УДК 519.1

ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ. СЛУЧАЙ МАЛОГО РЕСУРСА

В. А. Скороходов, Х. Абдулрахман

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 30.01.2017 г.

Аннотация. Работа посвящена изучению исследованию процессов распределения ресурсов в динамических ресурсных сетях, т. е. сетях пропускные способности дуг которых зависят от времени. Распределение ресурса в сети происходит в дискретном времени, при этом, ресурс каждой вершины распределяется только между смежными с ней вершинами по некоторым правилам. Показано, что подход, основанный на построении вспомогательной сети, разработанный для решения задачи о кратчайшем пути, применим и для сведения задачи о распределении ресурса в динамической сети к аналогичной задаче для вспомогательной сети. Разработан подход к исследованию процессов перераспределения ресурса в таких сетях. Предложены методы нахождения порогового значения и предельного состояния в динамических ресурсных сетях.

Ключевые слова: ресурсная сеть, динамические сети, пороговое значение, процессы распределения ресурсов, предельное состояние в ресурсной сети.

DYNAMIC RESOURCE NETWORKS. THE CASE OF SMALL RESOURCE

V. A. Skorokhodov, H. Abdulrahman

Abstract. This paper is devoted to studying of the processes of resource allocation in dynamic resource networks. In such networks, the capacities of the arcs depends on time. Resource allocation in the network occurs in discrete time. The resource of each vertex is distributed only between adjacent vertices according to some rules. It is shown that the approach based on the construction of an auxiliary network, which is developed to solve the shortest path problem, is also applicable to reduce the problem of resource allocation in a dynamic network to a similar problem in an auxiliary network. An approach to the study of processes resources reallocation is developed for such networks. Methods for finding the threshold value and the limit state in dynamic resource networks are proposed.

Keywords: resource network, dynamic networks, process of resources allocation, threshold value, limit state in resource network.

1. ВВЕДЕНИЕ

Ресурсные сети являются потоковой моделью, предложенной в работах О. П. Кузнецова и Л. Ю. Жиляковой (см., например, [1]–[3], [6]). Ресурсная сеть — это сеть, для каждой дуги которой указана пропускная способность, а для каждой вершины — величина находящегося в ней ресурса. В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между смежными с ней вершинами по определённым правилам. Таким образом, между каждыми последовательными моментами времени по дугам сети проходит поток. При этом, правила функционирования сети удовлетворяют двум условиям. Первое условие (условие замкнутости сети): ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает.

Второе условие (условие неразрывности): ресурс, выходящий из вершины, вычитается, а входящий в вершину, прибавляется к ресурсу данной вершины.

Поскольку ресурс перераспределяется между вершинами сети в некоторой пропорции, то задача нахождения предельного распределения ресурса в сети, схожа как с задачей поиска сбалансированного потока, рассмотренной в статье [4], так и с задачами о распределении потока, рассмотренными в статье [9].

В работах [5] и [8] исследованы графы с зависимостью весов дуг от времени. Показано что, такие ограничения аналогичны ограничениям нестандартной достижимости (см. [5]) и предложены подход для решения задач о потоках в таких сетях.

В настоящей работе рассмотрены задачи распределения ресурсов в сетях с зависимостью пропускной способности дуг от времени. Разработан метод нахождения порогового значения T, а так же предельного состояния Q^* для малых ресурсов.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведем основные понятия, определения и утверждения [1]–[3], [6].

Определение 1. *Ресурсной сетью называют связную ориентированную сеть $G(X,U,f)$ (где $X = \{x_1,\dots,x_n\}$) без стоков, для каждой дуги u которой указана пропускная способность $r(u)$, и задана вектор-функция $Q(t) = (q_1(t),\dots,q_n(t))$, где $q_i(t) \geqslant 0 \forall\, i \in [1;n]_Z$.*

Величина $q_i(t)$ называется количеством ресурса в вершине x_i в момент времени t.

