В.Б.Дыбин, А.В.Козак

Дискретные свертки

Глава 0. Введение в предмет.

Резюме. В этой вводной главе мы демонстрируем появление сверток числовых векторов и последовательностей в процессе стандартных процедур умножения многочленов и степенных рядов. После этого обсуждаются простейшие уравнения в свертках и классические методы их решения путем сведения их к соответствующим функциональным уравнениям. В качестве примера изучается возвратное уравнение, решением которого является известная последовательность Фибоначчи.

0.1. Как появляются дискретные свертки.

Вначале рассмотрим два многочлена

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n} p_k z^k, \quad q(z)=\sum_{j=0}^{m} q_j z^j, \quad p_k, q_j \in C,$$

и выразим коэффициенты многочлена $h(z)=p(z)q(z)$ через коэффициенты многочленов $p(z)$ и $q(z)$,

$$h(z)=\left(\sum_{k=0}^{n} p_k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{m} q_j z^j\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} p_k q_j\right) z^{k+j}=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{k+j=s} p_k q_j\right) z^s=\sum_{s=0}^{m+n} h_s z^s.$$

Откуда следует, что

$$h_s=\sum_{k+j=s} p_k q_j=\sum_{j=0}^{m} p_{s-j} q_j, \quad s\in\overline{0,n+m}, \qquad (0.1)$$

Вектор $h=\left(h_s\right)_{s=0}^{n+m}$, где h_s имеет вид (0.1), называется сверткой векторов $p=\left(p_k\right)_{k=0}^{n}$ и $q=\left(q_j\right)_{j=0}^{m}$ и обозначается $h=p*q$. В формуле (0.1) предполагается, что $p_k=0$, если $k<0$ и $k>n$.

Теперь рассмотрим два ряда Маклорена

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \text{ и } g(z)=\sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j, \; f_k, g_j\in C,$$

абсолютно и равномерно сходящиеся в круге $D_1=\left\{z\,\middle|\,|z|\le 1\right\}$. Так как на $\Gamma_1=\left\{z\,\middle|\,|z|=1\right\}$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}|f_k||z|^k=\sum_{k=0}^{\infty}|f_k|<\infty, \qquad \left|\sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j\right|\le\sum_{j=0}^{\infty}|g_j|<\infty,$$

последовательности $f=\left\{f_k\right\}_{k=0}^{\infty}$, $g=\left\{g_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ суммируемы. Далее рассмотрим ряд Маклорена $h(z)$, равный произведению рядов $f(z)$ и $g(z)$,

$$h(z)=\sum_{s=0}^{\infty}h_s z^s = f(z)g(z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_k g_j\right) z^{k+j}=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{k+j=s} f_k g_j\right) z^s = \;=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_{s-j} g_j\right) z^s .$$

Откуда получаем, что

$$h_s=\sum_{j=0}^{\infty} f_{s-j}g_j,\ \ s\in\overline{0,\infty}. \tag{0.2}$$

Последовательность $h=\left\{h_s\right\}_{s=0}^{\infty}$, где h_s имеет вид (0.2), называется сверткой последовательностей $f=\left\{f_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ и $g=\left\{g_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ и также обозначается $h=f*g$. В формуле (0.2) предполагается, что $f_k=0$, если $k<0$. Отложим на некоторое время вопрос о корректности преобразований, приводящих к формуле (0.2), и рассмотрим простейшие уравнения типа свертки.

0.2. Простейшие уравнения в свертках.

Простейшее уравнение типа свертки имеет вид

$$p*\xi=h, \tag{0.3}$$

где $p=\left(p_o,p_1,...,p_n\right)$ и $h=\left(h_0,h_1,...,h_{m+n}\right)$ - известные, а $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\right)$- неизвестный комплексные векторы. Воспользовавшись формулой (0.1), получаем, что уравнение (0.3) есть ни что иное, как система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{m} p_{s-j}\ \xi_j=h_s,\ \ s\in\overline{0,m+n}, \tag{0.4}$$

с матрицей $\mathrm{T}=\left(p_{s-j}\right)$ размера $(m+n+1)\times(m+1)$, которая называется ленточной матрицей и имеет вид

$$T=\begin{pmatrix} p_0 & 0 & . & . & 0 & 0\\ p_1 & p_0 & . & . & 0 & 0\\ . & p_1 & . & . & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ p_n & . & . & . & p_0 & 0\\ 0 & p_n & . & . & p_1 & p_0\\ 0 & 0 & . & . & . & p_1\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & p_n & .\\ 0 & 0 & . & . & 0 & p_n \end{pmatrix}. \tag{0.5}$$

Эта матрица имеет $n+1$ диагональ длины $m+1$, состоящую из одинаковых элементов $p_0, p_1, ..., p_n$ соответственно. Остальные элементы матрицы T равны нулю. Конечно, для решения системы уравнений (0.4) можно применять стандартные методы. Однако сразу отметим, что она всегда является переопределенной, то есть число ее уравнений больше числа неизвестных, и для произвольной правой части $h \in C^{n+m+1}$ несовместной. Применим для решения системы уравнений (0.4) метод, который напрашивается в связи со способом получения этой системы в предыдущем разделе. Он состоит в сведении системы уравнений к некоторому функциональному уравнению. В дальнейшем мы будем называть этот метод «классическим». Обе части уравнения системы с номером s умножим на z^s и после этого просуммируем полученные $m+n+1$ уравнения, считая, что $p_k = 0$, если $k < 0$ и $k > n$,

$$\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{j=0}^{m} p_{s-j}\xi_j\right) z^s = \sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{j=0}^{m} p_{s-j} z^{s-j}\xi_j z^j\right) = \sum_{j=0}^{m}\xi_j z^j \sum_{s=0}^{n+m} p_{s-j} z^{s-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\xi_j z^j \sum_{k=-j}^{n+m-j} p_k z^k = \sum_{j=0}^{m}\xi_j z^j \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = p(z)\xi(z) = \sum_{s=0}^{n+m} h_s z^s = h(z).$$

В результате приходим к уравнению

$$p(z)\xi(z) = h(z)\ , \tag{0.6}$$

где $p(z) \in C_m[z]$, $h(z) \in C_{n+m}[z]$ – известные, а $\xi(z) \in C_n[z]$ - неизвестный многочлены. Очевидно уравнение (0.6) разрешимо для тех и только тех многочленов $h(z)$, которые делятся на $p(z)$. Эквивалентные требования можно описать в терминах корней многочлена $p(z)$.

Пусть $p(z) = p_m \prod_{k=1}^{s}(z - z_k)^{m_k}$, $\sum_{k=1}^{s} m_k = m$,- каноническое разложение многочлена $p(z)$. Для того чтобы $p|h$, необходимо и достаточно, чтобы все корни z_k многочлена $p(z)$ были корнями $h(z)$ кратностей не менее m_k. Это требование равносильно выполнению m условий

$$h^{(j)}(z_k) = 0,\ \ j \in \overline{0, m_k - 1},\ \ k \in \overline{1, s}. \tag{0.7}$$

Если условия (0.7) выполнены, многочлен $p(z)$ делит многочлен $h(z)$. Поэтому единственное решение $\xi(z)$ уравнения (0.6) имеет вид

$$\xi(z) = \frac{h(z)}{p(z)}, \tag{0.8}$$

а вектор $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ коэффициентов многочлена $\xi(z)$ является решением уравнений (0.3) и (0.4).

Замечание 0.1. Несмотря на то, что с вычислительной точки зрения этот метод является более сложным для решения системы уравнений (0.4), так как он опирается на задачу нахождения всех корней многочлена, с теоретической точки зрения он обладает большими перспективами.

Вернемся к уравнению (0.6) и заметим, что оно разрешимо для любых многочленов $h(z) \in C[\mathrm{z}]$ и имеет единственное решение вида (0.8), но в классе мероморфных функций. Теперь уравнение (0.6) порождается уже бесконечной системой линейных алгебраических уравнений типа свертки вида

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{s-j}\xi_j = h_s, \ s = 0,1,\ldots \tag{0.9}$$

с бесконечной ленточной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & . & . & . \\ p_1 & p_0 & 0 & . & . & . \\ . & p_1 & p_0 & . & . & . \\ . & . & p_1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ p_n & . & . & . & . & . \\ 0 & p_n & . & . & . & . \\ 0 & 0 & p_n & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \tag{0.10}$$

а последовательность $\{h_s\}$ ее правых частей является финитной: $h_s = 0$, если $s > deg\, h(z)$. Поскольку система уравнений (0.9) эквивалентна уравнению (0.6), ее решение может быть получено стандартными алгебраическими методами. Вначале осуществляем деление многочлена $h(z)$ на многочлен $p(z)$ с остатком

$$h(z) = q(z)\,p(z) + r(z), \text{ где } \quad deg\, r(z) < m. \tag{0.11}$$

После этого решаем задачу разложения правильной дроби $\frac{r(z)}{p(z)}$ на простейшие

$$\frac{r(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{a_{kj}}{(z - z_k)^j} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{b_{kj}}{(1 - z_k^{-1}z)^j}\ . \tag{0.12}$$

Из формул (0.8), (0.11) и (0.12) получаем, что

$$\xi(z)=q(z)+\frac{r(z)}{p(z)}=\sum_{l=0}^{M-m}q_l z^l+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{b_{kj}}{\left(1-z_k^{-1}z\right)^j}, \tag{0.13}$$

где $M=deg\,h(z)$. Откуда следует, что решение $\xi=\left\{\xi_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ системы уравнений (0.9) имеет вид

$$\xi=q+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}b_{kj}u_{kj}, \tag{0.14}$$

где $q=\left\{q_0,q_1,\ldots,q_{M-n},0,\ldots\right\}$, $u_{kj}=u_k*u_k*\ldots*u_k$ - j – кратная свертка последовательности $u_k=\left\{z_k^{-n}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Пока мы отложим вопрос об описании пространства последовательностей, которому принадлежат решения вида (0.14) системы уравнений (0.9), заметив только, что это пространство связано с корнями z_k многочлена $p(z)$.

Пусть, по-прежнему, $p_k=0$, если $k<0$ и $k>n$. Системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=0}^{m+n}p_{s-j}\eta_s=d_j,\ \ j\in\overline{0,m}, \tag{0.15}$$

с матрицей

$$T^T=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & . & . & p_n & 0 & 0 & . & 0 & 0\\ 0 & p_0 & p_1 & . & . & p_n & 0 & . & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & p_0 & p_1 & . & . & p_n & 0\\ 0 & 0 & 0 & . & . & p_0 & p_1 & . & . & p_n \end{pmatrix} \tag{0.16}$$

и

$$\sum_{s=0}^{\infty}p_{s-j}\eta_s=d_j,\ \ j=0,1,\ldots, \tag{0.17}$$

с матрицей

$$T^T=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & . & . & . & p_n & 0 & 0 & .\\ 0 & p_0 & p_1 & . & . & . & p_n & 0 & .\\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & . & . & . & p_n & .\\ . & . & . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \tag{0.18}$$

транспонированные системам (0.4) и (0.9) соответственно, представляют большой интерес, прежде всего потому, что они связаны с возвратными последовательностями, имеющими разнообразные приложения. Системы уравнений вида (0.15) и (0.17) в общем случае будут изучаться ниже. Сейчас же мы рассмотрим частный, но широко известный случай системы (0.17), так называемую систему уравнений Фибоначчи

$$\xi_{n+2} = \xi_{n+1} + \xi_n, \ n = 0,1,..., \tag{0.19}$$

которой удовлетворяет знаменитая последовательность натуральных чисел, носящая имя Фибоначчи. Система уравнений (0.19) является однородной системой вида (0.17) с трехдиагональной ленточной матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{0.20}$$

Для отыскания общего решения системы уравнений (0.19) применим метод ее сведения к функциональному уравнению, который был использован выше при решении системы уравнений (0.4). Для этого уравнение с номером n системы (0.19) умножаем на z^n, а после этого все уравнения складываем.

Вводя обозначение $\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_k z^n$, получаем, что

$$\xi(z) + \left(\xi(z) - \xi_0\right) z^{-1} - \left(\xi(z) - \xi_0 - \xi_1 z\right) z^{-2} = 0$$

или после стандартных преобразований

$$\xi(z)\left(1 + z^{-1} + ^{-2}\right) = \left(\xi_0 - \xi_1\right) z^{-1} - \xi_0 z^{-2}.$$

Откуда следует, что

$$\xi(z) = \frac{\left(\xi_0 - \xi_1\right) z - \xi_0}{z^2 + z - 1}.$$

Последняя формула показывает, что решение системы уравнений Фибоначчи зависит от двух произвольных постоянных ξ_0 и ξ_1, а их фиксация приводит к существованию единственного решения.

Найдем общий вид решения $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения (0.19). Легко проверить, что

$$z^2 + z - 1 = \left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right), \text{ где } z_1 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}, \ z_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Поэтому

$$\xi(z) = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} = \frac{\left(A + B\right) z - A z_2 - B z_1}{z^2 + z - 1} = \frac{\left(\xi_0 - \xi_1\right) z - \xi_0}{z^2 + z - 1}. \tag{0.21}$$

Откуда получаем, что неизвестные постоянные *A* и *B* удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A+B=\xi_0-\xi_1, \\ Az_2+Bz_1=\xi_0, \end{cases}$$

единственное решение которой имеет вид

$$A=\frac{\xi_0\left(z_1-1\right)-\xi_1 z_1}{z_1-z_2},\ \ B=\frac{\xi_0\left(z_2-1\right)-\xi_1 z_2}{z_2-z_1}.$$

Подставляя сюда значения z_1 и z_2, получаем, что

$$A=\frac{2\xi_0+\left(\xi_0-\xi_1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\sqrt{5}},\ \ B=\frac{\left(\xi_0-\xi_1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)-2\xi_0}{2\sqrt{5}}.$$

Возвращаясь к равенству (0.21), видим, что

$$\xi\left(z\right)=\frac{-A\alpha}{1-z\alpha}+\frac{-B\beta}{1-z\beta},\ \text{где}\ \ \alpha=z_1^{-1}=-z_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=z_2^{-1}=-z_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому функцию $\xi\left(z\right)$ можно представить степенным рядом

$$\xi\left(z\right)=-A\alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k z^k\right)-B\beta\left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k z^k\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(A\alpha^{k+1}+B\beta^{k+1}\right)z^k.$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно в любом круге $\overline{D_\rho}=\left\{z\in C\,\middle|\,|z|\le\rho\right\}$, где $\rho<|z_2|$, так как $|z\alpha|<1,\ |z\beta|<\ \Rightarrow\ |z|<\left|\alpha^{-1}\right|=|z_1|$, $|z|<\left|\beta^{-1}\right|=|z_2|\ \Rightarrow\ |z|<|z_2|$.

Окончательно получаем, что общее решение системы уравнений Фибоначчи имеет вид

$$\xi_n=-A\alpha^{n+1}-B\beta^{n+1}=-A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

где

$$A=\frac{\left(\xi_0-\xi_1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)+2\xi_0}{2\sqrt{5}},\ \ B=\frac{\left(\xi_0-\xi_1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)-2\xi_0}{2\sqrt{5}},\ \ n=0,1,2,\ldots\ .$$

Последовательность Фибоначчи получается из этих формул при условии $\xi_0=\xi_1=1$. Действительно, в этом случае $A=-B=\frac{1}{\sqrt{5}}$ и поэтому,

$$\xi_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ n=0,1,2,\ldots\ . \qquad (0.22)$$

Формулы (0.22) называются формулами Бине. Нетрудно проверить, что при подстановке значений $n=0,1,2,...$ мы получим последовательность Фибоначчи

$$\mathbf{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ldots} \quad . \tag{0.23}$$

0.3. Матрицы Теплица и связанные с ними системы линейных алгебраических уравнений.

Матрица $T_n \in M_{n+1}(C)$,

$$T_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & . & . & . & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & . & . & . & a_{-n+1} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . & a_{-1} \\ a_n & a_{n-1} & . & . & . & a_0 \end{pmatrix} \tag{0.24}$$

называется конечной матрицей Теплица порядка n+1. Следующие бесконечные матрицы, являющиеся расширениями матрицы T_n, также называются матрицами Теплица,

$$T = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & . \\ . & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & . \\ . & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & . \\ . & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \tag{0.25}$$

$$W = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & . & . & . & a_{-n} & . \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & . & . & . & a_{-n+1} & . \\ a_2 & a_1 & a_0 & . & . & . & a_{-n+2} & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . & a_0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{0.26}$$

Отметим, что матрица W является правой нижней четвертью матрицы T.

Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с матрицами T и W соответственно имеют вид

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} f_j = g_n, \ n \in Z, \tag{0.27}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} f_j = g_n, \ n = 0,1,2,.... \tag{0.28}$$

Несмотря на то, что система уравнений (0.28) на первый взгляд представляется более простой, чем система (0.27), ее решение является более сложным. Для того чтобы продемонстрировать это, применим к обеим системам классический метод. В случае системы (0.27) мы умножаем уравнение с номером n на z^n, после этого суммируем все полученные уравнения по $n \in Z$. Меняя порядок суммирования в двойной сумме и проводя замену переменных $k = n - j$, получаем, что

$$\sum_{n \in Z} z^n \sum_{j \in Z} a_{n-j} f_j = \sum_{j \in Z} f_j z^j \sum_{n \in Z} a_{n-j} z^{n-j} = \left(\sum_{k \in Z} a_k z^k \right) \left(\sum_{j \in Z} f_j z^j \right) = \sum_{n \in Z} g_n z^n .$$

То есть формально мы приходим к функциональному уравнению

$$a(z) f(z) = g(z), \tag{0.29}$$

на множестве рядов Лорана, поскольку

$$a(z) = \sum_{k \in Z} a_k z^k , \quad f(z) = \sum_{j \in Z} f_j z^j , \quad g(z) = \sum_{n \in Z} g_n z^n .$$

Аналогичная процедура в случае системы (0.28) приводит к функциональному уравнению, в котором вместо одной неизвестной функции появляются две,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} f_j = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-j} z^{n-j} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} f_j \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n .$$

Получаемое при этом функциональное уравнение принимает вид

$$a(z) f^+(z) + f^-(z) = g^+(z), \tag{0.30}$$

где

$$a(z) = \sum_{j \in Z} a_j z^j , \quad g^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

известные функции, а

$$f^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j , \quad f^-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} f_j \right) z^n$$

неизвестные функции. Функциональное уравнение (0.30) обычно называется либо краевой задачей Римана, либо задачей линейного сопряжения.

