex can be different. For these networks we consider the problems of placement resource consumers in vertex of network under a special conditions of flow distribution. The problems are considered in computing and optimization formulations. The conditions of flow distribution are imposed in integer and real cases. As these conditions of flow distribution we propose strict distribution for real case and distribution by priorities or non strict distribution with priorities for integer case. The choosen conditions of distribution provide the property: the flow of fixed value is determined uniquely.

It is shown that the problems of placement of consumers may not be solved by sequential selection in polynomial time if $P \neq NP$. It is proved that the problem of ensuring a predetermined consumption value is NP-complete problem, regardless of the selected conditions of flow distribution. For the problem of ensuring a maximal consumption value we proved that last one is strongly NP-complete problem in integer case under all considering conditions. Also we got stronger result: the optimization problem of consumers placement is strongly NP-complete, regardless of conditions of flow distribution.

It is shown that if $P \neq NP$, there are no polynomial algorithm for solving any of considered in this paper problems.

Свиридкин Дмитрий Олегович, orcid.org/0000-0002-2074-6374, студент, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия,
e-mail: sv.l1@mail.ru

Скороходов Владимир Александрович, orcid.org/0000-0001-8974-0053 , канд. физ.-мат. наук., доцент, Южный федеральный университет, ул.

Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия,
e-mail: pdvaskor@yandex.ru

Sviridkin Dmitry Olegovich, orcid.org/0000-0002-2074-6374, student, Southern Federal University, Milchakova str., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia,
e-mail: sv.l1@mail.ru

Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich, orcid.org/0000-0001-8974-0053, Ph.D., Asssoc. Prof., Southern Federal University, Milchakova str., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia,
e-mail: pdvaskor@yandex.ru