Для того, чтобы определить вектор-функцию $Q(t)$ задается вектор $Q(0)$ начального распределения ресурса в сети G и указываются правила перераспределения ресурсов (правила функционирования сети):

$$q_i(t+1) = q_i(t) - \sum_{u\in[x_i]^+} F(u,t) + \sum_{u\in[x_i]^-} F(u,t) \ \ \forall\, i \in [1;n]_Z,$$

где $F(u,t)$ — величина ресурсного потока выходящего по дуге u в момент времени t определяется следующим образом (для определенности будем считать, что x_j начальная вершина дуги u):

$$F(u,t) = \begin{cases} r(u), & q_j > \sum\limits_{r\in[x_j]^+} r(v); \\ \frac{r(u)}{\sum\limits_{v\in[x_j]^+} r(v)} \cdot q_j(t), & q_j \leqslant \sum\limits_{r\in[x_j]^+} r(v). \end{cases}$$

Здесь и далее через $[x]^+$ будем обозначать множество дуг, выходящих из вершины x, а через $[x]^-$ — множество дуг входящих в вершину x.

Определение 2. *Состояние $Q(t)$ называется устойчивым, если выполняется $Q(t) = Q(t+1)$.*

Согласно правилам перераспределения ресурса если $Q(t)$ устойчиво, то для всех натуральных i имеет место равенство $Q(t) = Q(t+i)$.

Определение 3. *Состояние $Q^* = (q_1^*,\dots,q_n^*)$ называется асимптотически достижимым из состояния $Q(0)$, если для каждого $i \in [1;n]_Z$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ имеем место неравенство $|q^* - q_i(t)| < \varepsilon$.*

Определение 4. *Состояние Q^* называется предельным, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t, что $Q^* = Q(t)$, либо оно асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.*

Определение 5. *Ресурсную сеть будем называть эргодической, если она является сильно связной.*

Определение 6. *Эргодическую ресурсную сеть будем называть регулярной, если существует, по крайней мере, два цикла, длины которых являются взаимно простыми числами.*

Определение 7. *Эргодическую сеть, наибольший общий делитель d длин всех циклов которой строго больше единицы, будем называть d-циклической.*

Определение 8. *Эргодическую компоненту ресурсной сети будем называть изолированной, если из любой ее вершины достижимы только вершины этой же компоненты.*

Определение 9. *Ресурсную сеть будем называть полуэргодической, если она является связной и на ней существует единственная изолированная эргодическая компонента.*

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА НА ГРАФЕ С ЗАВИСИМОСТЬЮ ОГРАНИЧЕНИЙ ОТ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим вопрос о распределении ресурса в ресурсных сетях с зависимостью ограничений от времени. При этом будем рассматривать сети с временными пропускными способностями и сети с периодической зависимостью от времени пропускных способностей (см. [5], [8]).

Ресурсную сеть $G^p(X, U, f)$ будем называть периодической динамической по времени, если в которой каждой дуги такой сети задана не одна величина ее пропускной способности, но некоторая последовательность пропускных способностей, каждая из которых ставится в соответствие данной дуге только в свой определенный момент, при этом, начиная с некоторого момента времени $p \geqslant 0$ зависимость пропускных способностей дуг является периодической с периодом равным величине $D > 0$, т. е. для каждого момента времени $t \geqslant p$ в сети G^p выполняется соотношение $r(u,t) = r(u,t+D)\ \forall\, u \in U$.

Для распределения ресурса на графе с периодическим по времени построим вспомогательную сеть G' для сети G^p следующим образом (см. [5], [8]):

Каждой вершине x исходной сети G^p поставим в соответствие $s = p + D$ вершин $\{x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}\}$ на вспомогательной сети G', а каждой дуге $u \in U$ $(f(u) = (x, y))$ ставим в соответствие s дуг $\{u_1, \ldots, u_s\}$ таких, что $f'(u_i) = (x_{i-1}, y_i)$ для всех значении $i \in [1; s-1]_Z$ и $f'(u_s) = (x_{s-1}, y_p)$. Пропускные способности дуг u_i на вспомогательной сети имеют вид $r(u_i) = r(u, i)$ для всех значении $i \in [1; s-1]_Z$.

Отметим что, вспомогательная сеть G' сети G^p разбита на два слоя: допериодический слой, который состоит из уровней (от нулевого уровня до уровня p) и периодический слой, который состоит из D уровней (от уровня p до уровня $p + D - 1$).

