

Частотные методы улучшения изображений

Лекция 6

Частотная обработка изображений

- Базируется на Фурье-анализе
- Частично подходы частотной обработки аналогичны подходам пространственной обработки
- Частично подходы частотной обработки дополняют подходы пространственной обработки

Главное научное достижение Фурье

Изложено в мемуарах в 1807

Полностью опубликовано в 1822 в книге «Аналитическая теория тепла»

В 1878 переведена на английский Фрименом

Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье



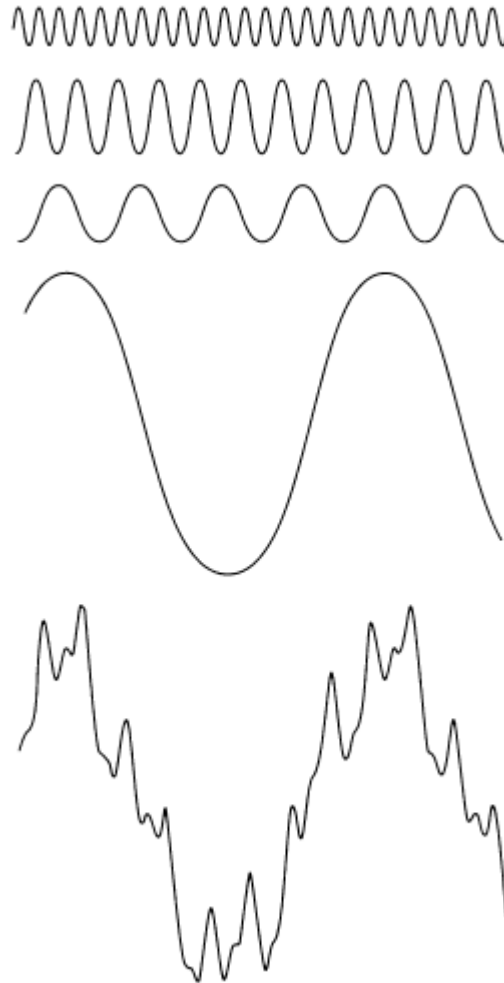
Жан Батист Жозеф Фурье
(1768 — 1830)

Результат Фурье

Любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы синусов и/или косинусов различных частот, умноженных на некоторые коэффициенты.

Сумма – ряд Фурье

Нижняя функция – сумма четырех верхних



Результат Фурье для непериодической функции

Если функция **не** является **периодической**, но **площадь под графиком её модуля конечна**, она может быть выражена в виде интеграла от синусов и/или косинусов, умноженных на некоторую весовую функцию.

Преобразование Фурье

Характерная особенность

Функция, заданная как рядом, так и преобразованием Фурье, может быть **полностью восстановлена** при помощи процедуры обращения.

Идея частотных преобразований

Область определения функции



Область Фурье



Область определения функции

Где применяется

- В начале 60-х Революция в области обработки сигналов
 - ЭВМ
 - БПФ
- Обработка сигналов
- Обработка звука
- Форматы звуковых файлов (например, MP3 и JPEG)
- **Обработка изображений**
- **Медицинская диагностика**
- Шифрование
- Средства электронной связи
- ...

Применение к обработке изображений

Изображения – функции конечной протяженности



Преобразование Фурье

Одномерный случай

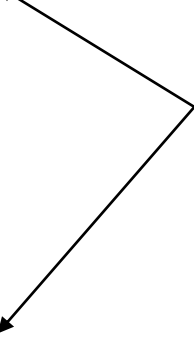
- Прямое Фурье-преобразование (Фурье-образ)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

- Обратное Фурье-преобразование

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du$$

Пара преобразований Фурье



Фурье-пара



$F(u)$ $f(x)$

Двумерный случай

- Прямое Фурье-преобразование (Фурье-образ)

$$F(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- Обратное Фурье-преобразование

$$f(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

Дискретная форма

Прямое дискретное преобразование Фурье

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i2\pi ux/M}, \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Обратное дискретное преобразование Фурье

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{i2\pi ux/M}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Область значений переменной u – частотная область