В последующих главах разрабатываются современные методы исследования уравнений дискретной свертки, опирающиеся на общую теорию линейных операторов и теорию коммутативных банаховых алгебр. В то же время мы отмечаем, что в частных ситуациях классический метод действует весьма эффективно, и ниже будем часто к нему прибегать.

Глава 1. Оператор свертки. Обратимость.

Резюме. В этой главе после изложения ряда основных положений теории линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве и коммутативных банаховых алгебр мы изучаем алгебры операторов дискретной свертки, действующих в пространствах суммируемых последовательностей и в пространствах последовательностей, суммируемых с показательными весами. Алгебрами символов операторов свертки, в терминах которых даются критерии их обратимости, являются классическая алгебра Винера и ее аналог, состоящий из функций, аналитических в кольце.

1.1.Проекторы и их свойства.

Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства. Банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, определенных на X и действующих в Y, обозначим через L(X,Y). Пространство L(X,X) обозначим через L(X). Норма в L(X,Y) вводится как норма оператора: если $A\in$ L(X,Y), то

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|. \qquad (1.1)$$

Каждому оператору $A\in$ L(X,Y) сопоставляются два линеала: $KerA(\subset X)$ - множество всех решений однородного уравнения $Ax=0,$ называемое *ядром* оператора A, и $Im\,A(\subset Y)$ - множество значений оператора A, называемое *образом* оператора A. Наряду с символом $Im\,A$ мы будем употреблять обозначение $A(X)$. Линеал $KerA$ замкнут в X, $KerA=\overline{KerA}$, то есть $KerA$ образует в X подпространство. Линеал $Im\,A$ может быть незамкнутым в Y, $Im\,A\ne\overline{Im\,A}$. Если же $Im\,A$ замкнут в Y, оператор A называется *нормально разрешимым.* Множество значений оператора A на подмножестве $X_1\subset X$, будем обозначать $A(X_1)$.

Оператор $P\in L$(X), удовлетворяющий условию $P^2=P$, называется *проектором*. Рассмотрим основные свойства проекторов.

1*) Оператор* $Q=I-P$, *где* I - *единичный оператор, является проектором и называется проектором, дополнительным к проектору* P .

◀ Действительно, $Q^2=(I-P)^2=I-2P+P^2=I-P=Q$.▶

2*) Оператор* P *является проектором, дополнительным к проектору* Q .⊗

3) *Взаимно дополнительные проекторы* P *и* Q *ортогональны, то есть* $PQ=QP=0$.⊗

4) *Для того, чтобы* $x\in Im\,P$, *необходимо и достаточно, чтобы* $x=Px$.

◀ Необходимость. Пусть $x\in Im\,P$. Тогда $x=Px_1$, где $x_1\in X$. Поэтому $Px=P^2x_1=Px_1=x$. Достаточность очевидна.▶

5) $Im\,P=KerQ$.

◄ Требование $x \in KerQ$ равносильно выполнению равенства $(I-P)x=0$, то есть $x=Px$. Последнее, в свою очередь, равносильно выполнению условия $x \in Im\,P$.►

6*) Линеал* $P(X)=Im\,P$ *замкнут в X и, следовательно, является подпространством пространства X.*

◄ Так как ядро линейного непрерывного оператора всегда является замкнутым множеством, доказываемое утверждение является следствием свойства 5).►

Свойства 4)-6) очевидным образом переформулируются для проектора Q.

7) *Пространство X представимо в виде прямой суммы своих подпространств* $P(X)$ *и* $Q(X)$, $X=P(X)\oplus Q(X)$.

◄ Нужно доказать, что любой вектор $x \in X$ единственным образом представим в виде $x=x'+x''$, где $x' \in P(X)$, $x'' \in Q(X)$.

Прежде всего, отметим, что $P(X)\cap Q(X)=\{0\}$. Действительно, если $x \in P(X)$ и $x \in Q(X)$, то в силу свойства 4) $x=Px=Qx$. Подействовав на это равенство проектором P, получим в силу свойства 3), что $x=Px=PQx=0$. Далее, так как $I=P+Q$, произвольный вектор $x \in X$ представим в виде $x=Px+Qx$, где $Px \in P(X)$, $Qx \in Q(X)$. Остается показать единственность этого представления. В самом деле, если $x=x'+x''$, где $x' \in P(X)$, $x'' \in Q(X)$, тогда $Px+Qx=x'+x''$. Поэтому $Px-x'=x''-Qx \in P(X)\cap Q(X)$. Откуда получаем, что $Px-x'=x''-Qx=0$, то есть $x'=Px$, $x''=Qx$. ►

Последнее свойство допускает обращение.

8*) Пусть* X_1, X_2 *- подпространства* X *и* $X=X_1+X_2$. *Тогда оператор* P, *определяемый равенством* $Px=x_1$ $(x \in X \Rightarrow x=x_1+x_2, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2)$, *является проектором в пространстве* X. *При этом* $Im\,P=X_1, KerP=X_2$.

◄ В доказательстве нуждается лишь проверка ограниченности оператора P. В пространстве X введем новую норму

$$\|x\|_1=\|x_1\|+\|x_2\|$$

и обозначим его после этого $\tilde{X}$. Норма $\|\ \|_1$ является более сильной, чем исходная норма $\|\ \|$ в пространстве X, так как

$$\|x\|=\|x_1+x_2\| \le \|x_1\|+\|x_2\|=\|x\|_1.$$

Покажем, что пространство $\tilde{X}$ полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n=x'_n+x''_n$, где $x'_n \in X_1, x''_n \in X_2$, фундаментальна в $\tilde{X}$. Тогда последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ фундаментальны в X. В силу полноты пространства X эти последовательности имеют в X пределы соответственно x'_0 и x''_0. Более того, так как $\{x'_n\}\subset X_1, \{x''_n\}\subset X_2$, то

$x_0' \in X_1$, $x_0'' \in X_2$. Но тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится в $\tilde{X}$ к элементу $x_0 = x_0' + x_0''$, так как

$$\|x_n - x_0\|_1 = \|x_n' - x_0'\| + \|x_n'' - x_0''\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку $\|x\| \le \|x\|_1$, то тождественный оператор I непрерывно и взаимно-однозначно отображает банахово пространство $\tilde{X}$ на банахово пространство X. По теореме Банаха об обратном операторе ([14], стр.225, теорема 3) обратный оператор, который в этом случае совпадает с оператором I, является ограниченным, то есть $\|x\|_1 \le c\|x\|$. Но тогда

$$\|Px\| = \|x_1\| \le \|x\|_1 \le c\|x\|,$$

то есть оператор P ограничен.►

В этом случае говорят, что оператор P проектирует пространство X на подпространство X_1 параллельно подпространству X_2. Очевидно, оператор $Q = I - P$, действующий по формуле $Qx = x_2$, является оператором, проектирующим X на X_2 параллельно X_1. Из свойств 5), 7) следует, что любой проектор P имеет такую структуру, то есть является оператором, проектирующим пространство X на подпространство $Im\,P$ параллельно подпространству $KerP$.

9) $\|P\| \ge 1$.

◄ Возьмем произвольный ненулевой элемент x такой, что $x = Px$. Пронормировав его, получим, что для $\tilde{x} = \dfrac{x}{\|x\|}$ $P\tilde{x} = \tilde{x}$ и $\|\tilde{x}\| = 1$. Но тогда

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Px\| \ge \|P\tilde{x}\| = 1. \text{ ►}$$

Пример 1.1. В пространстве C^n примером проектора является оператор P_k, действующий по правилу, если

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\tau \in C^n, \; P_k x = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)^\tau, k \in \overline{1, n-1}.$$

Ему дополнительный проектор $Q_k = I - P_k$ определен формулой

$$Q_k x = (0, \dots, 0, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)^\tau.$$

Пример 1.2. Пусть $l_p(Z), 1 \le p < \infty,-$ банахово пространство комплексных последовательностей $x = \{\xi_n\}_{n \in Z}$, абсолютно суммируемых в степени p, с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2}$$

а $l_\infty(Z) -$ банахово пространство ограниченных последовательностей с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in Z} |\xi_n|. \tag{1.3}$$

В пространстве $l_p(Z), 1 \le p \le \infty$, примером проектора является оператор P_+, действующий по правилу

$$\left(P_+ x\right)_n = \begin{cases} \xi_n, n \ge 0, \\ 0, n < 0, \end{cases} \quad n \in Z.$$

Ему дополнительный проектор $P_- = I - P_+$ определен формулой

$$\left(P_- x\right)_n = \begin{cases} 0, n \ge 0, \\ \xi_n, n < 0, \end{cases} \quad n \in Z.$$

Полагая $sign 0 = 1$, можно для определения проекторов $P_\pm$ использовать сокращенную формулу

$$\left(P_\pm x\right)_n = \left\{ \frac{1}{2}\left(1 \pm sign \;\; n\right)\xi_n \right\}_{n \in Z}. \qquad (1.4)$$

1.2. Алгебры $l_1(Z)$ и $W(\Gamma_1)$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ над полем C называется *банаховой алгеброй* или нормированным кольцом, если в $\mathfrak{A}$ введена норма $\| \; \|$, относительно которой:

1) $\mathfrak{A}$ - комплексное банахово пространство;

2) для любых элементов $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$

$$\|a_1 a_2\| \le \|a_1\| \|a_2\|.$$

Если дополнительно в $\mathfrak{A}$ есть единица e и

3) $\|e\| = 1$,

то $\mathfrak{A}$ называется банаховой алгеброй с единицей.

Банахова алгебра с коммутативной операцией умножения называется *коммутативной банаховой алгеброй* или коммутативным нормированным кольцом.

Пусть $\mathfrak{A}$ - банахова алгебра. Непустое подмножество $\mathfrak{A}'$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ называется ее *подалгеброй*, если оно является подпространством банахова пространства $\mathfrak{A}$ и замкнуто относительно умножения элементов. Очевидно, любая подалгебра $\mathfrak{A}'$ является банаховой алгеброй относительно операций и нормы, введенных в $\mathfrak{A}$.

Основные алгебры, с которыми мы будем в дальнейшем сталкиваться, будут содержать единицу. Кроме того, любую алгебру $\mathfrak{A}$ без единицы можно рассматривать как подалгебру некоторой алгебры $\mathfrak{A}_1$, которая получена из алгебры $\mathfrak{A}$ с помощью специальной процедуры, называемой присоединением единицы ([15], стр.11). В связи с этим, в дальнейшем при рассмотрении конкретных алгебр мы не будем всякий раз специально касаться вопроса о единице, обычно легко разрешаемого в контексте.

Две коммутативные банаховы алгебры: $\mathfrak{A}$ с нормой $\| \; \|_1$ и $\mathfrak{B}$ с нормой $\| \; \|_2$ - называются *изометрически изоморфными* (обозначается $\mathfrak{A} \doteq \mathfrak{B}$), если существует биекция

J: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, сохраняющая операции сложения и умножения элементов, операцию умножения элемента на скаляр и норму, то есть для любых элементов $a, a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ и любого скаляра $\alpha \in C$ выполняются требования:

$$1)\ J(a_1 + a_2) = J(a_1) + J(a_2),\ 2)\ J(a_1 a_2) = J(a_1) J(a_2),\ 3)\ J(\lambda a_1) = \lambda J(a_1),$$
$$4)\ \|J(a)\|_2 = \|a\|_1.$$

Если при выполнении условий 1)-3) условие 4) не выполняется, будем говорить, что алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *алгебраически изоморфны.*

Прежде чем переходить к примерам сформулируем следующее полезное в дальнейшем вспомогательное утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ - коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{B}$ – множество с операциями (внутренними законами композиции) сложения и умножения элементов, внешней операцией (внешним законом композиции) умножения элементов на комплексные числа и нормой. Если существует биекция J: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, сохраняющая операции и норму, тогда $\mathfrak{B}$ – коммутативная банахова алгебра, изометрически изоморфная алгебре $\mathfrak{A}$.* $\otimes$

Свойство, описываемое предложением 1.1, в дальнейшем будем называть свойством *сохранения структуры коммутативной банаховой алгебры*.

Переходя к основным примерам изучаемых ниже коммутативных банаховых алгебр, рассмотрим банахово пространство $l_1(Z)$**,** норма в котором определена равенством (1.2). Пусть $x = \{\xi_n\}_{n\in Z}$, $y = \{\eta_n\}_{n \in Z} \in l_1(Z)$**.** Тогда по формуле (0.28) свертка последовательностей x и y

$$h = x * y = \{\zeta_n\}_{n\in Z},\ \text{где}\ \zeta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k}\eta_k,\ n \in Z.$$

Пространство $l_1(Z)$ с операцией свертки в качестве внутреннего умножения является коммутативной банаховой алгеброй. Действительно,

$$\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k}\eta_k \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_{n-k}||\eta_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_{n-k}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\eta_k| \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\xi_j| =$$
$$= \|x\|_1 \|y\|_1.$$

Законность перемены порядка суммирования вытекает из классической теоремы анализа о повторных рядах ([ ], стр.334). На последнем шаге во внутренней сумме сделана замена переменной $j = n - k$. Проведенная выкладка подтверждает корректность операции свертки на пространстве $l_1(Z)$ ($x * y \in l_1(Z)$, если $x, y \in l_1(Z)$) и справедливость аксиомы 2) для коммутативных банаховых алгебр. Проверка аксиом коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и однородности свертки по каждому сомножителю опускается ввиду ее элементарности. Остается заметить, что единицей по операции свертки является последовательность

$$e=\left\{\delta_{0n}\right\}_{n\in Z}=\begin{cases}1, & \text{åñëè} \quad n=0,\\ 0, & \text{åñëè} \quad n\neq 0.\end{cases}$$

В дальнейшем любую алгебру, у которой в качестве внутреннего умножения используется операция свертки, мы будем называть *сверточной*.

Из свойства проекторов 6) следует, что $l_{1\pm}(Z)=P_{\pm}\left(l_1(Z)\right)$ - подпространства в $l_1(Z)$. Эти подпространства замкнуты относительно операции свертки и, следовательно, являются подалгебрами в $l_1(Z)$. Действительно, пусть, например, $x_+=P_+x,\ y_+=P_+y$. Тогда

$$x_+ * y_+=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}\xi_{n-k}\eta_k, & n\geq 0,\\ 0, & n<0\end{cases}\in\ l_{1+}(Z). \tag{1.4.1}$$

Аналогично

$$x_- * y_-=\begin{cases}0, & n\geq 0,\\ \sum\limits_{k=n}^{-1}\xi_{n-k}\eta_k, & n<0\end{cases}\in\ l_{1-}(Z). \tag{1.4.2}$$

С алгеброй $l_1(Z)$ тесно связана алгебра Винера $W\left(\Gamma_1\right)$. Пусть $\Gamma_1=\left\{z\in C\,\middle|\ |z|=1\right\}$ - окружность на комплексной плоскости. Через $W\left(\Gamma_1\right)$ обозначим множество всех комплекснозначных функций $\varphi(z)$, представимых на Γ_1 в виде абсолютно сходящегося ряда Фурье,

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n z^n,\ \ z\in\Gamma_1. \tag{1.5}$$

Замена переменной $z=e^{i\theta}$ приводит указанный ряд к стандартной комплексной форме

$$\varphi\left(e^{i\theta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n e^{in\theta},\ 0\leq\theta<2\pi.$$

Из оценки

$$\left|\varphi(z)\right|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n z^n\right|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\varphi_n\right|<\infty,\ \ z\in\Gamma_1,$$

следует, что функция $\varphi(z)$ определена в каждой точке $z\in\Gamma_1$ и является равномерно ограниченной, а потому и интегрируемой на Γ_1. Числа φ_n носят название комплексных коэффициентов Фурье функции $\varphi(z)$ и однозначно определяются по формулам ([16], стр.19)

$$\varphi_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\varphi(z)\ z^{-n-1}dz,\ \ n\in Z. \tag{1.6}$$

Две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из $W(\Gamma_1)$ равны ($\varphi(z)=\psi(z)$ для любого $z\in\Gamma_1$) тогда и только тогда, когда совпадают их коэффициенты Фурье, $\varphi_n=\psi_n$, $n\in Z$.

Пусть $\varphi(z)\in W(\Gamma_1)$. Тогда ее коэффициенты Фурье порождают последовательность $\varphi=\{\varphi_n\}\in l_1(Z)$. С другой стороны, произвольная последовательность $\varphi=\{\varphi_n\}\in l_1(Z)$ является последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции из $W(\Gamma_1)$, именно функции $\varphi(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n z^n$. Откуда следует, что отображение

$$L_z : l_1(Z)\to W(\Gamma_1),\ L_z(\varphi)=\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n z^n\,, \qquad (1.7)$$

является биекцией. Это отображение называется *преобразованием Лорана.* Ему обратное преобразование L_z^{-1} определяется следующим образом,

$$L_z^{-1}(\varphi(z)) = \varphi=\{\varphi_n\}_{n\in Z}\,, \qquad (1.8)$$

где φ_n имеет вид (1.6).

Множество $W(\Gamma_1)$ замкнуто относительно операций поточечного сложения функций и умножения функции на скаляр. Кроме того, $W(\Gamma_1)$ замкнуто относительно операции поточечного умножения функций. Действительно, пусть $\varphi(z)$, $\psi(z)\in W(\Gamma_1)$. Пользуясь правилами перемножения абсолютно сходящихся рядов, получаем, что

$$\varphi(z)\,\psi(z)=\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\varphi_j z^j\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_k z^k\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n}\varphi_j\psi_k\right)z^n=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_{n-k}\psi_k\right)z^n\in W(\Gamma_1),$$

так как

$$\varphi*\psi \;=\; \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_{n-k}\psi_k\right\}_{n\in Z}\in l_1(Z).$$

Вводя в $W(\Gamma_1)$ норму

$$\|\varphi(z)\|=\|\varphi\|_1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi_n|$$

и замечая, что преобразование Лорана сохраняет в $W(\Gamma_1)$ операции и норму, получаем в силу свойства сохранения структуры коммутативной банаховой алгебры (предложение 1.1), что $W(\Gamma_1)$ является алгеброй, изометрически изоморфной алгебре $l_1(Z)$. Заметим, что алгебра $W(\Gamma_1)$ состоит из непрерывных функций, так как сумма абсолютно сходящегося ряда вида (1.5) является непрерывной на Γ_1 ([ ], стр.).