Заметим что, ресурс на вспомогательной сети приходит через допериодического слоя только один раз и начиная от уровня p ресурс циркулирует на периодических слоях, поэтому часть вспомогательной сети от нулевого уровня до уровня p является подготовительной части. Таким образом, можно рассматривать только случай, когда $p = 0$, т.е. вспомогательная сеть состоит из D уровней периодической части.

Таким образом, состоянием в динамической ресурсной сети $G^0(X, U, f)$, т.е. и в ее вспомогательной сети G' в момент времени t, $(0 < t \leqslant k \cdot D$, для всех значении $k \in N)$ имеет вид

$$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t)) = Q'(t) = \begin{pmatrix} q_1^{D-1}(t) & q_2^{D-1}(t) & \ldots & q_n^{D-1}(t) \\ q_1^{D-2}(t) & q_2^{D-2}(t) & \ldots & q_n^{D-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{0}(t) & q_2^{0}(t) & \ldots & q_n^{0}(t) \end{pmatrix},$$

де $q_i^j(t)$ — величина ресурса вершины x_i^j, $(i \in [1; n]_Z$ и $j \in [0; D-1]_Z)$ в момент времени t, при этом $\sum\limits_{i=0}^{n} q_i^j(t) = W$.

4. НАХОЖДЕНИЕ ПОРОГОВОГО ЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТИ

Рассмотрим периодическую динамическую ресурсную сеть $G^0(X, U, f)$, являющейся K-циклической и ее вспомогательную сеть G', тогда G' состоит из D уровней, значит, каждый простой цикл (контур) на графе G' имеет длину, кратную числу D.

Исходная сеть G^0 является K-циклической, поэтому НОД длины всех пути на нее равен K, а это означает что, каждый простой цикл имеет длину, кратную числу K.

Таким образом, наибольший общий делитель длин циклов на графе G' равен НОК(D, K), а это означает что, вспомогательная сеть является НОК(D, K)-циклической сетью.

Замечание 1. *Вспомогательная сеть состоит из изолированных компонент сильной связности и каждая изолированная компонента является НОК(D, K)-циклической.*

Таким образом, для нахождения порогового значения T периодической динамической сети G^0, построим ее вспомогательную сеть G' и рассмотрим два случая: 1) сеть G' является эргодической (сильно связной) и 2) сеть G' не является эргодической.

Первый случай: Если вспомогательная сеть G' является эргодической ресурсной сетью, тогда она состоит из одной компоненты сильной связности, которая является НОК(D, K)-циклической сетью. Таким образом, нахождение порогового значения вспомогательной сети G' может быть найдено как в работах [1] и [7], но так как вспомогательная сеть состоит из уровней (см. [5], [8]) и вершины каждого уровня соответствуют вершинам исходной сети в определенный момент времени, т.е. суммарный ресурс в вершинах каждого уровня одинаковый. Следовательно, пороговое значение T исходной сети G^0 имеет вид: $T = \dfrac{T(G')}{D}$.

Не трудно показать, что выбор правила зависимости пропускных способностей от времени существенно влияет на величину порогового значения.

Второй случай: Если вспомогательная сеть G' не является эргодической, тогда она состоит из m =НОД(D, K) компонент сильной связности H_θ ($\theta \in [1; m]_Z$). Каждая из компонент H_θ является НОК(D, K)-циклической сетью, на которой в момент времени $t \in R_+$ распределяется ресурс, суммарной величины $W_\theta(t)$, при этом $0 \leqslant W_\theta(t) \leqslant D \cdot W$.

Пусть вершина $x_i^j \in X'$ вспомогательной сети G', тогда будем говорить, что в момент времени t вершина принадлежит множеству $Z^-(t)$, если $q_i^j(t) \leqslant \sum\limits_{v \in [x_i^j]^+} r(v)$, а в противном случае будем говорить, что $x_i^j \in Z^+(t)$.

Введём следующие обозначения: $r_i^{j,in} = \sum\limits_{v \in [x_i^j]^-} r(v)$, $r_i^{j,out} = \sum\limits_{v \in [x_i^j]^+} r(v)$.