Каждый из M элементов $F(u)$ – частотная компонента преобразования

Область значений переменной x – временная область

Каждый из M элементов $f(x)$ – временная компонента

Фурье-спектр, энергетический спектр и фаза

Представление в полярных координатах $F(u) = |F(u)|e^{-i\varphi(u)}$

Модуль или спектр Фурье-преобразования

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

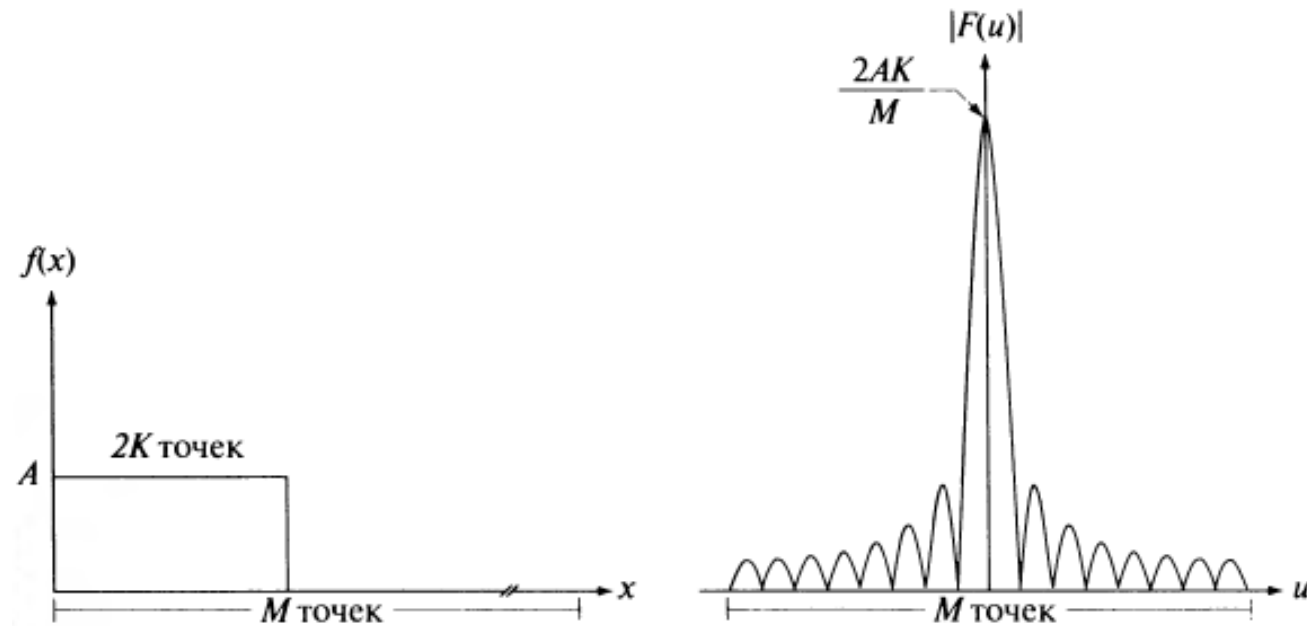
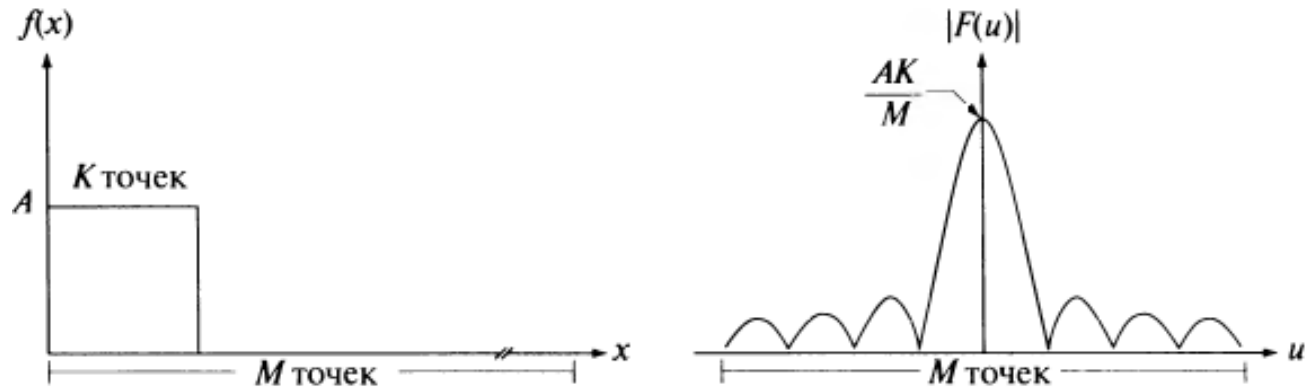
Энергетический спектр или спектральная плотность