Проекторы $P_{\pm}$ вида (1.4) индуцируют в алгебре $W(\Gamma_1)$ проекторы $P^{\pm}$, действующие по формулам

$$\left(P^{+}\varphi\right)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n,\ \left(P^{-}\varphi\right)(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\varphi_n z^n. \qquad (1.9)$$

Тогда $W^{+}(\Gamma_1)=P^{+}\left(W(\Gamma_1)\right)$, $W_0^{-}(\Gamma_1)=P^{-}\left(W(\Gamma_1)\right)$- подалгебры в алгебре $W(\Gamma_1)$, обладающие свойством

$$W^{+}(\Gamma_1)\oplus W_0^{-}(\Gamma_1)=W(\Gamma_1)\ ,$$

а $W^{+}(\Gamma_1)$ и $W^{-}(\Gamma_1)=W_0^{-}(\Gamma_1)+C$ - подалгебры в алгебре $W(\Gamma_1)$, состоящие соответственно из функций вида

$$\varphi^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n \qquad \text{и} \qquad \varphi^{-}(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}\varphi_n z^n$$

и обладающие свойствами

$$W^{+}(\Gamma_1)+W^{-}(\Gamma_1)=W(\Gamma_1),\ \ W^{+}(\Gamma_1)\cap W^{-}(\Gamma_1)=C\,.$$

При этом каждая из подалгебр $W^{\pm}(\Gamma_1)$ изометрически изоморфна алгебре $l_{1+}(Z)$. $\otimes$

Предложение 1.2. *Для того, чтобы функция $\varphi^{+}(z)$ ($\varphi^{-}(z)$) из алгебры $W(\Gamma_1)$ принадлежала подалгебре $W^{+}(\Gamma_1)$($W^{-}(\Gamma_1)$), необходимо и достаточно, чтобы она была аналитически продолжима в область $|z|<1$(в область $|z|>1$,включая ∞).*

◀ Так как отображение $\nu: W^{+}(\Gamma_1)\to W^{-}(\Gamma_1)$, $\nu\left(\varphi^{+}(z)\right)=\varphi^{+}\left(z^{-1}\right)$,является изометрическим изоморфизмом алгебры $W^{+}(\Gamma_1)$ на алгебру$W^{-}(\Gamma_1)$, то доказательство предложения 1.2 достаточно провести лишь в случае $W^{+}(\Gamma_1)$.

Необходимость. Пусть $\varphi^{+}(z)\in W^{+}(\Gamma_1)$, то есть $\varphi^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n z^n$ в области $|z|<1$ удовлетворяет признаку равномерно сходящегося ряда ([18], стр. 56), то в силу первой теоремы Вейерштрасса ([18], стр.191) его сумма $\varphi^{+}(z)$ является аналитической в области $|z|<1$.

Достаточность. Пусть функция $\varphi^{+}(z)\in W(\Gamma_1)$ и аналитически продолжима в область $|z|<1$, то есть функция $\varphi^{+}(z)$ аналитическая в области $|z|<1$ и непрерывная в области $|z|\le 1$. Тогда по обобщенной теореме Коши ([18], стр.165)

$$\int_{\Gamma_1}\varphi^{+}(z)z^{-n-1}dz=0,\ \ n<0,$$

то есть все коэффициенты Фурье функции $\varphi^{+}(z)$ с отрицательными номерами равны нулю. Откуда следует, что $\varphi^{+}(z) \in W^{+}(\Gamma_1)$.►

1.3. Алгебра операторов свертки $\mathfrak{W}_p$.

Пусть $a = \{a_n\}_{n \in Z}$ - фиксированная последовательность из пространства $l_1(Z)$. Рассмотрим оператор A, действующий по формуле

$$Ax = a * x. \tag{1.10}$$

Теорема 1.1. *Оператор A вида (1.10) является линейным ограниченным оператором в пространстве* $l_p(Z), 1 \le p \le \infty$. *При этом* $\|A\|_p \le \|a\|_1$.

◄ Если $a, x \in l_1(Z)$, то (см. раздел 1.2)

$$\|Ax\|_1 = \|a * x\|_1 \le \|a\|_1 \|x\|_1.$$

Предположим, что $x \in l_p(Z), 1 < p < \infty$, и покажем, что в этом случае $Ax \in l_p(Z)$. В силу теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала над пространством $l_q(Z)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ ([12], стр.260) для этого достаточно показать, что последовательность Ax порождает элемент пространства $l_q^*(Z) \cong l_p(Z)$. Действительно, пусть $x = \{\xi_k\}_{k \in Z}$ и $y = \{\eta_n\}_{n \in Z} \in l_q(Z)$. Тогда

$$\left|(Ax, y)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\xi_k}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta_n| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{n-k}||\xi_k| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta_n| \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\xi_{n-j}| =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_{n-j}||\eta_n| \le \sup_j \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_{n-j}||\eta_n|\right) \|a\|_1.$$

А так как при любом $j \in Z$ по неравенству Гельдера

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_{n-j}||\eta_n| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_{n-j}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q,$$

имеем, что

$$\left|(Ax, y)\right| \le \|a\|_1 \|x\|_p \|y\|_q.$$

При этом справедливость сделанных замен переменных и перемены порядка суммирования в двойном ряде вытекает из абсолютной суммируемости рассматриваемых рядов. Так как ([ ], стр.180-181)

$$\|Ax\|_p = \sup_{\|y\|_q = 1} \left|(Ax, y)\right|,$$

то, используя последнее неравенство, получаем, что

$$\|Ax\|_p \le \sup_{\|y\|_q=1}\left(\|a\|_1 \|x\|_p \|y\|_q\right) = \|a\|_1 \|x\|_p ,$$

то есть $Ax \in l_p(Z)$ и $\|A\|_p \le \|a\|_1$.

Если же $p = \infty$, то

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n\in Z}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\xi_k\right| \le \sup_{k\in Z}|\xi_k| \cdot \sup_{n\in Z}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{n-k}| = \|x\|_\infty \cdot \sup_{n\in Z}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j| = \|a\|_1 \|x\|_\infty ,$$

то есть и в этом случае $\|A\|_\infty \le \|a\|_1$. ▶

Замечание 1.1. Выше было показано, что $\|A\|_1 \le \|a\|_1$. Поскольку

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \ge \|Ae\|_1 = \|a\|_1 ,$$

то $\|A\|_1 = \|a\|_1$. Аналогичный факт имеет место в случае пространства $l_\infty(Z)$. Действительно, пусть последовательность $\tilde{x} = \left\{\tilde{\xi}_n\right\}_{n\in Z}$ имеет вид

$$\tilde{\xi}_n = \begin{cases} |a_{-n}|^{-1}\,\overline{a_{-n}}, & \text{åñëè } a_{-n} \ne 0, \\ 1, & \text{åñëè } a_{-n} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{x} \in l_\infty(Z)$ и $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$. Так как

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty \ge \|A\tilde{x}\|_\infty = \sup_{n\in Z}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\tilde{\xi}_k\right| \ge \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}\tilde{\xi}_k\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{-k}| = \|a\|_1 ,$$

то, принимая во внимание теорему 1.1, получаем, что $\|A\|_\infty = \|a\|_1$.

Через $\mathfrak{W}_1$ обозначим множество операторов A вида (1.10), действующих в пространстве $l_1(Z)$. В силу теоремы 1.1 $\mathfrak{W}_1 \subset L\left(l_1(Z)\right)$. Очевидно, что множество $\mathfrak{W}_1$ замкнуто относительно сложения операторов, суперпозиции операторов и умножения оператора на скаляр. Кроме того, отображение $J : l_1(Z) \to \mathfrak{W}_1$, $J(a) = A$ сохраняет указанные три операции, а ввиду замечания 1.1, и норму. Поэтому на основании предложения 1.1 $\mathfrak{W}_1$ – коммутативная банахова алгебра, изометрически изоморфная алгебре $l_1(Z)$, а, следовательно, и алгебре $W(\Gamma_1)$. Функцию $a(t) \in W(\Gamma_1)$, которая при указанном изоморфизме отвечает оператору A, будем называть его *символом*. Точнее, если $A \in \mathfrak{W}_1$ и порождается последовательностью $a = \{a_n\}_{n\in Z} \in l_1(Z)$, то символом оператора A называется функция

$$a(t) = L_t a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \in W(\Gamma_1). \tag{1.11}$$

Критерий обратимости оператора в алгебре $\mathfrak{W}_1$ опирается на классическую теорему Н.Винера ([16], стр.391).

Теорема 1.2 (Н.Винер). *Пусть* $a(t)\in W(\Gamma_1)$. *Для того, чтобы* $\left[a(t)\right]^{-1}\in W(\Gamma_1)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$a(t)\neq 0,\ t\in\Gamma_1. \tag{1.12}$$

Замечание 1.2. Проблема обратимости элемента в коммутативной банаховой алгебре решается в терминах ее максимальных идеалов.

Множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$ называется *идеалом*, если оно обладает следующими свойствами:

а) если $a\in I$ и $b\in I$, то $a+b\in I$;

б) если $a\in I$, $ca\in I$ для всех $c\in\mathfrak{A}$.

Идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ называется *собственным*, если $I\neq\mathfrak{A}$. Собственный идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом ее собственном идеале.

Элемент a коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ называется обратимым в этой алгебре, если найдется такой элемент $b\in\mathfrak{A}$, что выполняется равенство $ab=e$. В последнем случае b называется обратным элементом к элементу a и обозначается $b=a^{-1}$. Для того, чтобы элемент a алгебры $\mathfrak{A}$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни одному ее максимальному идеалу.

Любой максимальный идеал алгебры $W(\Gamma_1)$ состоит из функций $a(t)$, обращающихся в ноль в некоторой фиксированной точке z_0 окружности Γ_1 ([], §2). Так выглядит план одного из возможных доказательств теоремы Винера.

Пусть $G\mathfrak{W}_1$ – группа обратимых элементов алгебры $\mathfrak{W}_1$. Следующее предложение 1.3 вытекает из теоремы 1.2 и изоморфизма $\mathfrak{W}_1\cong W(\Gamma_1)$.

Предложение 1.3. *Пусть* $A\in\mathfrak{W}_1$ *и имеет вид (1.10) . Для того, чтобы оператор* $A\in \mathbf{G}\mathfrak{W}_1$, *необходимо и достаточно, чтобы его символ* $a(t)$ *удовлетворял условию (1.12).*

При выполнении последнего условия оператор A^{-1} *имеет вид*

$$A^{-1}x=b*x,\ \text{где}\ b(t)=\left[a(t)\right]^{-1}. \tag{1.13}$$

Через $\mathfrak{W}_p$ обозначим множество операторов A вида (1.10), действующих в пространстве $l_p(Z)$, $1\leq p\leq\infty$. В силу теоремы 1.1 $\mathfrak{W}_p\subset L(l_p(Z))$. Как и в случае $p=1$ множество $\mathfrak{W}_p$ замкнуто относительно сложения операторов, суперпозиции операторов и умножения оператора на скаляр, а отображение J: $l_1(Z)\to\mathfrak{W}_p$, $J(a)=A$ сохраняет указанные три операции. Поэтому на основании предложения 1.1 $\mathfrak{W}_p$ – коммутативная банахова алгебра, алгебраически изоморфная сверточной алгебре $l_1(Z)$ и алгебре $W(\Gamma_1)$. При $p=\infty$ в силу замечания 1.1 $\|A\|_\infty=\|a\|_1$. Поэтому алгебра $\mathfrak{W}_\infty$ как и алгебра $\mathfrak{W}_1$ изометрически изоморфна алгебре $W(\Gamma_1)$ и замкнута в $L(l_\infty(Z))$. При $1<p<\infty$ алгебра $\mathfrak{W}_p$ незамкнута в $L(l_p(Z))$. Тем не менее и в этом случае алгебра $W(\Gamma_1)$ является алгеброй символов для алгебры $\mathfrak{W}_p$, а каждый оператор $A\in\mathfrak{W}_p$ однозначно определяется своим символом $a(t)$ вида (1.11). Прежде чем перенести результат, содержащийся в предложении 1.3, на алгебру $\mathfrak{W}_p$**,** рассмотрим еще одно полезное в дальнейшем вспомогательное утверждение.

Предложение 1.4. *Пусть* $A,B,C\in L(l_p(Z))$, $1\le p<\infty$, *и на пространстве* $l_1(Z)$ *выполняется равенство* $AB=C$. *Тогда это равенство справедливо на любом пространстве* $l_p(Z)$, $1\le p<\infty$.

◄ Пространство $l_1(Z)$ плотно в пространстве $l_p(Z)$, $1<p<\infty$. Поэтому оператор $D=AB-C$, являясь линейным ограниченным оператором в пространстве $l_p(Z)$, равен нулю на плотном в пространстве $l_p(Z)$ множестве. В силу теоремы о распространении по непрерывности линейного оператора ([12], стр.245) $D=0$ на всем $l_p(Z)$, $1<p<\infty$.►

Через $G\mathfrak{W}_p$ обозначим группу обратимых операторов из алгебры $\mathfrak{W}_p$.

Теорема 1.3. . *Пусть* $A\in\mathfrak{W}_p$ **,** $1\le p\le\infty$, *и имеет вид (1.10) . Для того, чтобы оператор* $A\in G\mathfrak{W}_p$ **,** *необходимо и достаточно, чтобы его символ* $a(t)$ *удовлетворял условию (1.12). При выполнении последнего условия оператор* A^{-1} *имеет вид (1.13).*

◄ Случаи $p=1$ и $p=\infty$ рассмотрены выше (см. предложение 1.3 и замечание 1.1). Если условие (1.12) выполняется, тогда на пространстве $l_1(Z)$ справедливы равенства $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. Поэтому в силу предложения 1.4 они выполняются и на пространстве $l_p(Z)$, $1<p<\infty$. Значит, оператор $A\in G\mathfrak{W}_p$, а ему обратный оператор A^{-1} имеет вид (1.13). Остается лишь доказать необходимость условия (1.12) для обратимости оператора A.

Предположим, что $a(t_0)=\sum\limits_{n\in Z}a_nt_0^n=0,\ t_0\in\Gamma_1$, но оператор A с символом $a(t)$ обратим в $l_p(Z)$, $1<p<\infty$. По малому $\varepsilon>0$ подберем номер $N=N(\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\|a(t)-a_N(t)\right\|_{W(\Gamma_1)}<\varepsilon, \text{ где } a_N(t)=\sum_{|n|\le N}a_n\left(t^n-t_0^n\right)\in W(\Gamma_1).$$

Это можно сделать, так как

$$\left\|a(t)-a_N(t)\right\|_{W(\Gamma_1)}=\left\|\sum_{|n|>N}a_n\left(t^n-t_0^n\right)\right\|_{W(\Gamma_1)}\le 2\sum_{|n|>N}|a_n|.$$

Оператор A_N с символом $a_N(t)$ принадлежит алгебре $\mathfrak{W}_p$ и по теореме об устойчивости обратимости линейного оператора относительно малых по норме возмущений обратим ([12], стр.212), поскольку

$$\left\|A-A_N\right\|_p \le \left\|L_t^{-1}\left(a(t)\right)\right\|_1 = \left\|a(t)-a_N(t)\right\|_{W(\Gamma_1)} < \varepsilon.$$

Символ $a_N(t)$ допускает представление

$$a_N(t)=b_0(t)b_1(t),\ \text{где}\ b_0(t)=t_0-t,\ b_1(t)=\frac{a_N(t)}{t_0-t}=\sum_{0<|n|\le N} a_n\frac{t^n-t_0^n}{t_0-t}\in W(\Gamma_1),$$

так как $b_1=\{\beta_n\}_{n\in Z}=L_t^{-1}\left(b_1(t)\right)$ имеет финитный носитель, $\beta_n=0$, если $|n|>N$. Поэтому $A_N=B_0B_1$, где операторы $B_0,B_1\in\mathfrak{W}_p$ и имеют соответственно символы $b_0(t)$ è $b_1(t)$.

Так как уравнение $A_N\,x=e$ имеет единственное решение $\tilde{x}\in l_p(Z)$, $1<p<\infty$, уравнение $B_0y=e$ имеет решение $\tilde{y}=B_1\tilde{x}$, которое по теореме 1.1 принадлежит пространству $l_p(Z),\ 1<p<\infty$. Но тогда уравнение $P_+B_0P_+y=e$ имеет решение $\tilde{y}_+=P_+\tilde{y}\in P_+\left(l_p(Z)\right),\ 1<p<\infty.$ Опровергнем последнее утверждение.

В самом деле, пусть $P_+y=\left\{\frac{1}{2}\left(1+sign\ \ n\right)y_n\right\}_{n\in Z}$. Уравнение $P_+B_0P_+y=e$ при $n\ge 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & . & . & . \\ -1 & t_0 & 0 & . & . & . \\ 0 & -1 & t_0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$

Решая его, получаем, что $\tilde{y}_n=t_o^{-n-1}, n\ge 0,$ и, следовательно,

$$\tilde{y}_+=\left\{\frac{1}{2}\left(1+sign\ \ n\right)t_0^{-n-1}\right\}_{n\in Z}\notin P_+\left(l_p(Z)\right),\ 1<p<\infty.$$

Это противоречие показывает, что оператор $A\in G\,\mathfrak{W}_p$, $1<p<\infty$.▶

1.4. Пространства $\{\alpha,\beta\}_p$.

