Лабораторная работа.
Построение интерполяционного многочлена Эрмита

Постановка задачи. Рассмотрим функцию, заданную таблично

x_1	x_2	$\dots$	x_n
f_1	f_2	$\dots$	f_n

здесь $x_1, x_2, \dots x_n$ — узлы интерполяции, в которых известны значения функции $f_1, f_2, \dots f_n$. В узле x_1 также задано значение производной df_1. Требуется для этой функции построить интерполяционный многочлен, для которого выполняются условия

$$N(x_k) = f_k, k = 1, 2, \dots, n \quad N'(x_1) = df_1$$

Такой многочлен называется *интерполяционным многочленом Эрмита.*

Элементы теории. Для построения многочлена добавим в таблицу значений еще один узел

$$x_0^\varepsilon = x_1 + \varepsilon$$

и будем строить интерполяционный многочлен в форме Ньютона для таблицы из $(n+1)$-узла:

x_0^ε	x_1	$\dots$	x_n
f_0^ε	f_1	$\dots$	f_n

$$N_n(x) = f(x_0^\varepsilon) + f(x_0^\varepsilon; x_1)(x - x_0^\varepsilon) + \dots f(x_0^\varepsilon; x_1; \dots; x_n)(x - x_0^\varepsilon)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Коэффициенты этого многочлена определяются по таблице разделенных разностей:

x_0^ε	f_0^ε	$f(x_0^\varepsilon; x_1) = df1$	$f(x_0^\varepsilon; x_1; x_2)$	$f(x_0^\varepsilon; x_1; x_2; x_3)$
x_1	f_1	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	–
x_2	f_2	$f(x_2; x_3)$	–	–
x_3	f_3	–	–	–

Приведем расчет разделенной разности первого порядка с узлом x_0^ε:

$$f(x_0^\varepsilon; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0^\varepsilon)}{x_1 - x_0^\varepsilon} = df_1, \varepsilon \to 0$$

Таким образом, для построения многочлена Эрмита следует использовать многочлен Ньютона, который при $\varepsilon \to 0$ примет вид

$$\begin{gathered}N_n(x) = f(x_1) + df_1\,(x - x_1) + f(x_1; x_1; x_2)(x - x_1)^2 + \dots \\ +f(x_1; x_1; \dots; x_n)\,(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-1})\end{gathered}$$

Методические указания

- Возьмите в качестве теста любой многочлен третьей степени. Например, для $f(x) = x^3 + 1$, построим таблицу значений

-1	0	1
0	1	2

Добавим еще одно условие для узла $x_1 = -1$

$$df_1 = 3$$

Для построения многочлена Эрмита добавим в таблицу узел $x_0 = -1 + \varepsilon$ и будем строить многочлен Ньютона, как в задаче обычного интерполирования. Построим таблицу разделенных разностей:

$-1+\varepsilon$	0	$f(x_0^\varepsilon; x_1) = df1 = 3$	$f(x_0^\varepsilon; x_1; x_2) = \frac{1-35}{0+1} = -2$	$f(x_0^\varepsilon; x_1; x_2; x_3) = \frac{0+2}{1+1} = 1$
-1	0	$f(x_1; x_2) = \frac{1-0}{0+1} = 1$	$f(x_1; x_2; x_3) = \frac{1-1}{1+1} = 0$	$-$
0	1	$f(x_2; x_3) = \frac{2-1}{1-0} = 1$	$-$	$-$
1	2	$-$	$-$	$-$

Подставим значения разделенных разностей в многочлен Ньютона, получим

$$N_3(x) = 0 + 3\,(x+1) - 2\,(x+1)^2 + 1\,(x+1)^2\,x = x^3 + 1$$

- Напишите процедуру для построения ИМ Ньютона $MNewton(N, X, Y)$. Проверьте ее работу на обычном примере.
- Модифицируйте процедуру для построения ИМ Эрмита, добавив параметр DY для передачи значения производной. Это значение производной будет перенесено в таблицу разделенных разностей в столбец разностей первого порядка.
- Задайте значения узлов, значения функции, производной. Вызовите процедуру для многочлена Ньютона. Проверьте выполнения всех условий интерполирования.
- Сохраните результаты работы для теста в личной папке под именем МНОГОЧЛЕНЭРМИТА(ТЕСТ).MWS.
- Используйте написанную программу для выполнения индивидуального задания. Сохраните результаты работы для индивидуального задания в личной папке под именем МНОГОЧЛЕНЭРМИТА(ВАРИНД).MWS.
- Оформите отчет, который включает: текст задания, описание метода интерполирования, код с результатами прогона для теста и индивидуального задания.