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Фаза или фазовый спектр Фурье-преобразования

$$\varphi(u) = \operatorname{arctg} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

Пример. Фурье-спектры



Взаимосвязь между шагом дискретизации и частотными интервалами

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{X}$$

частотное
разрешение

$$M\Delta u = \frac{1}{\Delta x}$$

диапазон
частот

$$\Delta x = \frac{1}{M\Delta u} = \frac{1}{U}$$

Двумерное ДПФ и его обращение

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- u, v – переменные преобразования или частотные переменные
- x, y – переменные изображения или пространственные переменные

Фурье-спектр, энергетический спектр и фаза

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$$\varphi(u, v) = \operatorname{arctg} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

Взаимосвязь между шагом дискретизации и частотными интервалами

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

частотное разрешение

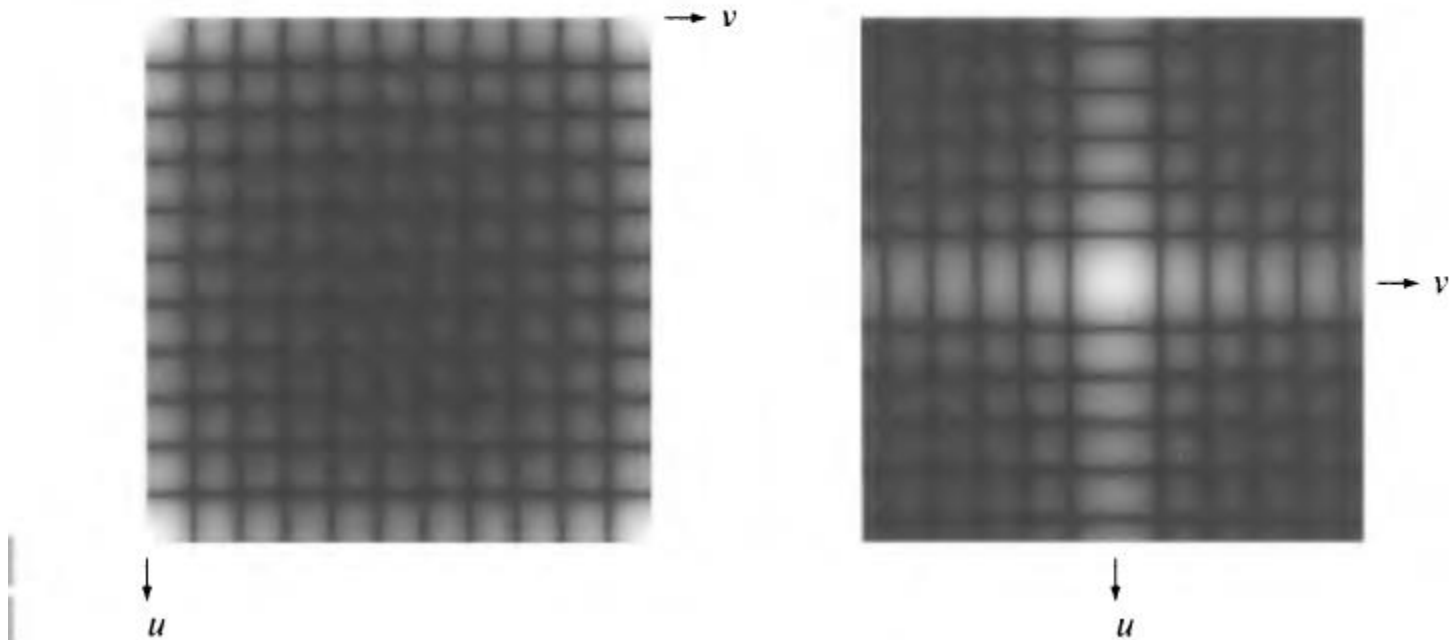
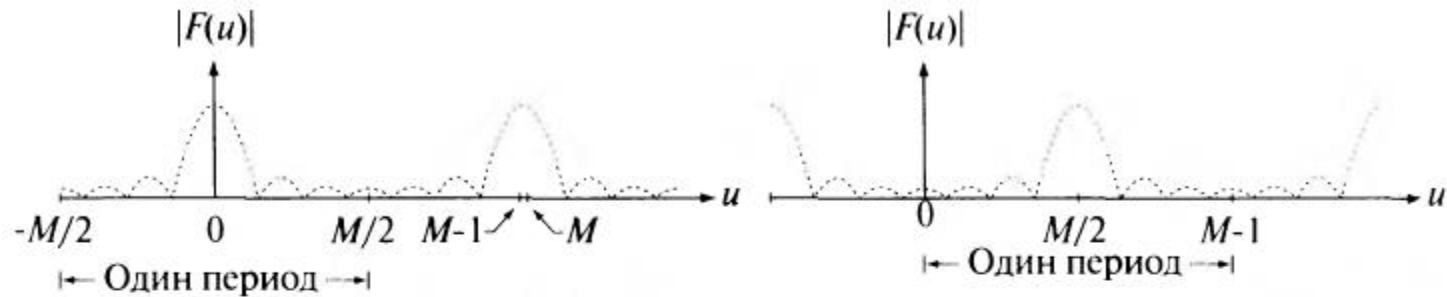
Фурье-образ для действительных функций
будет симметрично сопряжённым