Если $\alpha\in(0,\infty)$, то весовой оператор M_α определен в пространстве $l_p(Z),\ 1\le p\le\infty$ равенством $M_\alpha\ f=\left\{\alpha^n f_n\right\}_{n\in Z}$. Его образ $M_\alpha\left(l_p(Z)\right)$ будем обозначать $\{\alpha\}_p$. Пусть $\alpha,\beta\in(0,\infty)$. Пару весовых операторов $V_{\alpha,\beta}$ и $V_{\alpha,\beta}^{-1}$ определим следующими равенствами,

$$V_{\alpha,\beta} = M_\alpha P_+ + M_\beta P_-, \quad V^{-1}_{\alpha,\beta} = V_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}. \tag{1.14}$$

Через $\{\alpha,\beta\}_p, 1 \le p \le \infty$, обозначим пространство последовательностей $f = \{f_n\}_{n\in Z}$ следующего вида

$$f = V_{\alpha,\beta}\tilde{f} = M_\alpha P_+ \tilde{f} + M_\beta P_- \tilde{f}, \text{ где } \tilde{f} \in \tilde{f} \in l_p(Z).$$

Заметим, что $\{\alpha,\alpha\}_p = \{\alpha\}_p$. Введением в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p, 1 \le p \le \infty$, нормы

$$\|f\|_{\{\alpha,\beta\}_p} = \|V_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} f\|_p = \|\tilde{f}\|_p \tag{1.15}$$

превращаем его в банахово пространство, изометрически изоморфное пространству $l_p(Z)$.

Следующее предложение содержит описание пространств, сопряженных к пространствам $\{\alpha,\beta\}_p, 1 \le p < \infty$.

Предложение 1.5. *Пусть* $\alpha,\beta \in (0,\infty)$. *Тогда* $\{\alpha,\beta\}^*_p = \{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_\infty$, *если* $p = 1$, *и* $\{\alpha,\beta\}^*_p = \{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q$, *где* $q = \dfrac{p}{p-1}$, *если* $1 < p < \infty$.

◄ Вначале положим

$$g = \{g_n\}_{n\in Z} \in \{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_\infty, \quad f = \{f_n\}_{n\in Z} \in \{\alpha,\beta\}_1.$$

Тогда функционал g, определяемый формулой

$$g(f) = \sum_{n\in Z} g_n \bar{f}, \tag{1.16}$$

где

$$\tilde{g} = \{\tilde{g}_n\}_{n\in Z} = V_{\alpha,\beta} g \in l_\infty(Z), \quad \tilde{f} = \{\tilde{f}_n\}_{n\in Z} = V_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} f \in l_1(Z),$$

содержится в пространстве $\{\alpha,\beta\}^*_1$, так как

$$|g(f)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n}\tilde{g}_n \alpha^n \bar{\tilde{f}}_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^{-n}\tilde{g}_n \beta^n \bar{\tilde{f}}_n\right| \le \sum_{n\in Z} |\tilde{g}_n| |\tilde{f}_n| \le \le \sup_{n\in Z} |\tilde{g}_n| \sum_{n\in Z} |\tilde{f}_n| =$$

$$= \|\tilde{g}\|_\infty \|\tilde{f}\|_1 = \|g\|_{\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_\infty} \|f\|_{\{\alpha,\beta\}_1}. \tag{1.17}$$

Обратно, если $g \in \{\alpha,\beta\}^*_1$, тогда $g(f) = g\left(V_{\alpha,\beta}(\tilde{f})\right) \in l_\infty(Z) = l^*_1(Z)$, так как

$$|g(f)| = \left|g\left(V_{\alpha,\beta}(\tilde{f})\right)\right| \le const \|f\|_{\{\alpha,\beta\}_1} = const \|\tilde{f}\|_1.$$

Поэтому найдется такой элемент $\tilde{g}=\{\tilde{g}_n\}_{n\in Z}\in l_\infty(Z)$, что

$$g(f)=\sum_{n\in Z}\tilde{g}_n\bar{\tilde{f}}_n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{-n}\tilde{g}_n\overline{\alpha^n\tilde{f}_n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\beta^{-n}\tilde{g}_n\overline{\beta^n\tilde{f}_n}=\sum_{n\in Z}g_n\bar{f}_n,$$

где

$$g_n=\frac{1}{2}(1+sign\,n)\alpha^{-n}\tilde{g}_n+\frac{1}{2}(1-sign\,n)\beta^{-n}\tilde{g}_n, \tag{1.18}$$

а $\{g_n\}_{n\in Z}\in\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_\infty$. Откуда следует, что $\{\alpha,\beta\}_1^*=\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_\infty$.

Если же $f\in\{\alpha,\beta\}_p$, $1<p<\infty$, $g\in\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q$, $q=\dfrac{p}{p-1}$, тогда, используя в (1.17) неравенство Гельдера, аналогичным образом доказываем, что функционал $g(f)$ вида (1.16) содержится в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p^*$, так как

$$\left|g(f)\right|\le\sum_{n\in Z}|\tilde{g}_n|\left|\tilde{f}_n\right|\le\|\tilde{g}\|_q\left\|\tilde{f}\right\|_p=\|g\|_{\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q}\|f\|_{\{\alpha,\beta\}_p}.$$

Кроме того, любой функционал $g\in\{\alpha,\beta\}_p^*$ по формуле $g(f)=g\left(V_{\alpha,\beta}\left(\tilde{f}\right)\right)$ порождает элемент пространства $l_p^*(Z)$, так как

$$\left|g(f)\right|=\left|g\left(V_{\alpha,\beta}\left(\tilde{f}\right)\right)\right|\le const\|f\|_{\{\alpha,\beta\}_p}=const\left\|\tilde{f}\right\|_1.$$

Поэтому найдется такой элемент $\tilde{g}\in l_q(Z)$, что

$$g(f)=\sum_{n\in Z}\tilde{g}_n\bar{\tilde{f}}_n=\sum_{n\in Z}g_n\bar{f}_n,$$

где g_n имеет вид (1.18), а $\{g_n\}_{n\in Z}\in\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q$. Откуда следует, что $\{\alpha,\beta\}_p^*=\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q$.►

Свертка $g*f$ последовательностей $g=\{g_n\}_{n\in Z}$ и $f=\{f_n\}_{n\in Z}$ определяется равенством

$$g*f=\left\{\sum_{j\in Z}g_{n-j}f_j\right\}_{n\in Z}.$$

Теорема 1.4. *Пусть* $\alpha,\beta\in(0,\infty)$,

$$\hat{\alpha}=\min(\alpha,\beta),\ \hat{\beta}=\max(\alpha,\beta), \tag{1.19}$$

$g\in\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\}_1$, $f\in\{\alpha,\beta\}_p$, $1\le p\le\infty$. *Тогда* $g*f\in\{\alpha,\beta\}_p$ *и*

$$\|g*f\|_{\{\alpha,\beta\}_p}\le\|g\|_{\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\}_1}\|f\|_{\{\alpha,\beta\}_p}.$$

◄ Пусть $1\le p<\infty$,

$$g=\left\{g_n\right\}_{n\in Z}\in\left\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right\}_1,\ \ f=\left\{f_n\right\}_{n\in Z}\in\left\{\alpha,\beta\right\}_p,\quad \tilde{g}=V^{-1}_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}g=\left\{\tilde{g}_n\right\}_{n\in Z}\in l_1(Z),$$
$$\tilde{f}=V^{-1}_{\alpha,\beta}f=\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n\in Z}\in l_p(Z).$$

Так же как и при доказательстве теоремы 1.1 оценим норму Рисса свертки $g*f$,

$$\left\|g*f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_p}=\sup_{\|h\|_{\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_q}\le 1}\left|\left(h,g*f\right)\right|,\tag{1.20}$$

где

$h=\left\{h_n\right\}_{n\in Z}\in\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_q$, $\tilde{h}=V_{\alpha,\beta}h=\left\{\tilde{h}_n\right\}_{n\in Z}\in l_q(Z)$, а $q=\dfrac{p}{p-1}$, если $1<p<\infty$, и $q=\infty$, если $p=1$. Весовые операторы $V^{\pm 1}_{\gamma,\delta}$ определяются равенствами (1.14).

Для этого вначале оценим билинейную форму $\left(h,g*f\right)$,

$$\left|\left(h,g*f\right)\right|=\left|\sum_{n\in Z}h_n\sum_{k\in Z}\bar{g}_{n-k}\,\bar{f}_k\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h_n\right|\sum_{k-\infty}^{\infty}\left|g_{n-k}\right|\left|f_k\right|=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\right)+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}+\sum_{k=-\infty}^{n}\right)+\sum_{n=-\infty}^{-2}\sum_{k=n+1}^{-1}\right)\left|h_n\right|\left|g_{n-k}\right|\left|f_k\right|=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\widehat{\beta}}\right)^{k-n}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{n}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\beta}\right)^{-k}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\widehat{\beta}}\right)^{-n}\left(\frac{\alpha}{\widehat{\beta}}\right)^{k}+\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\beta}\right)^{n-k}\right)+\sum_{n=-\infty}^{-2}\ \sum_{k=n+1}^{-1}\left(\frac{\beta}{\widehat{\beta}}\right)^{k-n}\right)\left|\tilde{h}_n\right|\left|\tilde{g}_{n-k}\right|\left|\tilde{f}_k\right|\le$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k-\infty}^{\infty}\left|\tilde{h}_n\right|\left|\tilde{g}_{n-k}\right|\left|\tilde{f}_k\right|,$$

так как все дроби, входящие в левую часть последнего неравенства не превосходят единицы. Из доказательства теоремы 1.1 следует, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k-\infty}^{\infty}\left|\tilde{h}_n\right|\left|\tilde{g}_{n-k}\right|\left|\tilde{f}_k\right|\le\ \left\|\tilde{h}\right\|_q\left\|\tilde{g}\right\|_1\left\|\tilde{f}\right\|_p=\left\|h\right\|_{\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_q}\left\|g\right\|_{\left\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right\}_1}\left\|f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_p}.$$

Поэтому в силу (1.20)

$$\left\|g*f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_p} \le \sup_{\|h\|_{\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q}\le 1} \left(\left\|h\right\|_{\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\}_q} \left\|g\right\|_{\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1} \left\|f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_p} \right) = \left\|g\right\|_{\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1} \left\|f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_p} .$$

Пусть $p=\infty$. Тогда

$$\left\|g*f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_\infty} = \sup_{n\in Z}\left|\left(\alpha^{-n}\frac{1}{2}(1+sign\, n)+\beta^{-n}\frac{1}{2}(1-sign\, n)\right)\sum_{k\in Z} g_{n-k} f_k\right| \le$$

$$\le \sup_{n\in Z}\left[\left(\frac{1}{2}(1+sign\, n)\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\widehat{\beta}}\right)^{k-n}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{n}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\beta}\right)^{-k}\right]+\right.\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\widehat{\beta}}\right)\left(\frac{\alpha}{\widehat{\beta}}\right)^{k}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\beta}\right)^{-1-k}+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1+sign(n+1))\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\widehat{\beta}}\right)^{-n}\left(\frac{\alpha}{\widehat{\beta}}\right)^{k}+\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\beta}\right)^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{-1}\left(\frac{\beta}{\widehat{\beta}}\right)^{k-n}\right]\right)\left|\tilde{g}_{n-k}\right|\left|\tilde{f}_k\right|\right] \le$$

$$\le \sup_{n\in Z}\sum_{k\in Z}\left|\tilde{g}_{n-k}\right|\left|\tilde{f}_k\right|,$$

так как все дроби, входящие в левую часть последнего неравенства не превосходят единицы.

Из теоремы 1.1 для случая $p=\infty$ следует, что

$$\left\|g*f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_\infty} \le \sup_{n\in Z}\sum_{k\in Z}\left|\tilde{g}_{n-k}\right|\left|\tilde{f}_k\right| \le \left\|\tilde{g}\right\|_1\left\|\tilde{f}\right\|_\infty = \left\|g\right\|_{\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1}\left\|f\right\|_{\{\alpha,\beta\}_\infty} . ►$$

1.5. Алгебры $\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1$ и $W\left(\bar{K}_{\widehat{\beta}^{-1}}^{\widehat{\alpha}^{-1}}\right)$.

Пусть $\alpha,\beta\in(0,\infty),\alpha\ne\beta$. Из теоремы 1.4 следует, что для $g,f\in\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1$

$$\left\|g*f\right\|_{\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1} \le \left\|g\right\|_{\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1}\left\|f\right\|_{\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1} .$$

Поэтому пространство $\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\}_1$ является сверточной коммутативной банаховой алгеброй с единицей.

Пусть $\rho,\rho_1,\rho_2\in(0,\infty),\rho_1<\rho_2$. Введем следующие обозначения:

$$\Gamma_\rho=\left\{z\in C\,\middle|\,|z|=\rho\right\},\ K_{\rho_1}^{\rho_2}=\left\{z\in C\,\middle|\,\rho_1<|z|<\rho_2\right\},\ \bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}=K_{\rho_1}^{\rho_2}\cup\Gamma_{\rho_1}\cup\Gamma_{\rho_2} .$$

Через $W(\Gamma_\rho)$ обозначим алгебру функций $F(z)$, определенных на окружности Γ_ρ и представимых в виде абсолютно сходящихся рядов Лорана,

$$F(z)=\sum_{n\in Z} f_n z^n\text{, где }\sum_{n\in Z}\rho^n\left|f_n\right|<\infty.$$

Через $W\left(\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}\right)$ обозначим алгебру функций, определенных на кольце $\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}$, аналитических в кольце $K_{\rho_1}^{\rho_2}$ и обладающих на $\partial K_{\rho_1}^{\rho_2}=\Gamma_{\rho_1}\cup\Gamma_{\rho_2}$ предельными значениями, представимыми в виде абсолютно сходящихся рядов Лорана.

Теорема 1.5. *Пусть* $0<\rho_1\le\rho_2$. *Преобразование Лорана* L_z, *действующее по формуле (1.7), осуществляет биективное отображение, сохраняющее операции, сверточной алгебры* $\left\{\rho_2^{-1},\rho_1^{-1}\right\}_1$ *на алгебру* $W\left(\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}\right)$.

С введением нормы внешним образом

$$\|f\|_{W\left(\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}\right)}=\left\|L_z^{-1}\left(f(z)\right)\right\|_{\left\{\rho_2^{-1},\rho_1^{-1}\right\}_1},$$

где обратное преобразование Лорана L_z^{-1} *действует по формулам (1.8), (1.6), алгебра* $W\left(\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}\right)$ *превращается в коммутативную банахову алгебру, изометрически изоморфную алгебре* $\left\{\rho_2^{-1},\rho_1^{-1}\right\}_1$.

◄ Пусть $\rho_1\ne\rho_2$ и

$$f=\left\{f_k\right\}_{k\in Z}\in\left\{\rho_2^{-1},\rho_1^{-1}\right\}_1,\ \tilde{f}=V_{\rho_2,\rho_1}f=\left\{\tilde{f}_k\right\}_{k\in Z}\in l_1(Z).$$

Тогда

$$L_z(f)=\sum_{k\in Z} f_k z^k\in W\left(\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}\right),$$

так как при $\rho_1\le\rho=|z|\le\rho_2$

$$\left|\sum_{k\in Z} f_k z^k\right|=\left|\sum_{k\in Z}\left(\frac{1}{2}(1+signk)\rho_2^{-k}f_k+\frac{1}{2}(1-signk)\rho_1^{-k}f_k\right)z^k\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|\tilde{f}_k\right|\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left|\tilde{f}_k\right|\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^k\le\sum_{k\in Z}\left|\tilde{f}_k\right|<\infty.$$

Кроме того, при $\rho_1<\rho<\rho_2$

$$\left|\frac{d}{dz}\sum_{k\in Z} f_k z^k\right|=\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\right)f_k k z^{k-1}\right|\le\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{f}_k\right|\frac{k}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left|\tilde{f}_k\right|\frac{(-k)}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^k<\infty.$$

Если же $\rho=\rho_1=\rho_2$ и $f\in\left\{\rho^{-1}\right\}_1$, то $L_z(f)\in W\left(\Gamma_\rho\right)$, так как

$$\left|\sum_{k\in Z} f_k z^k\right|\le\sum_{k\in Z}\left|\tilde{f}_k\right|\rho^{-k}|z|^k=\sum_{k\in Z}\left|\tilde{f}_k\right|<\infty.$$

Обратно, пусть $f(z) \in W\left(\bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}\right)$. Тогда для любого ,,

$$\left(L_z^{-1} f(z)\right)_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \left(\sum_{k \in Z} f_k z^k \right) z^{n-1} dz = \sum_{k \in Z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} z^{k-n-1} f_k dz =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} + \sum_{k=-\infty}^{n-1} \right) \frac{f_k}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} z^{k-n-1} dz + \frac{f_n}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{dz}{z} = f_n,\ n \in Z \text{, то есть } L_z^{-1}\left(f(z)\right) = f.$$

По поводу корректности проведенных в этой выкладке преобразований см. [ ], стр.379-381.

Остается заметить, что если $g = \{g_k\}_{k \in Z}, f = \{f_k\}_{k \in Z} \in \left\{\rho_2^{-1}, \rho_1^{-1}\right\}_1$, то

$$L_z(g * f) = \sum_{k \in Z} \left(\sum_{j \in Z} g_{n-k} f_j \right) z^k = \sum_{j \in Z} f_j z^j \sum_{k \in Z} g_{k-j} z^{k-j} =$$

$$= \left(\sum_{j \in Z} f_j z^j \right) \cdot \left(\sum_{n \in Z} g_n z^n \right) = L_z(g) \cdot L_z(f),$$

а законность перемены порядка суммирования обеспечивается теоремой 1.4 и доказанной выше абсолютной сходимостью рядов при $z \in \bar{K}_{\rho_1}^{\rho_2}$.▶

Замечание 1.3. Из доказательства теоремы 1.5 вытекает, что в случае $\rho_1 \neq \rho_2$ интеграл в обратном преобразовании Лорана может браться по любой окружности Γ_ρ, где $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$.