Вершины вспомогательной сети G' разбиваются на три класса: 1) вершины-приемники, 2) вершины-источники, 3) нейтральные вершины. При этом, будем говорить, что x_i^j является

— приемником, если $r_i^{j,in} \geqslant r_i^{j,out}$;

— источником, если $r_i^{j,in} \leqslant r_i^{j,out}$;

— нейтральной вершиной, если $r_i^{j,in} = r_i^{j,out}$.

Предельное состояние в сети имеет вид

$$Q^* = \begin{pmatrix} q_1^{*D-1} & q_2^{*D-1} & \dots & q_n^{*D-1} \\ q_1^{*D-2} & q_2^{*D-2} & \dots & q_n^{*D-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{*0} & q_2^{*0} & \dots & q_n^{*0} \end{pmatrix},$$

где $q_i^{*j}(t)$ — величина ресурса вершины x_i^j, ($i \in [1; n]_Z$ и $j \in [0; D-1]_Z$) вспомогательной сети.

Для каждой компоненты H_θ ($\theta \in [1; m]_Z$) отметим что:

1. если вершина x_i^j компоненты H_θ в момент времени t принадлежит множеству $Z^+(t)$, тогда она, кроме ресурсного потока по выходящим из неё дугам, отдает ресурс величины $y_i^j(t) = q_i^j(t) - \sum\limits_{v\in[x_i^j]^+} r(v)$ вершине следующего уровня (передаваемый ресурс будем называть переносом ресурса). Отметим, что вершина x_i^{j+1} принадлежит некоторой компоненте $H' \neq H_\theta$. Если в момент времени $t+1$ вершина x^{j+1} принадлежит множеству $Z^+(t+1)$, тогда она, кроме ресурсного потока по выходящим из неё дугам, отдает перенос ресурса вершине следующего уровня и так далее до тех пор, пока не найдётся момент времени, для которого перенос из текущей вершины отсутствует.

2. если вершина x_i^j компоненты H_θ в момент времени принадлежит множеству $Z^-(t)$, тогда она отдает весь свой ресурс выходящим из неё дугам. Это означает что, перенос из текущей вершины отсутствует.

Также отметим, что для каждой компоненты H_θ существует пороговое значение суммарного ресурса T_θ, которое может быть найдено методами, предложенными в работах [1] и [7].

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1. Пороговое значение T динамической сети G^0 может быть найдено по формуле $T = \dfrac{T_1 + T_2 + \dots + T_m}{D}$, где $m =$НОД(D, K) и T_θ — пороговое значение суммарного ресурса компоненты H_θ $(\theta \in [1; m]_Z)$;

2. Если величина суммарного ресурса W равна значению T, тогда предельное состояние Q^* существует и единственно.

Доказательство. Поскольку вспомогательная сеть G' состоит из m компонент сильной связности, каждая из этих компонент H_θ $(\theta \in [1; m]_Z)$ является НОК(D, K)-циклической сетью и в момент времени t имеет ресурс суммарной величины $W_\theta(t)$, и поскольку каждый уровень вспомогательной сети G' имеет постоянную величину суммарного ресурса, равную W, тогда имеет место следующее равенство

$$D \cdot W = \sum_{i=1}^{m} W_i(t). \tag{1}$$

Таким образом, при суммарном ресурсе $W = T$ на вспомогательной сети, ресурс перераспределяется на компонентах H_1, H_2, $\dots$, H_m. Для того, чтобы в предельном состоянии на каждом такте вспомогательной сети, ресурс каждой вершины x_i^j вспомогательной сети G' не превосходил суммы величин пропускных способностей дуг, выходящих из вершины x_i^j, необходимо, чтобы суммарный ресурс каждой компоненты H_θ был не больше порогового значения компоненты H_θ.