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

Периодичность

$$\mathfrak{F}\left[f(x, y)(-1)^{x+y}\right] = F(u - M/2, v - N/2)$$



Постоянная составляющая спектра

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

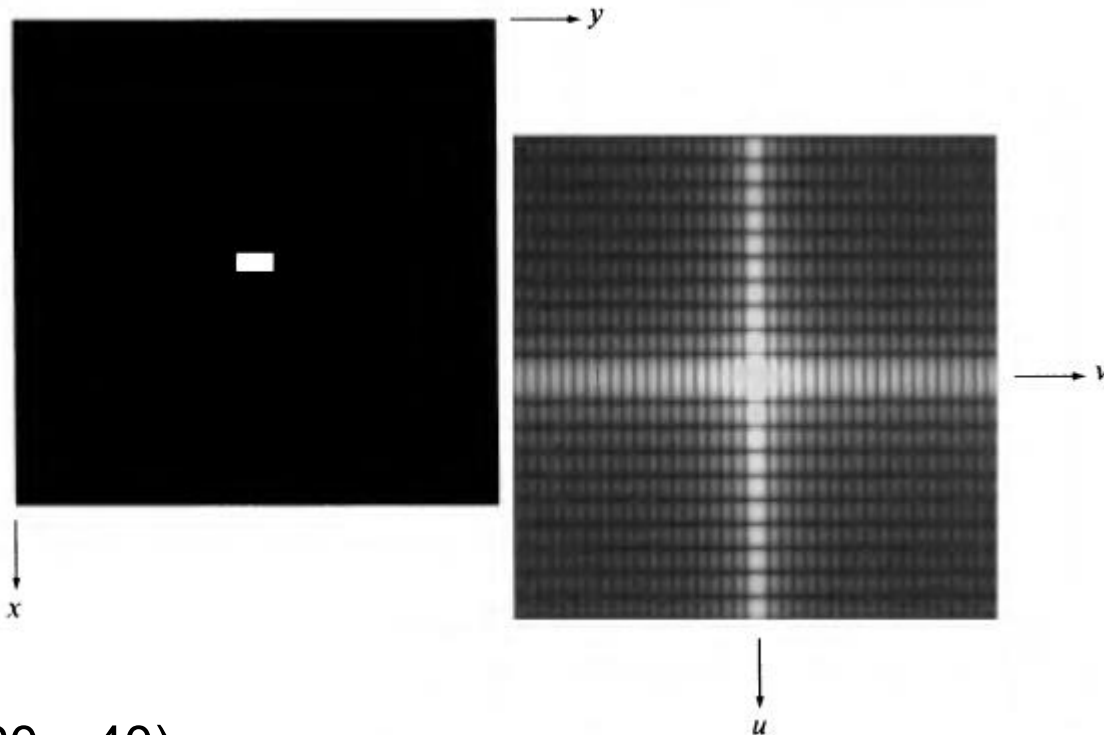
$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Среднее значение яркости на изображении

Основные свойства частотной области

- Постоянная частотная составляющая ($u=v=0$) совпадает со средней яркостью изображения
- Низкие частоты (вблизи начала координат) соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения
- Высокие – быстро меняющимся