Так как ввиду формул (1.19) $\hat{\alpha} \le \hat{\beta}$, в качестве следствия теоремы 1.5 получаем, что с введением в алгебре $W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$ нормы

$$\left\| f(z) \right\| = \left\| L_z^{-1}(f) \right\|_{\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\}_1} \tag{1.21}$$

она превращается в коммутативную банахову алгебру, изометрически изоморфную алгебре $\left\{\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right\}_1$. Максимальные идеалы этой алгебры описаны в [15], §19 и при $\hat{\alpha} \neq \hat{\beta}$, (то есть при $\alpha \neq \beta$), они состоят из функций $a(z)$, обращающихся ноль в некоторой фиксированной точке z_0 кольца $\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}$. Если же $\alpha = \beta$, и следовательно $\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}} = \Gamma_{\alpha^{-1}}$, максимальные идеалы алгебры $W\left(\Gamma_{\alpha^{-1}}\right)$ состоят из функций $a(z)$, обращающихся ноль в некоторой фиксированной точке z_0 окружности $\Gamma_{\alpha^{-1}}$. Поэтому, принимая во внимание замечание 1.2, получаем следующий аналог теоремы Винера для алгебры $W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$.

Теорема 1.6. *Пусть* $a(z)\in W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$. *Для того, чтобы* $\left[a(z)\right]^{-1}\in W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $\alpha\neq\beta$ *выполнялось условие*

$$a(z)\neq 0,\ \ z\in\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}, \tag{1.22}$$

а при $\alpha=\beta$ *условие*

$$a(z)\neq 0,\ \ z\in\Gamma_{\alpha^{-1}}. \tag{1.23}$$

Алгебру $W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$ по аналогии с алгеброй Винера $W\left(\Gamma_1\right)$ будем называть алгеброй символов операторов свертки, действующих в пространстве $\left\{\alpha,\beta\right\}_p$, $1\le p\le\infty$. К рассмотрению таких операторов мы приступаем в следующем разделе.

1.6. Алгебра операторов свертки $C\left\{\alpha,\beta\right\}_p$.

Пусть $\alpha\neq\beta$ и $a=\left\{a_n\right\}_{n\in Z}$ - фиксированная последовательность из пространства $\left\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\right\}_1$. Рассмотрим оператор свертки A, действующий в пространстве $\left\{\alpha,\beta\right\}_p$, $1\le p\le\infty$, по формуле (1.10). В силу теоремы 1.4 оператор A является линейным, ограниченным оператором и $\left\|A\right\|_{\left\{\alpha,\beta\right\}_p}\le\left\|a\right\|_{\left\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\right\}_1}$.

Через $C\left\{\alpha,\beta\right\}_p, 1\le p\le\infty$, обозначим алгебру операторов A, действующих по формуле

$$Ax=a*x, \text{ где } a\in\left\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\right\}_1. \tag{1.24}$$

Алгебру $C\left\{\alpha,\alpha\right\}_p$ будем обозначать $C\left\{\alpha\right\}_p$.

Каждому оператору $A\in C\left\{\alpha,\beta\right\}_p$ поставим в соответствие функцию $a(z)=L_z(a)\in W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$, которую назовем символом оператора A. Это соответствие порождает алгебраический изоморфизм алгебр $C\left\{\alpha,\beta\right\}_p$ и $W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$. Отсюда вытекает, что условия (1.22) и (1.23) являются достаточными для того, чтобы $A\in GC\left\{\alpha,\beta\right\}_p$. Для доказательства этого утверждения нам понадобится оператор A^*, сопряженный к оператору A. Прежде чем описать его, приведем краткую сводку результатов, касающихся сопряженного оператора.

Пусть, $A\in L(X,Y)$, а $g\in Y^*$, то есть g - линейный непрерывный функционал в пространстве Y. Полагая для произвольного $x\in X$

$$f(x)=g\left(A(x)\right), \tag{1.25}$$

мы получаем линейный непрерывный функционал в пространстве X, являющийся произведением оператора $A\in L(X,Y)$ и функционала g, рассматриваемого как линейный оператор, $g\in L(Y,C)$. При этом $\left\|f\right\|\le\left\|A\right\|\cdot\left\|g\right\|$. Формула (1.25), ставящая в соответствие каждому функционалу $g \in Y^*$ функционал $f \in X^*$, определяет линейный оператор $A^* \in L\left(Y^*, X^*\right)$, действующий по формуле

$$A^*(g) = gA, \text{ при этом } \left\|A^*\right\| = \|A\|. \tag{1.26}$$

Оператор A^* называется *сопряженным* к оператору A.

Отметим ряд свойств сопряженного оператора.

1) *Если* $A_1, A_2 \in L(X, Y)$, *тогда для любых* $\lambda, \mu \in C$

$$\left(\lambda A_1 + \mu A_2\right)^* = \bar{\lambda} A_1^* + \bar{\mu} A_2^*.$$

2) Если $A_1 \in L(X, Y)$, $A_2 \in L(Y, Z)$, *тогда*

$$\left(A_1 A_2\right)^* = A_2^* A_1^*.$$

3) Если оператор $A \in L(X, Y)$, *обратим и* $A^{-1} \in L(X, Y) -$ *его обратный оператор, тогда оператор* $A^* \in L\left(Y^*, X^*\right)$ *обратим и*

$$\left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*.$$

4) Если пространства X *и* Y *рефлексивны, то есть* $\left(X^*\right)^* = X$, $\left(Y^*\right)^* = Y$, *и* $A \in L(X, Y)$, *тогда*

$$\left(A^*\right)^* = A.$$

Теорема 1.7. *Пусть оператор* $A \in C\{\alpha, \beta\}_p, 1 \le p < \infty$, *и имеет символ* $a(z) \in W\left(\bar{K}_{\hat{\beta}^{-1}}^{\hat{\alpha}^{-1}}\right)$. *Тогда оператор* A^* *имеет символ*

$$a^*(z) = \overline{a\left(\bar{z}^{-1}\right)} \in W\left(\bar{K}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\right) \tag{1.27}$$

и если $p = 1$, $A^* \in C\left\{\alpha^{-1}, \beta^{-1}\right\}_\infty$, *а если* $1 < p < \infty$, $A^* \in C\left\{\alpha^{-1}, \beta^{-1}\right\}_q, q = \dfrac{p}{p-1}$.

◀ Пусть $x = \left\{\xi_n\right\}_{n \in Z} \in \{\alpha, \beta\}_p$, $y = \left\{\eta_n\right\}_{n \in Z} \in \{\alpha, \beta\}_p^*$, оператор $A \in C\{\alpha, \beta\}_p$ и имеет символ $a(z) = \sum\limits_{n \in Z} a_n z^n$. Тогда

$$(Ax, y) = \sum_{n \in Z} \bar{\eta}_n \sum_{k \in Z} a_{n-k} \xi_k = \sum_{k \in Z} \xi_k \sum_{n \in Z} a_{n-k} \bar{\eta}_n = \sum_{k \in Z} \xi_k \overline{\sum_{n \in Z} \bar{a}_{n-k} \eta_n} = \sum_{k \in Z} \xi_k \overline{\sum_{n \in Z} a^*{}_{n-k} \eta_n} =$$

$$= \left(x, A^* y\right), \text{ где } A^* y = a^* * y,\ a^* = \left\{a^*{}_n\right\}_{n \in Z},\ a_n^* = \overline{a_{-n}}.$$

При этом корректность перемены порядка суммирования обеспечивается абсолютной сходимостью всех участвующих в процедуре рядов. Последнее утверждение вытекает из доказательства теоремы 1.4, где проведена оценка аналогичной билинейной формы.

В результате получаем, что символ $a^*(z)$ оператора A^* имеет вид

$$a^*(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{a_{-n}}z^n=\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\overline{z}^{-n}}=\overline{a\left(\overline{z}^{-1}\right)}.$$

Так как

$$a=\{a_n\}_{n\in Z}=\left\{\frac{1}{2}(1+signn)\widehat{\alpha}^n\tilde{a}_n+\frac{1}{2}(1-signn)\widehat{\beta}^n\tilde{a}_n\right\}_{n\in Z}\in\left\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right\}_1,$$

то

$$a^*=\left\{a^*{}_n\right\}_{n\in Z}=\left\{\frac{1}{2}(1+signn)\widehat{\beta}^{-n}\tilde{a}_{-n}+\frac{1}{2}(1+signn)\widehat{\alpha}^{-n}\tilde{a}_{-n}\right\}_{n\in Z}\in\left\{\widehat{\beta}^{-1},\widehat{\alpha}^{-1}\right\}_1,$$

а

$$a^*(z)=L_z\left(a^*\right)\in W\left(\overline{K}_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}\right).$$

При $p=1$ $A\in L\left(\{\alpha,\beta\}_1\right)$, поэтому в силу предложения 1.5

$$A^*\in L\left(\{\alpha,\beta\}_1^*\right)=L\left(\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_\infty\right).$$

Если же $1<p<\infty$ и $A\in L\left(\{\alpha,\beta\}_p\right)$, тогда

$$A^*\in L\left(\{\alpha,\beta\}_p^*\right)=L\left(\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_q\right),\ q=\frac{p}{p-1}.►$$

Предложение 1.6. *Пусть* $\alpha\le\beta$*, оператор А имеет вид* (1.24)*, где* $a\in\{\alpha,\beta\}_1$*. Для того, чтобы* $A\in GC\{\alpha,\beta\}_1$*, необходимо и достаточно, чтобы его символ* $a(z)=L_z(a)$ *при* $\alpha\ne\beta$ *удовлетворял условию*

$$a(z)\ne 0,\ z\in\overline{K}_{\beta^{-1}}^{\alpha^{-1}}, \tag{1.28}$$

а при $\alpha=\beta$ *- условию*

$$a(z)\ne 0,\ z\in\Gamma_{\alpha^{-1}}. \tag{1.29}$$

При выполнении условий (1.28) *или* (1.29) *оператор* A^{-1} *имеет вид* (1.13).

◄ Из теоремы 1.4 следует, что

$$\|A\|_{C\{\alpha,\beta\}_1}\le\|a\|_{\{\alpha,\beta\}_1}.$$

Так как $e\in\{\alpha,\beta\}_1$ и $\|e\|_{\{\alpha,\beta\}_1}=1$, то

$$\|A\|_{C\{\alpha,\beta\}_1}=\sup_{\|x\|_{\{\alpha,\beta\}_1}=1}\|Ax\|_{\{\alpha,\beta\}_1}\ge\|Ae\|_{\{\alpha,\beta\}_1}=\|a\|_{\{\alpha,\beta\}_1}.$$

Поэтому

$$\|A\|_{C\{\alpha,\beta\}_1}=\|a\|_{\{\alpha,\beta\}_1}=\|a(z)\|_{W\left(\overline{K}_{\beta^{-1}}^{\alpha^{-1}}\right)}.$$

Следовательно, алгебра $C\{\alpha,\beta\}_1$ изометрически изоморфна алгебре $W\left(\overline{K}_{\beta^{-1}}^{\alpha^{-1}}\right)$, и доказываемое утверждение является следствием теоремы 1.6.►

Прежде, чем доказать основной результат данного раздела, сделаем следующее замечание.

Замечание 1.4. Предложение 1.4 ввиду определения нормы (1.15) в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p, 1\le p<\infty,$ при любых $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ автоматически переносится на алгебру $L\left(\{\alpha,\beta\}_p\right), 1\le p<\infty.$ $\otimes$

Теорема 1.8. *Пусть оператор A имеет вид* (1.24), *где* $a\in\left\{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}\right\}_1$. *Для того, чтобы* $A\in GC\{\alpha,\beta\}_p, 1\le p\le\infty,$ *достаточно, чтобы его символ* $a(z)$ *удовлетворял условиям* (1.22) *или* (1.23). *При выполнении последних условий оператор* A^{-1} *имеет вид* (1.13).

◀ 1) Пусть $\alpha\le\beta$. Случай $p=1$ рассмотрен в предложении 1.6. Переходя к случаю $1<p<\infty$, отметим, что при выполнении условий (1.22) или (1.23) в силу предложения 1.6 и теоремы 1.4 оператор A^{-1}, действующий по формуле

$$A\,A^{-1}x=b*x,\ \text{где}\ b=L_z^{-1}\left(1/a(z)\right),$$

принадлежит алгебре $C\{\alpha,\beta\}_p$. Кроме того, в пространстве $\{\alpha,\beta\}_1$ выполняется равенство

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I\,. \tag{1.30}$$

Поэтому в силу замечания 1.4 $A\in GC\{\alpha,\beta\}_p$, а оператор A^{-1} имеет вид (1.13).

2) Пусть $\alpha\ge\beta$ и $1<p\le\infty$. Символ $a(z)$ оператора A принадлежит алгебре $W\left(\bar K_{\alpha^{-1}}^{\beta^{-1}}\right)$ и удовлетворяет условиям (1.22) или (1.23).

В пространстве $\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_q, 1\le q<\infty,$ рассмотрим оператор A' вида (1.24) с символом $a'(z)=\overline{a\left(\bar z^{-1}\right)}\in W\left(\bar K_\beta^\alpha\right)$, являющийся предсопряженным для оператора A. Операторы A' и A связаны соотношением $A=(A')^*$. Так как $\alpha^{-1}\le\beta^{-1}$, требование $z\in\bar K_{\alpha^{-1}}^{\beta^{-1}}$ равносильно требованию $\bar z^{-1}\in\bar K_\beta^\alpha$ и поэтому условия (1.22) и (1.23) равносильны соответственно условиям $a'(z)\ne 0, z\in\bar K_\beta^\alpha$, и $a'(z)\ne 0, z\in\Gamma_\alpha$, то по доказанному выше в пункте 1) $A'\in GC\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_q, 1\le q<\infty$. При этом

$$\left(A'\right)^{-1}x=b'*x,\ \text{где}\ b'=L_z^{-1}\left(1/a'(z)\right).$$

Так как $a'^*(z)=a(z)$, то в силу свойства 3) сопряженного оператора и теоремы 1.7 при условиях (1.22) или (1.23)

$$A\in GC\{\alpha,\beta\}_p,\ \ 1<p=\frac{q}{q-1}\le\infty,$$

а оператор

$$A^{-1}x = \left(\left(A'\right)^{-1}\right)^{*} x = b * x, \text{ где } b = L_z^{-1}\left(1/a'^{*}(z)\right) = L_z^{-1}\left(1/a(z)\right).$$

Остается рассмотреть случаи: 3) $p = 1$ при $\alpha \geq \beta$ и 4) $p = \infty$ при $\alpha \leq \beta$.

3) Доказательство теоремы в случае $p = 1$ при $\alpha \geq \beta$ проводится так же как и в пункте 1) с использованием предложения 1.4 и замечания 1.4. Роль пространства $l_1(Z)$ здесь будет играть, например, пространство $\{\alpha,\beta\}_2$, а роль пространства $l_p(Z)$- пространство $\{\alpha,\beta\}_1$. Оба эти пространства содержат линеал $V_{\alpha,\beta}(E)$, где E- линеал финитных последовательностей, всюду плотный как в $\{\alpha,\beta\}_1$ так и в $\{\alpha,\beta\}_2$. $\otimes$

4) Доказательство теоремы в случае $p = \infty$ при $\alpha \leq \beta$ проводится так же как и в пункте 2). Оператор $A \in C\{\alpha,\beta\}_\infty$ и в качестве своего предсопряженного оператора в этом случае имеет оператор $A' \in C\left\{\alpha^{-1},\beta^{-1}\right\}_1$, где $\alpha^{-1} \geq \beta^{-1}$. Поэтому остается лишь воспользоваться результатом пункта 3).►

Замечание 1.5. На самом деле условия (1.22) и (1.23) являются не только достаточными, но и необходимыми для обратимости оператора A из алгебры $C\{\alpha,\beta\}_p, 1 \leq p \leq \infty$. На этом этапе это можно показать, воспользовавшись техникой, примененной выше при доказательстве теоремы 1.3. К этому вопросу мы вернемся в следующей главе 2, где будет рассмотрен более общий метод решения подобных проблем, часто появляющихся ниже.

Глава 2. Оператор Винера-Хопфа и оператор свертки. Односторонняя обратимость.

Резюме. В этой главе мы изучаем проблему односторонней обратимости конечномерных операторов, дискретного оператора Винера-Хопфа и оператора дискретной свертки. Уже при описании достаточных условий односторонней обратимости операторов в последних двух случаях используется новая техника: задача факторизации символа в алгебре $W\left(\Gamma_1\right)$ и теорема деления на многочлены в алгебре $W\left(\bar{K}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\right)$. Для получения же необходимых условий односторонней обратимости мы вынуждены привлечь более общую теорию фредгольмовости рассматриваемых операторов.

2.1. Односторонне обратимые операторы.

Пусть X и Y - комплексные банаховы пространства, а I_X и I_Y - единичные операторы, действующие соответственно в пространствах X и Y. Оператор $A \in L(X,Y)$ называется *обратимым*, если существует оператор $B \in L(Y,X)$ такой, что

$$A\,B = I_X\,,\quad BA = I_Y\,. \tag{2.1}$$

В этом случае оператор B называется обратным к оператору A и обозначается символом A^{-1}. В силу теоремы С.Банаха об обратном операторе ([14], стр. 225) оператор $A \in L(X,Y)$ обратим тогда и только тогда, когда

$$KerA = \{O\} \text{ и } Im\,A = Y.$$

Оператор $A \in L(X,Y)$ называется *обратимым справа*, если существует такой оператор $B \in L(Y,X)$, что выполняется первое из равенств (2.1). Оператор B в этом случае называется *правым обратным* к оператору A. Второе равенство (2.1) определяет обратимость оператора A *слева* и *левый обратный* к оператору A. Для того, чтобы оператор A был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы он был обратимым как слева, так и справа. В этом случае обратный к нему оператор определяется единственным способом. Если оператор A обратим только с одной стороны, то соответствующий обратный к нему определяется неоднозначно. Например, если A^{-1} - левый обратный оператор к оператору $A \in L(X)$, тогда все операторы вида $A^{-1} + B\left(I_X - AA^{-1}\right)$, где $B \in L(X)$, являются левыми обратными к оператору A.⊗ Если же оператор A^{-1} - правый обратный к оператору $A \in L(X)$, то таковыми будут все операторы семейства $A^{-1} + \left(I_Y - A^{-1}A\right)B$, где $B \in L(X)$.⊗

Пусть $A \in L(X,Y)$ – обратимый слева оператор и A^{-1} - левый обратный к A. Паре операторов A и A^{-1} сопоставим оператор $P_Y = AA^{-1} \in L(Y)$.