Другими словами, чтобы неравенство $q_i^{*j} \leqslant \sum\limits_{v\in[x_i^j]^+} r(v)$ выполнялось для всех вершин вспомогательной сети, необходимо, чтобы для каждой компоненты выполнялось неравенство $W_\theta^* \leqslant T_\theta$ (см. [1], [7]). Это означает что, в предельном состоянии каждая вершина x_i^j вспомогательной сети принадлежит множеству Z^{*-}, т. е. ресурс суммарной величины $W_\theta^* \leqslant T_\theta$ циркулирует только по компоненте H_θ, и нет переноса ресурса ни из одной вершины вспомогательной сети. А поскольку $D \cdot T = D \cdot W = \sum\limits_{i=1}^{m} W_i = \sum\limits_{i=1}^{m} T_i$, значит, пороговое значение исходной сети равно

$$T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} T_i}{D}.$$

При условии $W = T$ на исходной сети, отметим что:

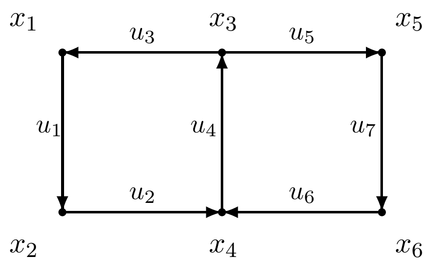

Рис. 1. *Периодическая динамическая сеть* $G^0(X, U, f, 2)$.

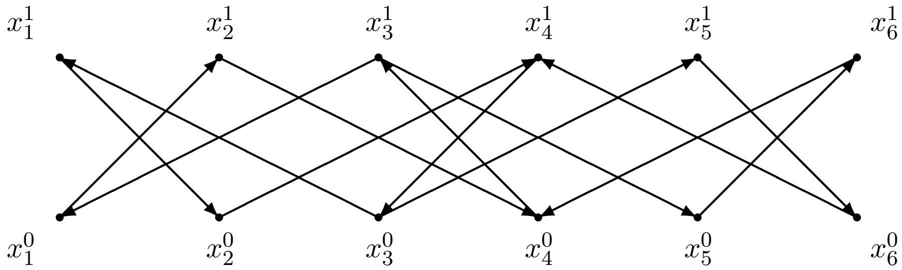

Рис. 2. *Вспомогательная сеть* G'.

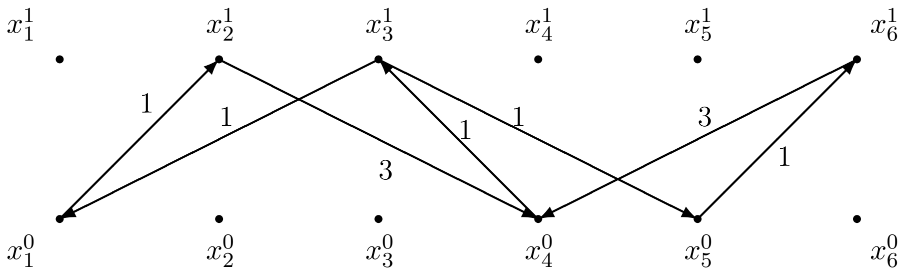

Рис. 3. *Компонента* H_2 *вспомогательной сети* G'.

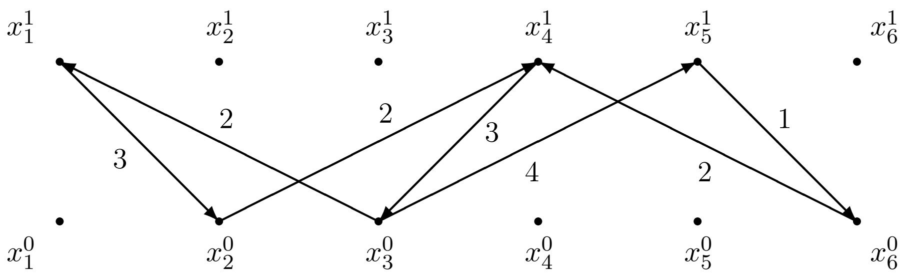

Рис. 4. *Компонента* H_2 *вспомогательной сети* G'.

— если вершина x_i^j компоненты H_θ является нейтральной или вершиной-источником, тогда в предельном состоянии она будет отдавать все свой ресурс и переходит в зону Z^-.