Пример. Центрированный спектр простой двумерной функции



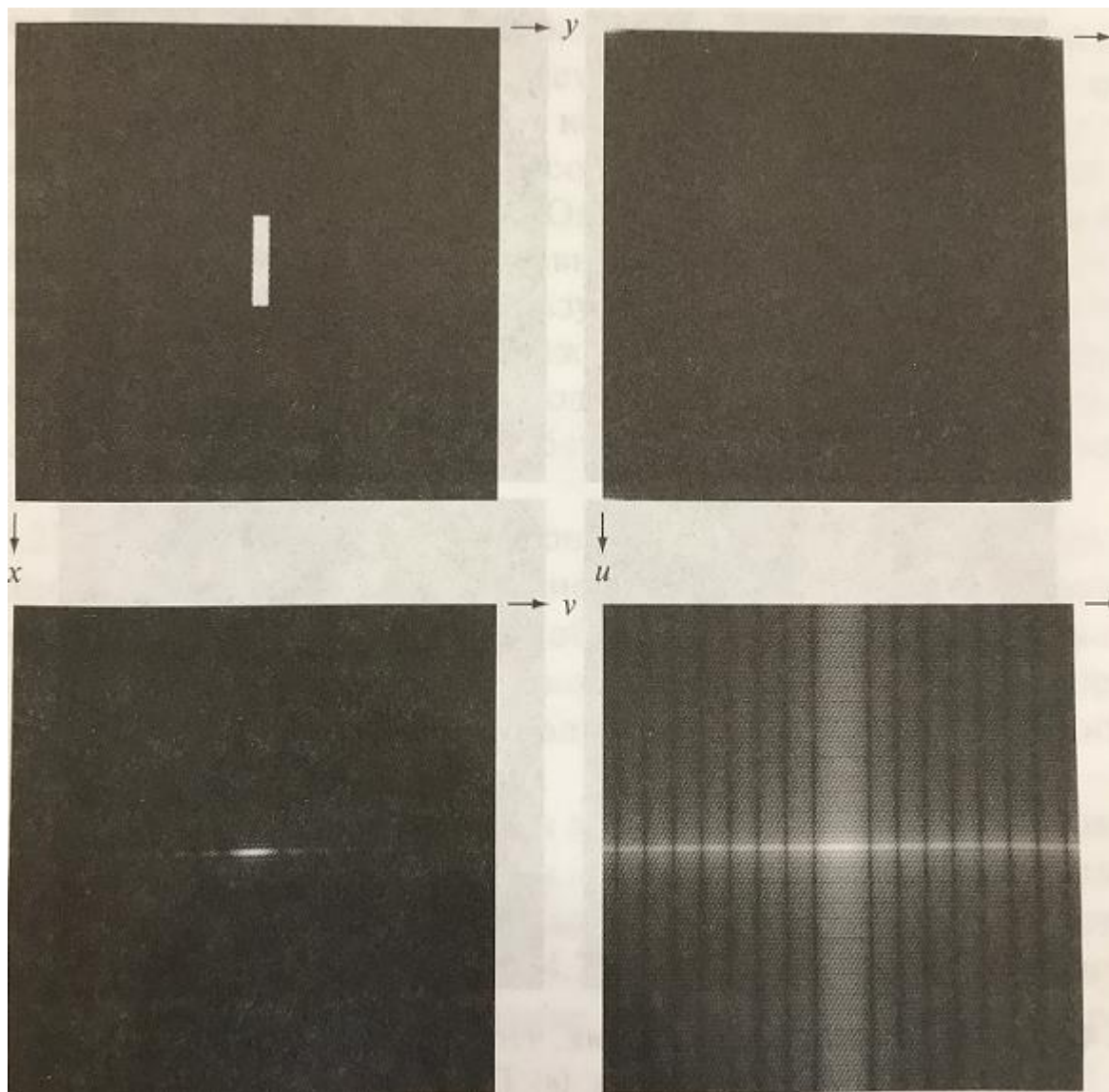
Белый (20 x 40) на
черном (512 x 512)

$$* (-1)^{x+y}$$

Центрированный спектр (после
логарифмического
преобразования яркости)