Предложение 2.1. *Оператор P_Y является проектором, проектирующим пространство Y на подпространство $\mathrm{Im}\,A$ параллельно $KerA^{-1}$.*⊗

Пусть $A \in L(X,Y)$ – обратимый справа оператор и A^{-1} - правый обратный к A. Паре операторов A и A^{-1} сопоставим оператор $P_X = A^{-1}A \in L(X)$.

Предложение 2.2. *Оператор P_X является проектором, проектирующим пространство X на подпространство $\mathrm{Im}\,A^{-1}$ параллельно $KerA$.*⊗

Следующие две теоремы дают критерии обратимости оператора слева и справа.

Теорема 2.1. *Для того чтобы оператор* $A \in L(X,Y)$ *был обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) $KerA = \{O\}$;

2) линеал $\operatorname{Im} A$ *являлся подпространством в* Y*, имеющим прямое дополнение.*

Если эти условия выполнены и $A_0^{-1} \in L(Y,X)$ *- один из операторов, левых обратных к* A*, то общий вид левого обратного к* A *оператора дается формулой* $A_0^{-1}P$*, где* P *- произвольный проектор со свойством* $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} A$.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы оператор* $A \in L(X,Y)$ *был обратимым справа, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) подпространство $KerA$ *имело прямое дополнение в* X*;*

2) $\operatorname{Im} A = Y$.

Если эти условия выполнены и $A_0^{-1} \in L(Y,X)$ *- один из операторов, правых обратных к* A*, то общий вид правого обратного к* A *оператора дается формулой* PA_0^{-1}*, где* P *- произвольный проектор со свойством* $KerP = KerA$.

Следующие предложения дают информацию о характере разрешимости уравнения

$$Ax = y \tag{2.2}$$

с односторонне обратимым оператором A.

Предложение 2.3. *Пусть* $A \in L(X,Y)$ *– обратимый слева оператор и* A^{-1} *- левый обратный к* A*. Уравнение* (2.2) *разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$Q_Y y = (I_Y - P_Y)y = 0\,. \tag{2.3}$$

При выполнении этого условия вектор $x = A^{-1}y$ *является единственным решением уравнения* (2.2).

Предложение 2.4. *Пусть* $A \in L(X,Y)$ *– обратимый справа оператор и* A^{-1} *- правый обратный к* A*. Тогда уравнение* (2.2) *разрешимо для любых, вектор* $x = A^{-1}y$ *является одним из его решений, а подпространство* $KerA$ *совпадает с множеством значений* $Q_X(X)$ *проектора* $Q_X = I_X - P_X$.

Доказательства предложений 2.1-2.4 и теорем 4.1 и 4.2 несложны и могут быть проделаны читателем самостоятельно. Впрочем, некоторые из них содержатся в монографии [19], Гл2, §5.

Исследуем проблему односторонней обратимости конечномерного линейного оператора A, определенного на пространстве $L_n(C)$ и действующего в пространство $L_m(C)$, $\dim L_n(C) = n, \dim L_m(C) = m$. Так как выбором базисов в пространствах $L_n(C)$ и $L_m(C)$ всегда можно перейти от операторного уравнения к эквивалентному матричному уравнению, мы ограничимся изучением оператора $A \in L(C_n, C_m)$, действующего по формуле

$$Ax = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Проблема односторонней обратимости оператора A вида (2.4) сводится к вопросу об односторонней обратимости матрицы $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(C)$.

Матрица $A \in M_{m\times n}(C)$ называется *обратимой справа*, если существует такая матрица $B \in M_{n\times m}(C)$, что $AB = E$, где $E \in M_m(C)$. Матрица $A \in M_{m\times n}(C)$ называется *обратимой слева,* если существует такая матрица $B \in M_{n\times m}(C)$, что $BA = E$, где $E \in M_n(C)$.

Если матрица A обратима справа или слева, тогда матрицу B, указанную выше, будем называть соответственно *правой* или *левой обратной* к матрице A и обозначать $B = A_{п}^{-1}$ или $B = A_{л}^{-1}$ (или $B = A^{-1}$, когда из контекста ясно, какой является матрица B, правой, левой или двусторонней обратной к матрице A). Матрица, обратимая одновременно справа и слева, является обратимой.

Теорема 2.3. *Для того чтобы матрица* $A \in M_{m\times n}(C)$ *была обратимой справа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$r(A) = rangA = m \le n. \tag{2.5}$$

Если условие (2.5) *выполняется, общий вид правой обратной матицы к матрице* A *определяется как общее решение матричного уравнения* $AX = E$, *где* $E \in M_m(C)$.

Для того чтобы матрица $A \in M_{m\times n}(C)$ *была обратимой слева, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$r(A) = rangA = n \le m. \tag{2.6}$$

Если условие (2.6) *выполняется, общий вид левой обратной матицы к матрице* A *определяется как общее решение матричного уравнения* $XA = E$, *где* $E \in M_n(C)$.

◄ Пусть матрица $A \in M_{m\times n}(C)$ и обратима справа. Тогда $AB = E$, где $E \in M_m(C)$. Так как ранг произведения матриц не превышает рангов сомножителей, а ранг матрицы не превышает числа ее строк и числа ее столбцов, получаем, что

$$m = r(E) = r(AB) \le r(A) \le m \quad \Rightarrow \quad m = r(A) \le n.$$

Таким образом, условие (2.5) выполняется.

Обратно, пусть условие (2.5) выполнено. Существование правой обратной матрицы для матрицы A равносильно разрешимости матричного уравнения

$$AX = E, \text{ где } E \in M_m(C). \tag{2.7}$$

Так как $r(A) = r(A|E) = m$, переход от уравнения (2.7) к соответствующим системам линейных алгебраических уравнений и применение теоремы Кронекера-Капелли подтверждает его разрешимость. Таким образом, матрица A обратима справа.

Обратимость матрицы A слева равносильна обратимости матрицы A^T справа. Отсюда легко получить справедливости второй части доказываемой теоремы. ⊗ ►

Пример 2.1. Показать, что матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

обратима справа, и найти общий вид ее правой обратной матрицы.

◄ Существование правой обратной матрицы равносильно разрешимости уравнения $AX=E$*, где* $E\in M_m(C)$. Общее решение этого уравнения дает общий вид матрицы, правой обратной к матрице A. Используя модификацию метода Гаусса в применении к уравнению $AX=E$ (см. [20],), получаем

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \langle 1\rangle & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{C_1-C_3} \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \langle 1\rangle & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \langle 1\rangle & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\substack{C_2-2C_1 \\ C_3-3C_1}} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \langle 1\rangle & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \langle 1\rangle & 0 & -7 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \langle 1\rangle & -9 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)^{C_3-2C_2} \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \langle 1\rangle & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \langle 1\rangle & 0 & -7 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \langle 1\rangle & 5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Откуда следует, что матричное уравнение разрешимо, а его общее решение имеет вид

$$X_{\hat{\imath}\acute{a}}=\begin{pmatrix} 1-3c_1 & -3c_2 & -1-3c_3 \\ -2+7c_1 & 1+7c_2 & 2+7c_3 \\ 1-5c_1 & -2-5c_2 & -5c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где $c_1,c_2,c_3\in C$. Таким образом, общий вид правой обратной матрицы к матрице A дается формулой (2.8). ►

2.2. Индекс непрерывной функции и его свойства.

Ниже нам понадобится понятие *индекса* непрерывной функции.

Пусть $\mathcal{L}$ - простая гладкая ориентированная замкнутая кривая, разбивающая комплексную плоскость на две области $\mathcal{D}^{+}$ и $\mathcal{D}^{+}$, лежащие соответственно слева и справа от $\mathcal{L}$ при обходе последней в положительном направлении; $a(z)$- комплекснозначная функция, определенная и непрерывная на $\mathcal{L}$ и не обращающаяся в нуль. Рассмотрим многозначную функцию $arg\, a(z)$, $z \in \mathcal{L},$ и выделим произвольную однозначную и непрерывную ветвь этой функции, которую будем обозначать тем же символом. Возможность выделения такой ветви определяется тем, что $a(z) \neq 0$ и $a(z) \neq \infty$, когда $z \in \mathcal{L},$ и осуществляется заданием аргумента комплексного числа $a(z_0)$ в произвольной точке $z_0 \in \mathcal{L}$. Отметим также, что любые две однозначные и непрерывные ветви рассматриваемой функции отличаются на постоянное слагаемое, равное $2\pi n$, где $n-$некоторое целое число.

Замечание 2.1. Вопрос о непрерывных ветвях многозначной функции $arg\ \ z$, к сожалению, недостаточно обсуждается в стандартных университетских учебниках по теории функций комплексного переменного. В связи с этим мы вынуждены отсылать читателя к более современным, но менее распространенным руководствам, например, [21], §6, или [], §1, 10°.

Определение. *Индексом* $\aleph(a)$ *функции* $a(z)$ *называется деленное на* 2π *приращение любой однозначной и непрерывной ветви* $arg\, a(z)$, *когда* z *пробегает кривую* $\mathcal{L}$ *в положительном направлении*,

$$\aleph(a) = \underset{z \in L}{ind}\ \ a(z) = \frac{1}{2\pi} arg\ \ a(z)\ \Big|_L . \tag{2.9}$$

Заметим, что индекс функции $a(z)$ не зависит от выбора ветви $arg\, a(z)$ и точки $z_0 \in \mathcal{L},$ а целиком определяется самой функцией. Иногда в литературе вместо термина «*индекс функции a*» употребляется термин «*топологический индекс функции a».*

Укажем на ряд свойств индекса функции.

1) Зафиксируем точку $z_0 \in \mathcal{L}$ и некоторую однозначную и непрерывную ветвь $arg\, a(z)$. Тогда

$$a(z_0) = |a(z_0)| \cdot exp\left[i\, arg\, a(z_0)\right].$$

После обхода кривой $\mathcal{L}$ в положительном направлении функции $a(z)$ и $|a(z)|$ вернутся к своим исходным значениям $a(z_0)$ и $|a(z_0)|$ соответственно, а функция $arg\, a(z)$ примет значение $arg\, a(z_0) + 2\pi\aleph(a)$. Из равенства

$$a(z_0) = |a(z_0)| \cdot exp\left[i\, arg\, a(z_0)\right] = |a(z_0)| \cdot exp\left[i\left(arg\, a(z_0) + 2\pi\aleph(a)\right)\right]$$

следует, что $\aleph(a) \in Z$. *Таким образом, индекс функции есть целое число.* При этом полезно помнить, что $\aleph(a)$ совпадает с числом витков, описываемых точкой $\zeta = a(z)$ в комплексной плоскости вокруг начала координат, когда точка z пробегает кривую $\mathcal{L}$ в положительном направлении. Каждый виток, описываемый против часовой стрелки, засчитывается со знаком «+», а каждый виток, описываемый по часовой стрелке, - со знаком «$-$».

2) Если $arg\, a(z)$ - некоторая однозначная и непрерывная ветвь, то $log|a(z)| + i\ arg\, a(z)$ есть однозначная и непрерывная ветвь многозначной функции $log\, a(z)$. Так как $log|a(z)|$ в данном случае является непрерывной на кривой $\mathcal{L}$ вещественной функцией, то $log|a(z)|\,\big|_L = 0$. Поэтому индекс функции $a(z)$ допускает еще одно представление,

$$\aleph(a) = \underset{z\in L}{ind}\ a(z) = \frac{1}{2\pi i} log\ a(z)\ \big|_L, \tag{2.10}$$

где

$$log\, a(z) = log|a(z)| + i\ arg\, a(z).$$

3) Следующие формулы вытекают из представления индекса функции в виде (2.10):

$$\aleph(ab) = \aleph(a) + \aleph(b),$$
$$\aleph\left(a^{-1}\right) = -\aleph(a),$$
$$\aleph\left(\frac{a}{b}\right) = \aleph(a) - \aleph(b),$$
$$\aleph\left(a^{n}\right) = n\ \ \aleph(a),\ \ n \in Z.$$

4) Если функция $a(z)$ непрерывно дифференцируем на $\mathcal{L}$, то формула (2.10) может быть преобразована к следующему виду,

$$\aleph(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{a'(t)}{a(t)}\ dt.$$

Поэтому, если дополнительно потребовать, чтобы функция $a(z)$ являлась предельным значением функции $a(\zeta)$, аналитической в области $\mathcal{D}^+$, за исключением, быть может, конечного числа полюсов, в частности, являлась рациональной функцией, ни один нуль или полюс которой не лежит на кривой $\mathcal{L}$, то по теореме о логарифмическом вычете ([18], стр. 244-245)

$$\aleph(a) = N - P, \tag{2.11}$$

где N $-$число нулей, а P $-$число полюсов функции $a(z)$ в области $\mathcal{D}^+$, причем каждый нуль или полюс считается столько раз, какова его кратность.

5) Индекс функции устойчив относительно ее малых возмущений. Точнее, если $\aleph(a) = \underset{z\in L}{ind}\ a(z)$ и $b(z)$ непрерывная на $\mathcal{L}$ функция, удовлетворяющая условию $|b(z)| < |a(z)|$, $z \in \mathcal{L}$, то

$$\underset{z\in L}{ind}\left(a(z)+b(z)\right) = \underset{z\in L}{ind}\, a(z).$$

Действительно, в этом случае

$$\aleph(a+b) = \aleph\left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right) = \aleph(a) + \aleph\left(1+\frac{b}{a}\right) = \aleph(a),$$

так как все значения функции $1+\dfrac{b(z)}{a(z)}$ лежат внутри круга единичного радиуса с центром в точке $z=1$ и поэтому $\aleph\left(1+\dfrac{b}{a}\right) = 0.$

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{L} = \Gamma_1$, $D^+ = \{z \in C \| z| < 1\}$, $D^- = \{z \in C \| z| > 1\}$.

а) Если ζ – фиксированное комплексное число, $|\zeta| \neq 1$. Тогда для любого $n \in Z$

$$\underset{z\in \Gamma_1}{ind}(z-\zeta)^n = \begin{cases} n, & \text{åñëè } |\zeta| < 1, \\ 0, & \text{åñëè } |\zeta| > 1. \end{cases}$$

б) Если рациональная функция $a(z)$ определена формулой

$$a(z) = \frac{\left(2z^2+i\right)(z-2)^2}{(3z+1)^3\left(2z^2-3iz+2\right)}, \tag{2.12}$$

то она имеет нули:

$$z_1 = \frac{1-i}{2}\left(\text{êðàò íîñòè } 1\right),\ z_2 = \frac{-1+i}{2}\left(\text{êðàò íîñòè } 1\right),\quad z_3 = 2\left(\text{êðàò íîñòè } 2\right);$$

– и полюса:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{3}\left(\text{êðàò íîñòè } 3\right),\ \zeta_2 = 2i\left(\text{êðàò íîñòè } 1\right),\ \zeta_3 = -\frac{i}{2}\left(\text{êðàò íîñòè } 1\right).$$

Так как $z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_3 \in D^+$, то по формуле (2.11) $\aleph(a) = 1+1-3-1 = -2.$ ►

2.3. Аналитические функции от элементов банаховой алгебры.

Процедура факторизации функции из алгебры $W(\Gamma_1)$ опирается на ряд теоретических положений в теории коммутативных банаховых алгебр, связанных с построением специального операционного исчисления, описывающего типы аналитических функций, которые могут быть определены на элементах рассматриваемой алгебры и действуют в ту же алгебру.

Пусть, например, $p(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ произвольный многочлен с комплексными коэффициентами и a – элемент коммутативной банаховой алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда

$$p(a)=\sum_{k=0}^{n} c_k a^k \in \mathfrak{A},\ \ a^0=e.$$

Более того, покажем, что если $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ произвольная целая функция и $a\in\mathfrak{A}$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k$ сходится в алгебре $\mathfrak{A}$. Напомним, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ из элементов нормированного пространства $\mathfrak{A}$ называется сходящимся, если его частичные суммы $\sum_{k=0}^{n} x_k$, $n=0,1,2,\ldots$, образуют последовательность, сходящуюся в пространстве $\mathfrak{A}$. Предел этой последовательности называют суммой указанного ряда. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|$. В банаховом пространстве $\mathfrak{A}$ каждый абсолютно сходящийся ряд сходится ([], стр. 96).

В нашем случае ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k$ абсолютно сходится, так как числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \|c_k a^k\|$ мажорируется сходящимся рядом $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \|a\|^k$. Следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k$ сходится к некоторому элементу алгебры $\mathfrak{A}$. Этот элемент обозначается $f(a)$ и называется *целой аналитической функцией* f *от элемента* $a\in\mathfrak{A}$. Например, если

$$f(z)=exp\,z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},$$

то для любой функции $a(t)\in W(\Gamma_1)$

$$exp\,a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[a(t)\right]^k}{k!} \ \in\ W(\Gamma_1).$$

Аналогичные построения могут быть проведены для других аналитических (не обязательно целых !) функций. Отсылая читателя к соответствующим разделам монографий по теории коммутативных банаховых алгебр

([15], стр. 46-51, [22], стр. 238-242), приведем без доказательства лишь некоторые классические теоремы для алгебры $W(\Gamma_1)$.

Теорема 2.4 (П. Леви). *Если функция* $a \in W(\Gamma_1)$ *и все ее значения лежат в области* $\mathcal{D}$, *то для любой функции* $f(\zeta)$, *аналитической в этой области* $f(a) \in W(\Gamma_1)$.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(z) = z^{-1}$, аналитическую во всей комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0.$ Применение теоремы 2.4 к этой функции приводит нас к теореме 1.2 Н.Винера.

Рассуждение о суперпозиции аналитических функций и предложение 1.2 приводят нас к следующему аналогу теоремы П.Леви для алгебр $W^{\pm}(\Gamma_1)$.