— если вершина x_i^j компоненты H_θ является вершиной-приемником, тогда она отдает в момент времени t перенос $y_i^j(t)$.

Но поскольку каждая компонента H_θ ($\theta \in [1;m]_Z$) имеет в момент времени t суммарный ресурс величины $W_\theta(t)$ и поскольку $D \cdot W = D \cdot T$, тогда из равенства (1) следует что, если в какой-то компоненте H_{θ_1} в момент времени t_1 выполняется неравенство $W_{\theta_1} > T_{\theta_1}$, то в этот же момент существует, по крайней мере, одна компонента H_{θ_2}, имеющая суммарный ресурс величины $W_{\theta_2} < T_{\theta_2}$. Тогда на компоненте H_{θ_1} существует хотя бы одна вершина-приемник x_i^j, которая отдает перенос ресурса в вершину x_i^{x+l} компоненты H_{θ_2}. Заметим, что поскольку в момент времени t_1 для компоненты H_{θ_2} выполняется неравенство $W_{\theta_2} < T_{\theta_2}$ и она не дает ни каких переносов в другие компоненты, тогда все ее вершины принадлежат зоне Z^- и на ней существует хотя бы одна вершина x' с ресурсом, величины $q'(t_1) < \sum\limits_{v \in [x']_Z} r(v)$, таким образом, вершина x' будет принимать перенос ресурса из компоненты H_{θ_1} пока в некоторый момент t не выполнится равенство

$$q'(t) = \sum_{v \in [x']_Z} r(v). \tag{2}$$

Если существует несколько вершин вида x' на компоненте H_{θ_2}, то перенос ресурса из компоненты H_{θ_1} будет распределяться между этими вершинами и также выполнится равенство (2) для каждой вершины x'. Последнее означает, что выполнятся равенства $W_{\theta_1} = T_{\theta_1}$ и $W_{\theta_2} = T_{\theta_2}$, а значит (см. [1], [7]), что для каждой подсети предельное состояние существует и единственно.

Следовательно, предельное состояние на всей вспомогательной сети существует и единственно.

Теорема доказана.

.

Пример. Рассмотрим динамическую ресурсную сеть G при $D = 2$ на рис. 1. Пропускные способности дуг имеют следующий вид: $r(u_1) = \{1, 3\}$, $r(u_2) = \{2, 3\}$, $r(u_3) = \{2, 1\}$, $r(u_4) = \{1, 3\}$, $r(u_5) = \{4, 1\}$, $r(u_6) = \{2, 3\}$, $r(u_7) = \{1, 1\}$.

Согласно, метода построения вспомогательного графа (см. [5]), построим граф G' (рис. 2.).

Заметим что, вспомогательная сеть G' состоит из двух эргодических компонент H_1 и H_2 (рис. 3 и 4 соответственно) и каждая из этих компонент является 4-циклической сетью.

Находя пороговые значения компонент H_1 и H_2, получаем что, $T_1 = 4$ и $T_2 = 6$. Таким образом, пороговое значение исходной сети равно $T = \dfrac{4+6}{2} = 5$ и при величине суммарного ресурса $W = T = 5$ и любом начальном состояния $Q(0)$ на исходной сети, предельное состояние в сети будет иметь вид:

$$Q^* = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 & 1,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1,5 & 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жилякова, Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах / Л. Ю. Жилякова // Управление большими системами. — 2013. — № 43. — С. 34–54.

2. Жилякова, Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы / Л. Ю. Жилякова // Управление большими системами. — 2013. — № 45. — С. 6–29.

3. Жилякова, Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. III. Исследование предельных состояний / Л. Ю. Жилякова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 7. — С. 67–77.

4. Ерзин, А. И. Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели / А. И. Ерзин, И. И. Тахонов // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2005. — Т. VIII, № 3(23). — С. 58–68.

5. Графы с нестандартной достижимостью : задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. — Ростов–на–Дону : Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.

6. Кузнецов, О. П. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель / О. П. Кузнецов, Л. Ю. Жилякова // Доклады АН. — 2010. — Т. 433, № 5. — С. 609–612.

7. Скороходов, В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети / В. А. Скороходов // Управление большими системами. — 2016. — Вып. 63. — С. 6–23.