Изображение → Спектр

Изображение



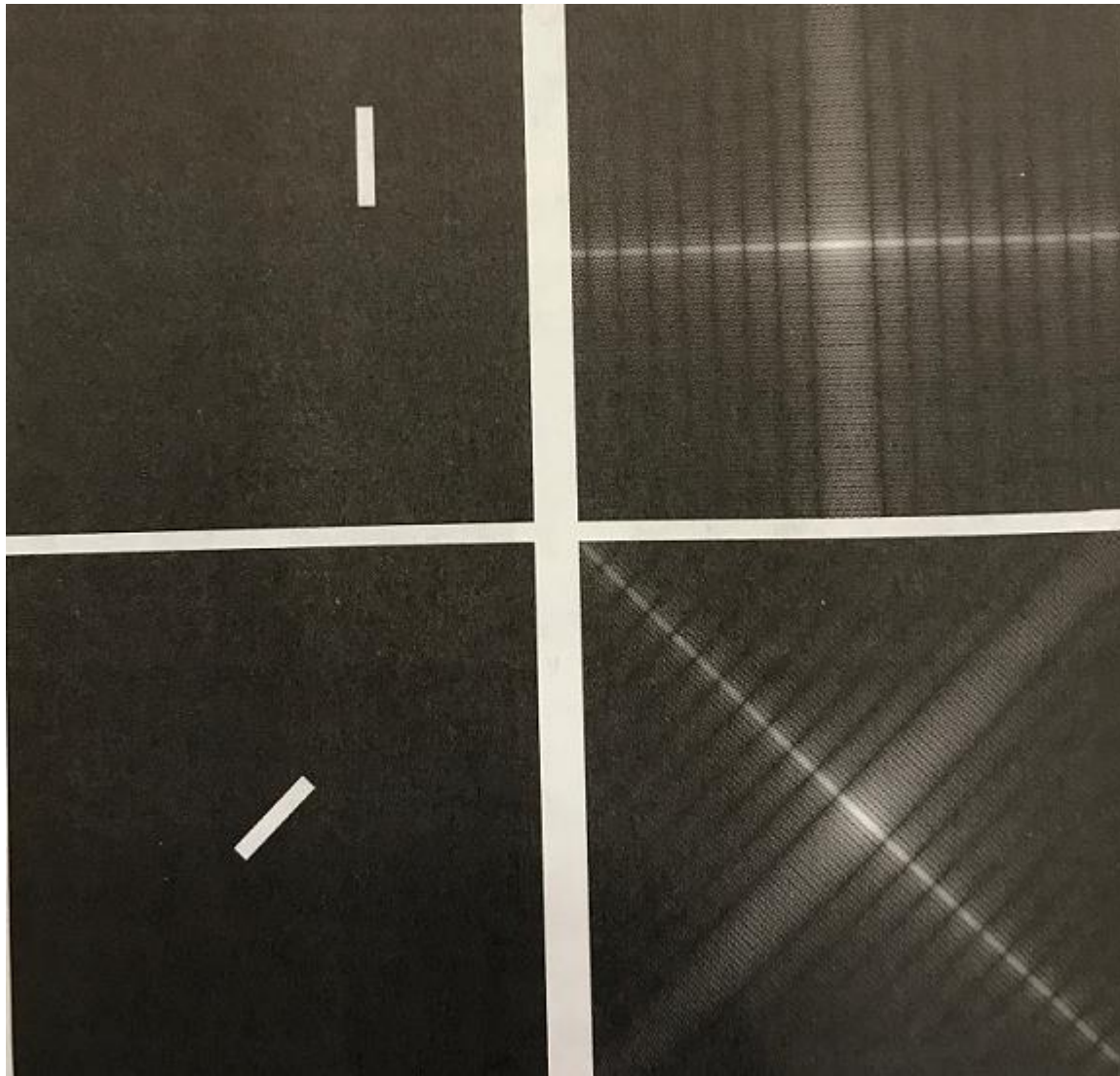
Спектр

Яркие
пятна в
углах

Центрирован
ный спектр

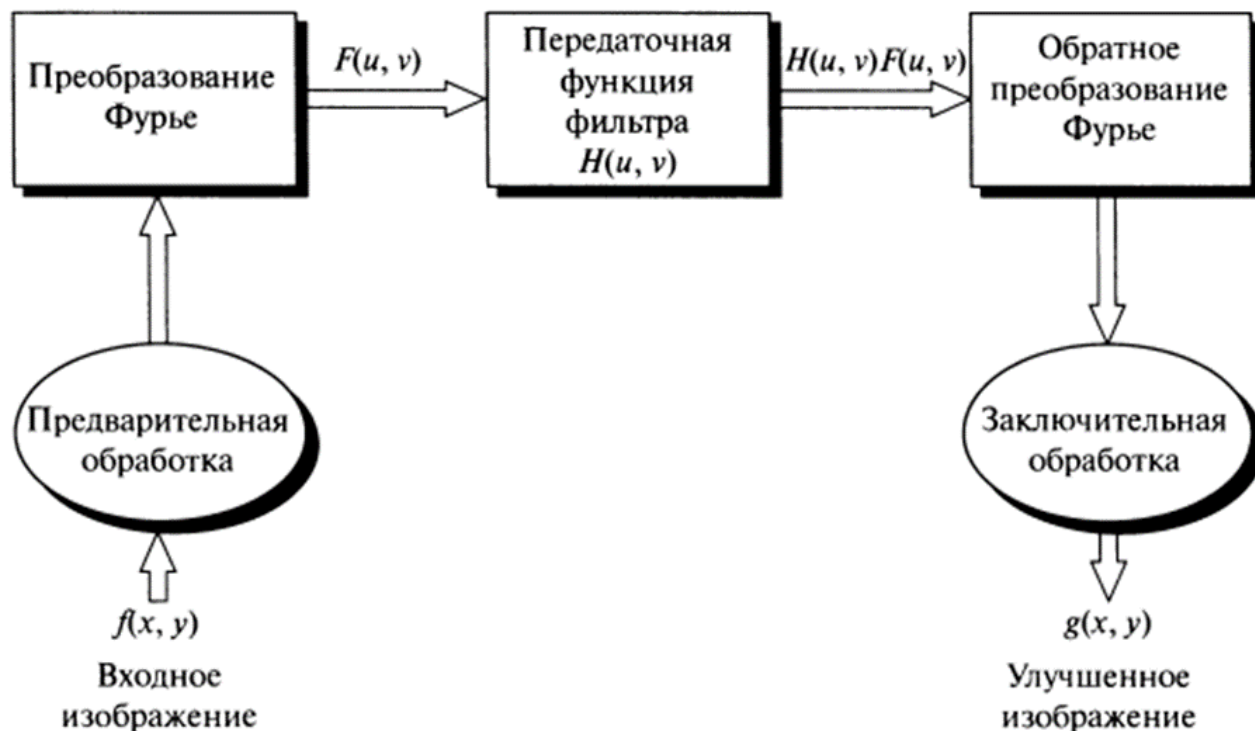
Результат логарифмических
преобразований

Сдвинутый и повёрнутый прямоугольник