Теорема 2.5. *Пусть функция* $a^{+}(z) \in W^{+}(\Gamma_1)$ ($a^{-}(z) \in W^{-}(\Gamma_1)$) *и все ее значения при* $|z| \le 1$ ($|z| \ge 1$) *лежат в области* $\mathcal{D}$. *Тогда для любой функции* $f(\zeta)$, *аналитической в области* $\mathcal{D}$,

$$f\left(a^{+}(z)\right) \in W^{+}(\Gamma_1) \ \left(f\left(a^{-}(z)\right) \in W^{-}(\Gamma_1)\right).$$

Например,

$$exp\, a^{\pm}(z) \in W^{\pm}(\Gamma_1), \text{ если } a^{\pm}(z) \in W^{\pm}(\Gamma_1).$$

Следующая теорема является следствием теоремы Г.Е.Шилова о локально-аналитических функциях над коммутативными банаховыми алгебрами ([15], §13 или [22], стр. 244-246). Здесь приводится ее элементарное доказательство.

Теорема 2.6. *Пусть* $a(t) \in W(\Gamma_1)$, $a(t) \ne 0$ *ïðè* $t \in \Gamma_1$ *и* $\underset{t \in \Gamma_1}{ind}\, a(t) = 0$. *Тогда существует функция* $b(t) \in W(\Gamma_1)$ *такая, что* $a(t) = exp\, b(t)$.

Функцию $b(t)$ *будем в дальнейшем обозначать как* $log\, a(t)$.

◄ Пусть функция $u(t) \in W(\Gamma_1)$ и $\|u\| < 1$. Положим

$$log\left(1 - u(t)\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[u(t)\right]^k}{k}.$$

Очевидно, что

$$log\left(1 - u(t)\right) \in W(\Gamma_1) \text{ и } exp\, log\left(1 - u(t)\right) = 1 - u(t), \ t \in \Gamma_1.$$

Пусть теперь функция $a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k$ удовлетворяет условиям теоремы.

Положим $a_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k$ и выберем n настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$a_n(t) \neq 0,\ t \in \Gamma_1,\ \aleph(a_n) = 0 \quad \text{и} \quad \left\| \frac{a_n(t) - a(t)}{a_n(t)} \right\| < 1.$$

Функцию $a_n(t)$ представим в виде

$$a_n(t) = t^{-n} \sum_{k=-n}^{n} a_k t^{k+n} = c_1 t^{-n} \prod_{k=1}^{n} (t - z_k^+)(t - z_k^-) = c_2 \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z_k^+}{t} \right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t}{z_k^-} \right),$$

где c_1 и c_2 некоторые комплексные постоянные, $z_k^\pm \in D^\pm$ и являются корнями многочлена $t^n a_n(t)$. Так как $\aleph(a_n) = 0$, то числа корней z_k^+ и z_k^- одинаковы и равны n.

Обозначим

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{z_k^+}{t} & \text{ï ðè} \quad k = 1,..,n, \\[2ex] \dfrac{t}{z_k^-} & \text{ï ðè} \quad k = n+1,..,2n, \end{cases} \qquad u_{2n+1}(t) = \frac{a_n(t) - a(t)}{a_n(t)}.$$

Функции $u_k \in W(\Gamma_1)$ и $\|u_k\| < 1,\ k = 1,..,2n+1.$ В силу замечания, сделанного в начале доказательства, для произвольной функции $1 - u_k$ определен $\log(1 - u_k)$. В то же время, имеет место представление

$$a = a_n \left(1 - \frac{a_n - a}{a_n} \right) = c_2 \prod_{k=1}^{2n+1} (1 - u_k).$$

Остается положить

$$\log a(t) \overset{def}{=} \log c_2 + \sum_{k=1}^{2n+1} \log(1 - u_k(t)),$$

где под $\log c_2$ следует понимать произвольное, но фиксированное значение многозначной функции $\log z$. Очевидно, что $\log a \in W(\Gamma_1)$

$$\exp \log a(t) = \exp \left(\log c_2 + \sum_{k=1}^{2n+1} \log(1 - u_k(t)) \right) = c_2 \prod_{k=1}^{2n+1} \exp \log(1 - u_k(t)) =$$

$$= c_2 \prod_{k=1}^{2n+1} (1 - u_k(t)) = a(t). \blacktriangleright$$

2.4. Факторизация элемента в алгебре $W(\Gamma_1)$.

В этом разделе мы рассматриваем ключевой вопрос теории уравнений в свертках. Как известно из предыдущей главы, любую функцию $a(t)$ из алгебры $W(\Gamma_1)$ можно единственным образом представить в виде суммы $a^+ + a^-$, где $a^\pm \in W^\pm(\Gamma_1)$. Оказывается, что любую функцию $a(t)$ из группы $GW(\Gamma_1)$ можно представить в виде произведения $a = a^+ a^-$, где $a^\pm \in GW^\pm(\Gamma_1)$. Такое представление символа a оператора свертки A единственно с точностью до постоянных сомножителей. Оно влечет для оператора A его представление в виде произведения $A = A_+ A_-$, где операторы свертки $A_\pm$ имеют соответственно нижнетреугольную (A_+) и вернетреугольную **(** A_- **)** матрицы. На основе этого явления, называемого факторизацией оператора A и его символа a, ниже строится конструктивная теория односторонней обратимости дискретного оператора Винера-Хопфа.

Определение. *Факторизацией функции* $a(t) \in W(\Gamma_1)$ *будем называть ее представление в виде произведения трех сомножителей:*

$$a(t) = a^+(t) \cdot t^{\aleph} \cdot a^-(t), \tag{2.13}$$

где $\aleph \in Z$, $a^\pm(t) \in GW^\pm(\Gamma_1)$.

Множество всех функций из алгебры $W(\Gamma_1)$, допускающих факторизацию, будем обозначать **fact W(Γ$_1$).**

Теорема 2.7. *Пусть* $a(t) \in W(\Gamma_1)$ *и* $a(t) \neq 0$, $t \in \Gamma_1$. *Тогда функция* $a(t)$ *допускает факторизацию вида* (2.13), *где*

$$\aleph = \underset{t \in \Gamma_1}{ind}\, a(t), \quad a^\pm(t) = exp\left(P^\pm\left\{log\left[t^{-\aleph} a(t)\right]\right\}\right), \tag{2.14}$$

единственную с точностью до постоянных сомножителей.

Замечание 2.2. Последнее означает, что если

$$a(t) = a_1^+(t) \cdot t^{\aleph_1} \cdot a_1^-(t)$$

другая факторизация функции $a(t)$, то

$$\aleph_1 = \aleph, \quad a_1^+(t) = c a^+(t), \quad a_1^-(t) = c^{-1} a^-(t),$$

где $c-$ ненулевая комплексная постоянная. Отметим также, что фиксацией какого-нибудь значения функций $a^+(z)$ или $a^-(z)$ (например, $a^-(\infty) = 1$) факторизацию функции $a(t)$ всегда можно сделать единственной.

◀ Пусть $\aleph = \underset{t \in \Gamma_1}{ind}\, a(t)$ и $\tilde{a}(t) = t^{-\aleph} a(t)$. Так как $\underset{t \in \Gamma_1}{ind}\, \tilde{a}(t) = 0$, то по теореме 2.6 существует такая ветвь функции $log\, z$, что $log\, \tilde{a}(t) \in W(\Gamma_1)$. Покажем, что искомые функции имеют вид (2.14).

Действительно, по теореме 2.5

$$a^\pm(t) \in W^\pm(\Gamma) \text{ и } \left[a^\pm\right]^{-1} = exp\left(-P^\pm\left\{log\, \tilde{a}(t)\right\}\right) \in W^\pm(\Gamma_1).$$

Кроме того,

$$a^+(t) \cdot t^{\aleph} \cdot a^-(t) = t^{\aleph} exp\left(P^+\left\{log\, \tilde{a}(t)\right\} + P^-\left\{log\, \tilde{a}(t)\right\}\right) =$$

$$=t^{\aleph}\, exp\left\{log\,\tilde{a}(t)\right\}=t^{\aleph}\tilde{a}(t)=a(t).$$

Откуда следует существование указанной факторизации.

Покажем ее единственность. Ввиду предложения 1.2 условие $\left[a^{+}(t)\right]^{-1}\in W^{+}(\Gamma_1)$ ($\left[a^{-}(t)\right]^{-1}\in W^{-}(\Gamma_1)$) равносильно требованию $a^{+}(z)\neq 0$ при $z\in D^{+}$ ($a^{-}(z)\neq 0$ при $z\in D^{-}$). Откуда ввиду свойств индекса $\underset{t\in\Gamma_1}{ind}\, a^{\pm}(t)=0.$ Поэтому если факторизация (2.14) существует, то

$$\aleph=\underset{t\in\Gamma_1}{ind}\, a^{+}(t)+\underset{t\in\Gamma_1}{ind}\, t^{\aleph}+\underset{t\in\Gamma_1}{ind}\, a^{-}(t)=\underset{t\in\Gamma_1}{ind}\, a(t).$$

С другой стороны, если

$$a(t)=a_1^{+}(t)\cdot t^{\aleph}\cdot a_1^{-}(t)$$

еще одна факторизация функции $a(t)$, то

$$a^{+}(t)a^{-}(t)=a_1^{+}(t)a_1^{-}(t).$$

Поэтому, принимая во внимание, что $W^{+}(\Gamma_1)\bigcap W^{-}(\Gamma_1)=C$. получаем, что

$$\frac{a_1^{+}(t)}{a^{+}(t)}=\frac{a^{-}(t)}{a_1^{-}(t)}=c,$$

где $c-$некоторая ненулевая комплексная постоянная. То есть

$$a_1^{+}(t)=ca^{+}(t),\;\; a_1^{-}(t)=c^{-1}a^{-}(t).\blacktriangleright$$

Замечание 2.3. Из теоремы 2.7 фактически следует, что

$$\textbf{fact W}(\Gamma_1)=\textbf{GW}(\Gamma_1). \qquad (2.15)$$

Если $a(t)$ является рациональной функцией, ни один ноль и ни один полюс которой не лежат на окружности Γ_1, и, следовательно, $a(t)\in W(\Gamma_1)$, то ее факторизация может быть проведена непосредственно без привлечения формул (2.14).

Действительно, пусть $a(t)=\dfrac{p(t)}{q(t)}$, где $p(t)$, $q(t)$ – многочлены; $n_{\pm}$ – числа корней многочлена $p(t)$ в областях $D^{\pm}(\Gamma_1)$ соответственно с учетом их кратностей; $m_\pm$ – аналогичные числа корней многочлена $q(t)$. Пусть далее

$$p(t)=p_+(t)\cdot p_-(t),\ q(t)=q_+(t)\cdot q_-(t),$$

где $p_+(t),\ q_+(t)$ – многочлены, все корни которых лежат в области $D^+(\Gamma_1)$, а $p_-(t),\ q_-(t)$ – многочлены, все корни которых лежат в области $D^-(\Gamma_1)$. Тогда функция $a(t)$ допускает факторизацию вида (2.14), где

$$\aleph=n_+-m_+,\ a^+(t)=\frac{p_-(t)}{q_-(t)},\ a^-(t)=\frac{t^{m_+}p_+(t)}{t^{n_+}q_+(t)}. \tag{2.16}$$

Действительно, все нули и полюса функции $a^+(z)$ лежат в области $D^-(\Gamma_1)$. Поэтому $a^+(t)\in GW^+(\Gamma_1)$. С другой стороны, функция $a^-(z)$ является аналитической в области $D^-(\Gamma_1)$, включая ∞, и все ее нули полюса лежат в области $D^+(\Gamma_1)$, то есть $a^-(t)\in GW^-(\Gamma_1)$. Наконец, по свойству 4) индекса функции $\underset{t\in\Gamma_1}{ind}\,a(t)=n_+-m_+$. Проверка же самого равенства (2.14) элементарна.

Пример 2.3. Вернемся к примеру 2.2, б). Пусть рациональная функция $a(t)$ имеет вид (2.12). Тогда

$$n_+=n_-=2,\ \ m_+=4,\ \ m_-=1,\ \ p_+(t)=2t^2+i,\ \ p_-(t)=(t-2)^2,$$
$$q_+(t)=(3t+1)^3(2t+i),\ \ q_-(t)=t-2i.$$

Поэтому из формулы (2.16) следует, что

$$a(t)=a^+(t)\cdot t^{-2}\cdot a^-(t)=\frac{(t-2)^2}{t-2i}\cdot t^{-2}\cdot\frac{t^2(2t^2+i)}{(3t+1)^3(2t+i)}$$

искомая факторизация функции $a(t)$в алгебре $W(\Gamma_1)$. ►

2.5. Факторизация оператора в алгебре $\mathfrak{W}_p$.

В этом разделе, опираясь на теорему 2.7, теорему 1.3, предложение 1.3 и замечание 1.1 мы проводим факторизацию оператора A в алгебре $\mathfrak{W}_p$.

Через $\mathfrak{W}_p\pm$ обозначим подалгебры операторов свертки в алгебре $\mathfrak{W}_p$, алгебраически изоморфные соответственно подалгебрам $W^\pm(\Gamma_1)$. В силу предложения 1.2 для того, чтобы оператор $A_+\in\mathfrak{W}_{p+}$ ($A_-\in\mathfrak{W}_p-$), необходимо и достаточно, чтобы его символ $a^+(t)\left(a^-(t)\right)$ был аналитически продолжим в область $|z|<1$ (в область $|z|>1$, включая ∞). Из формулы (0.27) следует, что действие операторов $A_\pm$ на последовательность $f=\{f_n\}_{n\in Z}$ равносильно умножению последней соответственно на бесконечные теплицевы матрицы

$$T_+=\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & a_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & a_1 & a_0 & 0 & 0 & . \\ . & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & . \\ . & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_-=\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & . \\ . & 0 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & . \\ . & 0 & 0 & a_0 & a_{-1} & . \\ . & 0 & 0 & 0 & a_0 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Укажем еще одно характеристическое свойство принадлежности операторов $A_\pm$ подалгебрам $\mathfrak{W}_{p\pm}$.

Предложение 2.5. *Для того чтобы $A_\pm\in\mathfrak{W}_{p\pm}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$P_\pm A_\pm P_\pm = A_\pm P_\pm. \tag{2.17}$$

◀ Доказательство проведем лишь для случая оператора A_+, предоставляя читателю рассмотреть самостоятельно случай оператора A_-.

Необходимость. Пусть $f\in l_p(Z)$, $a_+=\mathfrak{L}_z^{-1}\left(a^+(z)\right)$. Так как для последовательностей $a_+\in l_{1+}(Z)$ и $f_+=P_+f\in l_{p+}(Z)$ выполняется формула (1.4.1), то

$$\left(P_+A_+P_+\right)f=P_+\left(a_+*f_+\right)=a_+*f_+=a_+*P_+f=\left(A_+P_+\right)f.$$

Откуда следует соответствующее равенство (2.17).

Достаточность. Пусть $P_+A_+P_+=A_+P_+$. Покажем, что последовательность a_+, порождающая оператор A_+, принадлежит пространству $l_{1+}(Z)=P_+\left(l_1(Z)\right)$.

Действительно,

$$P_+a_+=P_+\left(a_+*e\right)=\left(P_+A_+\right)e=\left(P_+A_+P_+\right)e=\left(A_+P_+\right)e=A_+e=a_+*e=a_+,$$

и, следовательно, в силу свойства 4) проекторов $a_+\in l_{1+}(Z)$. Но тогда $A_+\in\mathfrak{W}_{p+}$. ▶

Замечание 2.4. Операторное равенство (2.17) равносильно равенству

$$P_\mp A_\pm P_\mp = P_\mp A_\pm. \tag{2.18}$$

◀ Действительно, равенство (2.17) равносильно равенству $P_\mp A_\pm P_\pm=0$, так как последнее получается из (2.17) переносом его левой части в правую и использованием соотношения $I-P_\pm=P_\mp$. Но тогда

$$P_{\mp}A_{\pm}P_{\pm} = P_{\mp}A_{\pm}\left(I - P_{\mp}\right) = 0.$$

Откуда и следует формула (2.18).►

Через V обозначим следующий оператор из алгебры $\mathfrak{W}_p$,

$$Vf = \left\{ f_{n-1} \right\}_{n\in Z}, \tag{2.19}$$

который называется *оператором правого сдвига*. Ему обратный оператор действует по формуле

$$V^{-1} f = \left\{ f_{n+1} \right\}_{n\in Z}, \tag{2.20}$$

также принадлежит алгебре $\mathfrak{W}_p$ и называется *оператором левого сдвига*. Так как символ оператора V имеет вид $a(t) = t$, то для любых целых $k,\ k \geq 0,$

$$V^k \in \mathfrak{W}_{p+},\ V^{-k} \in \mathfrak{W}_{p-}.$$

Ввиду изоморфизма алгебр $\mathfrak{W}_p$ и $W(\Gamma_1)$ все результаты о факторизации функции в алгебре $W(\Gamma_1)$ переносятся на операторы свертки из алгебры $\mathfrak{W}_p$.

Именно, следующая теорема является простым следствием указанного изоморфизма и теоремы 2.7.

Теорема 2.8. *Пусть оператор* $A \in \mathfrak{W}_p$ *и его символ* $a(t)$ *удовлетворяет условию* $a(t) \neq 0,\ t \in \Gamma_1$. *Тогда справедливо следующее равенство*

$$A = A_+ V^{\aleph} A_-, \tag{2.21}$$

где

$$A_{\pm} \in \mathfrak{W}_p \pm,\ A_{\pm}^{-1} \in \mathfrak{W}_p \pm,$$

а целое число $\aleph$ *и символы* $a^{\pm}(t)$ *операторов* $A_{\pm}$ *определяются по формулам* (2.14). *При этом представление* (2.21) *оператора A единственно с точностью до постоянных сомножителей (см. замечание 2.2).*

2.6. Оператор Винера-Хопфа. Односторонняя обратимость.