8. Скороходов, В. А. Достижимость на графах с ограничением на прохождение по дугам и зависимостью весов дуг от времени / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2009. — № 6. — С. 14–17.

9. Скороходов, В. А. Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 55–74.

REFERENCES

1. Zhilyakova L.Yu. Ergodic cyclical resource network. I. Oscillations and equilibrium states with small resources. [Zhilyakova L.Yu. Ergodicheskie tsiklicheskie resursnye seti. I. Kolebaniya i ravnovesnye sostoyaniya pri malykh resursakh]. *Upravlenie bol'shimi sistemami — Large-Scale Systems Control*, 2013, no. 43, pp. 34–54.

2. Zhilyakova L.Yu. Ergodic cyclical resource network. II. Large resources. [Zhilyakova L.Yu. Ergodicheskie tsiklicheskie resursnye seti. II. Bol'shie resursy]. *Upravlenie bol'shimi sistemami — Large-Scale Systems Control*, 2013, no. 45, pp. 6–29.

3. Zhilyakova L.Yu. Asymmetric resource networks. III. A study of limit states. [Zhilyakova L.Yu. Nesimmetrichnye resursnye seti. III. Issledovanie predel'nyx sostoyaniyj]. *Avtomatika i telemexanika — Automation and Remote Control*, 2012, no. 7, pp. 67–77.

4. Erzin A.I., Takhonov I.I. The problem of finding of balanced flow. [Erzin A.I., Taxonov I.I. Ravnovesnoe raspredelenie resursov v setevoyj modeli]. *Sibirskiyj zhurnal industrial'noyj matematiki — Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2005, vol. VIII, no. 3(23), pp. 58–68.

5. Erusalimskij Ya.M., Skorokhodov V.A., Kuzminova M.V., Petrosyan A.G. Graphs with nonstandard reachability: tasks, applications. [Erusalimskii Ya.M., Skorokhodov V.A., Kuz'minova M.V., Petrosyan A.G. Grafy s nestandartnoi dostizhimost'yu: zadachi, prilozheniya]. Rostov–na–Donu: Yuzhnyi federal'nyi universitet, 2009, 195 p.

6. Kuznetsov O.P., Zhilyakova L.Yu. Bidirectional resource networks: a new flow model. [Kuznecov O.P., Zhilyakova L.Yu. Dvustoronnie resursnye seti — novaya potokovaya model']. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2010, vol. 433, no. 5, pp. 609–612.

7. Skorokhodov V.A. The problem of finding of threshold value in ergodic resource network. [Skorokhodov V.A. Zadacha nahozhdeniya porogovogo znacheniya v ergodicheskoi resursnoi seti]. *Upravlenie bol'shimi sistemami — Large-Scale Systems Control*, 2016, iss. 63, pp. 6–23.

8. Skorokhodov V.A. Nonstandard reachability on digraphs, which arcs weigths depend on time. [Skorokhodov V.A. Dostijimost' na grafah s ogranicheniem na prohozhdenie po dugam i zavisimost'yu vesov dug ot vremeni]. *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskiyj region. Estestvennye nauki — University News. North-Caucasian Region. Natural Sciences Series*, 2009, no. 6, pp. 14–17.

9. Skorohodov V.A., Chebotareva A.S. Maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution. [Skoroxodov V.A., Chebotareva A.S. Zadacha o maksimal'nom potoke v seti s osobymi usloviyami raspredeleniya potoka]. *Diskretnyyj analiz i issledovanie operaciyj — Discrete Analysis and Operations Research*, 2015, vol. 22, no. 3, pp. 55–74.

Скороходов Владимир Александрович, д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: pdvaskor@yandex.ru
Тел.: +7(863)297–51–11

Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich, Professor of Department of algebra and discrete mathematics of Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: pdvaskor@yandex.ru
Tel.: +7(863)297–51–11

Абдулрахман Хайдар, аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: aveilazutrum4@yandex.ru
Тел.: +7(863)297–51–11

Abdulrahman Haidar, postgraduate student, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: aveilazutrum4@yandex.ru
Tel.: +7(863)297–51–11