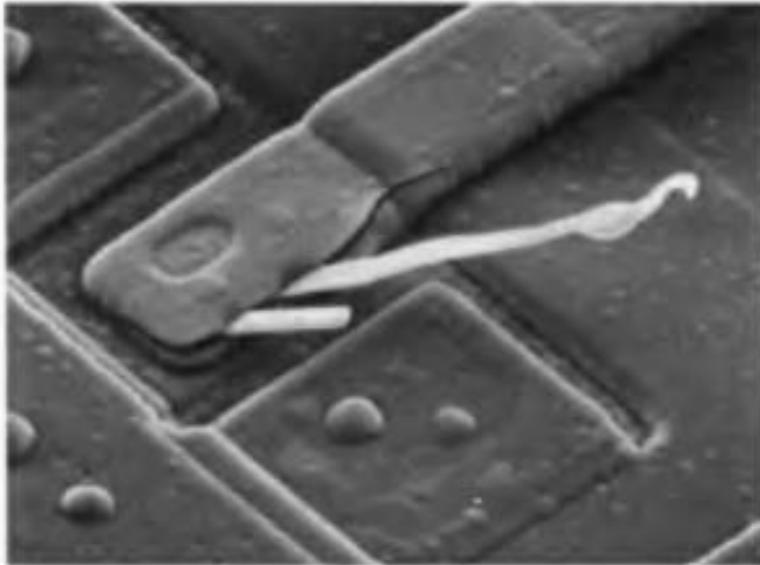


Процедура фильтрации в частотной области

1. Изображение * $(-1)^{x+y}$
2. Вычисляется прямое ДПФ $F(u, v)$
3. Функция $F(u, v)$ * функцию фильтра $H(u, v)$
4. Вычисляется обратное ДПФ
5. Выделяется вещественная часть
6. * $(-1)^{x+y}$