В этом разделе мы рассматриваем оператор

$$W(a) = P_+AP_+, \tag{2.22}$$

где оператор $A \in G\,\mathfrak{W}_p$ и имеет символ *a*. Оператор *W(a)* является дискретным аналогом интегрального оператора типа свертки, носящего имена Н.Винера и Е.Хопфа, и поэтому называется дискретным оператором Винера-Хопфа. На основе теоремы о факторизации оператора *A* мы строим теорию односторонней обратимости оператора *W(a)* в пространстве $l_{p+}(Z) = P_+\left(l_p(Z)\right), 1 \leq p \leq \infty.$

Символом оператора *W(a)* будем называть функцию $a(t)$ вида (1.11), которая является символом оператора *A*. Если выполнено условие (1.12), то будем говорить, что операторы *A* и *W(a)* имеют *невырожденный* символ. В противном случае символ будем называть *вырожденным* или *аннулирующимся*. Условие невырожденности символа является существенным свойством операторов *A* и *W(a)*. Из теоремы 1.3 следует, что оно является необходимым и достаточным условием обратимости оператора A в пространстве $l_p(Z)$, $1 \le p \le \infty$. Если же рассматривать оператор Винера-Хопфа *W(a)* с тем же самым символом, то он, вообще говоря, уже не будет обратимым, а будет обратимым слева, справа или с двух сторон в зависимости от значений индекса его символа.

По этому поводу имеет место следующая теорема.

Теорема 2.9. *Пусть символ* $a(t)$ *оператора W(a) вида* (2.22) *является невырожденным, то есть* $a(t) \ne 0,\ t \in \Gamma_1$, *и* $\aleph = \operatorname*{ind}_{\Gamma_1} a(t)$.

Тогда оператор W(a):

1) *обратим при* $\aleph = 0$;
2) *обратим справа при* $\aleph < 0$;
3) *обратим слева при* $\aleph > 0$;

в пространстве $l_{p+}(Z), 1 \le p \le \infty$. *При этом его обратный с соответствующей стороны или с двух сторон оператор имеет вид*

$$\left[W(a)\right]^{-1} = W\left(1/a^+(t)\right) \cdot W\left(t^{-\aleph}\right) \cdot W\left(1/a^-(t)\right), \tag{2.23}$$

где функции $a^\pm(t)$ *имеют вид* (2.14).

◄ Доказательство теоремы основано на следующем алгебраическом свойстве оператора Винера-Хопфа.

Пусть оператор $A \in \mathfrak{W}_p$, имеет символ $a \in W(\Gamma_1)$ и допускает представление

$$A = A_- \cdot B \cdot A_+, \tag{2.24}$$

где операторы $A_\pm \in \mathfrak{W}_p \pm$ и имеют соответственно символы $a^\pm \in W^\pm(\Gamma_1)$, а оператор $B \in \mathfrak{W}_p$ и имеет символ $b \in W(\Gamma_1)$. Тогда и оператор Винера-Хопфа $W(a)$ разлагается в композицию,

$$W(a) = W\left(a^-\right) \cdot W(b) \cdot W\left(a^+\right). \tag{2.25}$$

При этом если операторы $A_\pm \in G\mathfrak{W}_p \pm$, то операторы $W\left(a^\pm\right)$ также обратимы и

$$\left[W\left(a^\pm\right)\right]^{-1} = W\left(1/a^\pm\right). \tag{2.26}$$

Действительно, ввиду тождеств (2.17) и (2.18)

$$W(a) = P_+AP_+ = P_+A_-BA_+P_+ = \left(P_+A_-P_+\right)\left(P_+BP_+\right)\left(P_+A_+P_+\right).$$

Откуда вытекает равенство (2.25).

Кроме того,

$$W\left(a^\pm\right) \cdot W\left(1/a^\pm\right) = \left(P_+A_\pm P_+\right) \cdot \left(P_+A_\pm^{-1}P_+\right) = P_+A_\pm A_\pm^{-1}P_+ = P_+,$$

$$W\left(1/a^\pm\right) \cdot W\left(a^\pm\right) = \left(P_+A_\pm^{-1}P_+\right) \cdot \left(P_+A_\pm P_+\right) = P_+A_\pm^{-1}A_\pm P_+ = P_+.$$

Откуда вытекают равенства (2.26).

По теореме 2.8 оператор A представим в виде (2.21). По формулам (2.24) и (2.25)

$$W(a)=W\left(a^-\right)\cdot W\left(t^{\aleph}\right)\cdot W\left(a^+\right),$$

где операторы $W\left(a^{\pm}\right)$ обратимы в пространстве $l_{p+}(Z), 1\le p\le\infty$, а их обратные операторы определяются равенствами (2.26). Ввиду тождества

$$\left(P_+V^{-n}P_+\right)\cdot\left(P_+V^{n}P_+\right)=P_+,\ \ n=0,1,..., \qquad (2.27)$$

являющегося следствием формул (2.19), (2.20) и тождества (2.17), оператор $W\left(t^{\aleph}\right)=P_+V^{\aleph}P_+$ обратим при $\aleph=0$, обратим слева при $\aleph>0$ и обратим справа при $\aleph<0$ в пространстве $l_{p+}(Z), 1\le p\le\infty$. При этом обратный с соответствующей стороны или с двух сторон оператор имеет вид

$$\left[W\left(t^{\aleph}\right)\right]^{-1}=W\left(t^{-\aleph}\right). \qquad (2.28)$$

Оператор $W(a)$ обратим с той же стороны или с двух сторон, что и оператор $W\left(t^{\aleph}\right)$. Формула (2.23) доказывается непосредственной проверкой. Например, при $\aleph\ge 0$

$$\left[W(a)\right]^{-1}\cdot W(a)=W\left(1/a^+(t)\right)\cdot W\left(t^{-\aleph}\right)\cdot W\left(1/a^-(t)\right)\cdot W\left(a^-\right)\cdot W\left(t^{\aleph}\right)\cdot W\left(a^+\right)=$$

$$=W\left(1/a^+(t)\right)\cdot W\left(t^{-\aleph}\right)\cdot P_+\cdot W\left(t^{\aleph}\right)\cdot W\left(a^+\right)=W\left(1/a^+(t)\right)\cdot P_+\cdot\ W\left(a^+\right)=\ P_+$$

ввиду формул (2.26) и (2.27).

Аналогичным образом доказывается при $\aleph\le 0$ операторное равенство

$$W(a)\cdot\left[W(a)\right]^{-1}=P_+.\ \otimes ►$$

Перейдем к описанию $KerW(a)$ и $ImW(a)$ при $\aleph\ne 0$.

Теорема 2.10. *В условиях теоремы 2.9 при* $\aleph<0$

$$dim\ KerW(a)=-\aleph,$$

а базис в подпространстве $KerW(a)$ *образуют векторы*

$$V^k b_+,\ \ k=0,1,...,|\aleph|, \qquad (2.29)$$

где b_+ *– вектор коэффициентов Фурье функции*

$$b^+(t)=\left[a^+(t)\right]^{-1}=exp\left(-P^+\left\{log\left[t^{-\aleph}a(t)\right]\right\}\right).$$

При $\aleph>0$ *требование* $f\in ImW(a)$ *равносильно выполнению условий ортогональности*

$$\left(V^k c_+, f\right)=\sum_{j=k}^{\infty} b_{k-j} f_j=0,\ \ k=0,1,...,\aleph-1, \qquad (2.30)$$

где c_+ *- вектор коэффициентов Фурье функции*

$$c^+(t)=\overline{b^-(t)}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{b_{-k}}t^k,$$

а

$$b^-(t)=\left[a^-(t)\right]^{-1}=exp\left(-P^-\left\{log\left[t^{-\aleph}a(t)\right]\right\}\right).$$

◄ Пусть вначале $\aleph<0$. Нетрудно заметить, что подпространство $KerW\left(t^{\aleph}\right)$ состоит из векторов $f=\sum_{k=0}^{|\aleph|-1}\xi_k V^k e,$ где ξ_k – произвольные комплексные постоянные. Для этого достаточно обратиться к матрице оператора $W\left(t^{\aleph}\right)$ (см.(0.26))

$$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad}^{|\aleph|} \\ \begin{pmatrix} 0...0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0...0 & 0 & 1 & 0 & ... \\ 0...0 & 0 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \end{array}.$$

Но уравнения $W(a)f=0$ и $W\left(t^{\aleph}\right)\cdot W\left(a^+\right)f=0$ равносильны. Откуда получаем, что подпространство $KerW(a)$ состоит из векторов вида

$$f=\sum_{k=0}^{|\aleph|-1}\xi_k W\left(1/a^+\right)V^k e=\sum_{k=0}^{|\aleph|-1}\xi_k V^k A_+^{-1}e=\sum_{k=0}^{|\aleph|-1}\xi_k V^k b_+.$$

Принимая во внимание формулу (2.14), получаем справедливость первой части нашего утверждения.

Пусть $\aleph>0$ и $f\in ImW(a)$, что в силу обратимости операторов $W\left(a^{\pm}\right)$ равносильно выполнению условия $W\left(1/a^-\right)f\in ImW\left(t^{\aleph}\right).$ Так как требование $g\in ImW\left(t^{\aleph}\right)$ равносильно выполнению условий

$$\left(V^k e,g\right)=0,\ \ k=0,1,...,\aleph-1,$$

то полагая

$$g=W\left(1/a^-\right)f=P_+\left\{\sum_{j=0}^{\infty}b_{n-j}f_j\right\}_{n\in Z}$$

и учитывая, что по формуле (2.14) $b_{n-j}=0$ при $n>j$, получаем, что условия (2.30) необходимы и достаточны для того, чтобы $f\in ImW(a)$.►

Замечание 2.5. Из теоремы 2.10 следует, что ядро дискретного оператора Винера-Хопфа при $\aleph<0$ не зависит от того, в каком пространстве $l_{p+}(Z),1\le p\le\infty$ рассматривается оператор,

$$KerW(a)\subset l_1\subset l_p,\ \ 1\le p\le\infty.$$

Аналогично условия ортогональности, определяемые при $\aleph > 0$ равенствами (2.30), также не зависят от пространства, в котором рассматривается уравнение Винера-Хопфа, и определяется линейно независимым набором функционалов

$$\left\{V^k c_+\right\}_{k=0}^{\aleph-1} \subset l_1 \subset l_p^*,\ 1 \le p \le \infty.$$

Изложенные выше результаты исследования оператора Винера-Хопфа продемонстрируем на элементарных примерах операторов с рациональными символами.

Пример 2.4. Рассмотрим систему линейных уравнений вида (0.28) с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 4 & -4 & 0 & \dots \\ 2 & 7 & 4 & -4 & \dots \\ 0 & 2 & 7 & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Символ $a(t)$ оператора $W(a)$ в этом случае имеет вид

$$a(t) = 2t^2 + 7t + 4 - 4t^{-1} = (2t-1)(t+2)^2 t^{-1}$$

и является невырожденным. По формулам (2.16) факторизации рациональной функции

$$\aleph(a) = 0,\ a^+(t) = (t+2)^2,\ a^-(t) = 2 - t^{-1}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае система уравнений (0.28) разрешима при любой правой части $g \in l_{p+}(Z), 1 \le p \le \infty$, и имеет единственное решение

$$f = W\left(1/a^+\right) \cdot W\left(1/a^-\right) g = A_+^{-1} P_+ A_-^{-1} P_+ g\ .$$

Для того чтобы найти операторы $\left[A_\pm\right]^{-1}$, разложим функции $\left[a^\pm(t)\right]^{-1}$ в ряды:

$$\left[a^+(t)\right]^{-1} = \frac{1}{(t+2)^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-1}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^k\right]^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{k+1}{2^{k+2}}\ t^k,$$

$$\left[a^-(t)\right]^{-1} = \frac{t}{2t-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2t}\right)^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{k-1}\ t^k.$$

Откуда последовательно получаем, что

$$\left(P_+A_-^{-1}P_+g\right)_m = \sum_{k=m}^{\infty} 2^{m-k-1} g_k,\ m=0,1,...,$$

а решение рассматриваемой системы уравнений имеет вид

$$f_n = \left(A_+^{-1}P_+A_-^{-1}P_+g\right)_n = \sum_{m=0}^{n}\left(-1\right)^{n-m}\cdot\frac{n-m+1}{2^{n-m+2}}\cdot\sum_{k=m}^{\infty}2^{m-k-1}g_k =$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{\infty}\left(-1\right)^{n-m}\frac{n-m+1}{2^{n-2m+k+3}}\ g_k,\ n=0,1,... \blacktriangleright$$

Пример 2.5. Пусть система уравнений вида (0.28) определяется верхнетреугольной теплицевой матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{9}{8} & \frac{9}{16} & \dots \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \frac{9}{8} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a\left(t\right)=1-\frac{7}{2}t^{-1}+9\sum_{k=2}^{\infty}2^{-k}t^{-k}=1-\frac{8}{t}+\frac{9}{2t-1}=\frac{2t^2-8t+8}{2t^2-t}=\frac{\left(t-2\right)^2}{t\left(t-\frac{1}{2}\right)}.$$

Откуда в силу формул (2.16) получаем, что

$$\aleph\left(a\right)=-2,\ a^+\left(t\right)=\left(t-2\right)^2,\ a^-\left(t\right)=\frac{2t}{2t-1}.$$

Из теорем 2.9 и 2.10 следует, что система уравнений (0.28) в данном случае разрешима в пространстве $l_{p+}\left(Z\right), 1\le p\le\infty$, при любой правой части, а однородная система имеет два линейно независимых решения $A_+^{-1}e$ и $A_+^{-1}Ve$. Для отыскания общего вида решения системы опять разложим символы $\left[a^{\pm}\left(t\right)\right]^{-1}$ операторов $\left[A_{\pm}\right]^{-1}$ в ряды:

$$\left[a^+\left(t\right)\right]^{-1}=\frac{1}{\left(t-2\right)^2}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{2}}\right)^2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}t^k,$$

$$\left[a^{-}(t)\right]^{-1} = \frac{2t-1}{2t} = 1 - \frac{1}{2}t^{-1}.$$

Откуда следует, что общее решение $f_0 = \left\{ f_n^0 \right\}_{n=0}^{\infty}$ однородной системы (0.28) имеет вид:

$$f_0^0 = c_1\left(A_+^{-1}e\right)_0 + c_2\left(A_+^{-1}Ve\right)_0 = \frac{c_1}{4},$$

$$f_n^0 = c_1\left(A_+^{-1}e\right)_n + c_2\left(A_+^{-1}Ve\right)_n = \frac{c_1(n+1)+2c_2 n}{2^{n+2}}, \quad n = 1,2,...,$$

где $c_{1,2}$ – произвольные комплексные постоянные.

Воспользовавшись формулой (2.23) для правого обратного оператора $\left[W(a)\right]^{-1}$, получаем, что

$$h_m = \left(V^2 W\left(1/a^{-}\right)g\right)_m = \begin{cases} 0, & m = 0,1, \\ g_{m-2} - \frac{1}{2}g_{m-1}, & m \geq 2, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_n = \left(\left[W(a)\right]^{-1} g\right)_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n-m+1}{2^{n-m+2}}\, h_m = \begin{cases} 0, & n = 0,1, \\ \frac{1}{4}\left(f_0 - \frac{1}{2}f_1\right), & n = 2, \\ \sum\limits_{m=2}^{n} \frac{n-m+1}{2^{n-m+2}}\left(f_{m-2} - \frac{1}{2}f_{m-1}\right), & n \geq 3. \end{cases}$$ ►

Пример 2.6. Решение системы уравнений (0.28) с нижнетреугольной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

где $|\alpha| > 1$, находится методом исключения и определяется рекуррентной формулой

$$f_0 = g_0, \quad f_n = g_n + \alpha f_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} f_k, \; n = 1,2,... \,.$$

При этом легко заметить, что полученная формула, вообще говоря, не порождает вектор из пространства $l_{p+}(Z), 1 \leq p \leq \infty$. Полагая, например,

$f_0 = 1,\ \ f_k = 0, k \geq 1,$ получаем, что последовательность $f_n = \alpha^n,\ n = 0,1,2,...,$ неограниченно возрастает. Ответ на вопрос, при каких правых частях разрешима данная система уравнений, дает теорема 2.10.

Действительно, символ $a(t)$ оператора $W(a)$ в данном случае имеет вид $a(t) = 1 - \alpha t,$ то есть

$$\aleph(a) = 1,\ \ a^+(t) = 1,\ \ a^-(t) = t^{-1} - \alpha.$$

Поэтому данный оператор Винера-Хопфа обратим слева. Так как

$$\left[a^-(t)\right]^{-1} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha t}} = -\sum_{k=-\infty}^{0} \alpha^{k-1} t^k,$$

то единственное необходимое и достаточное условие разрешимости рассматриваемой системы уравнений, то есть условие принадлежности полученного вектора $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространству $l_{p+}(Z), 1 \leq p \leq \infty$ определяется формулой (2.30) и имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-k} g_k = 0.$ ►

Рабочий список литературы

1. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., 1971.
2. Крейн М.Г., Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов// УМН.1958.Т.13.вып.5.С.3-120.
3. Пресдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений. М..1979.
4. Дыбин В.Б., Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. Ростов – на – Дону, 1988.
5. Пасенчук А.Э., Абстрактные сингулярные операторы. Новочеркасск. 1993.
6. Dybin V.B., Grudsky S.M.: Introduction to the theory of Toeplitz operators with infinite index. Operator Theory: Advances and Applications, № 137, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2002.
7. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И., Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978, 296 с.
8. Гарнетт Дж., Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984, 469с.
9. Курош А.Г., Курс Высшей алгебры. М.: Наука, 1975, 432с.
10. Крупник Н.Я.,
11. Гахов Ф.Д., Краевые задачи. М.: Мир, 1977, 640 с.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ, М.: Наука, 1977, 741с.
13. Воробьев Н.Н., Числа Фибоначчи, М., «Наука», 1984.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.
15. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е., Коммутативные нормированные кольца. М., Физматгиз, 1960.
16. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Том 1, М., Мир, 1965.
17. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Том 2, М., Мир, 1965.
18. Привалов И.И., Введение в теорию функций комплексного переменного, М., Наука, 1967.
19. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я., Введение в теорию одномерных сингулярных операторов, Кишинев, Штиинца, 1973.
20. Дыбин В.Б., Лекции по алгебре.
21. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Лекции по теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1982.
22. Наймарк М.А., Нормированные кольца, М., Наука, 1968.