Пример. Изображение и его Фурье-спектр



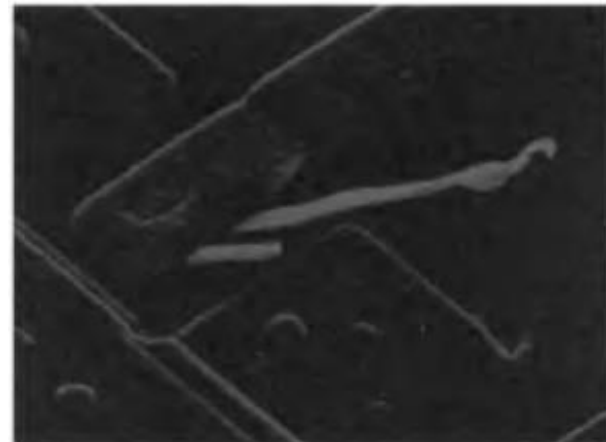
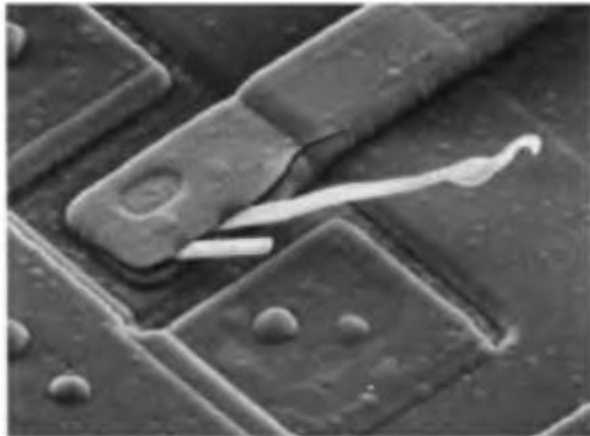
Увеличенное в 2500 раз изображение интегральной схемы, полученное сканирующим электронным микроскопом

Brockhouse Institute for Material Research

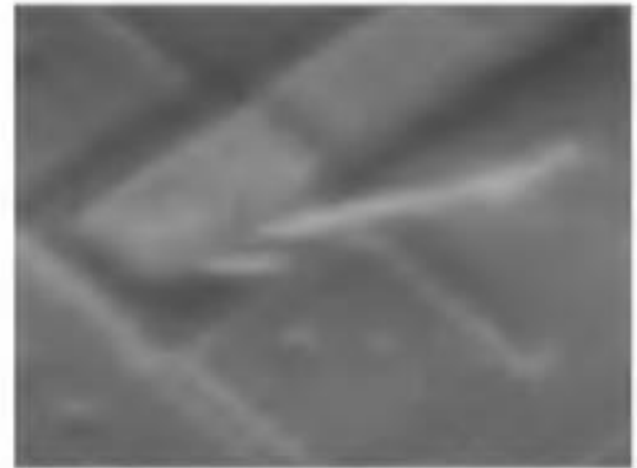
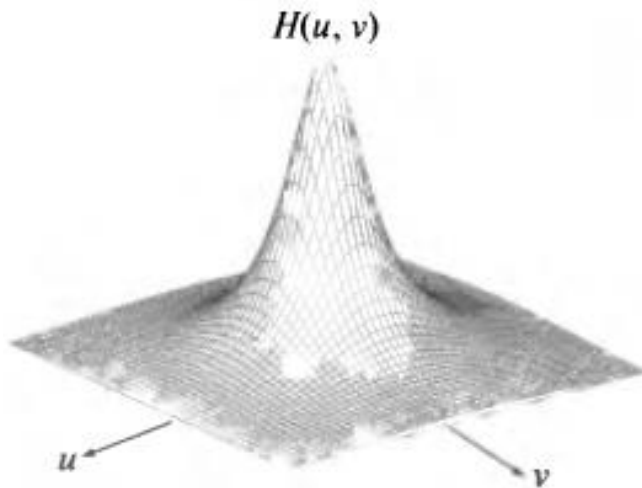
Основные фильтры

Фильтр пробка – узкополосный режекторный фильтр –
обнуление среднего

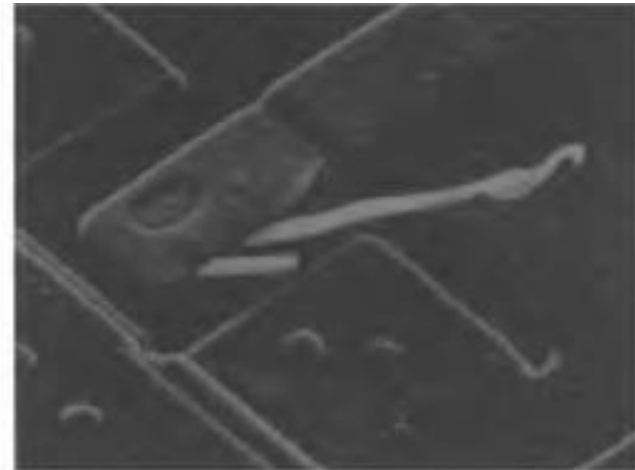
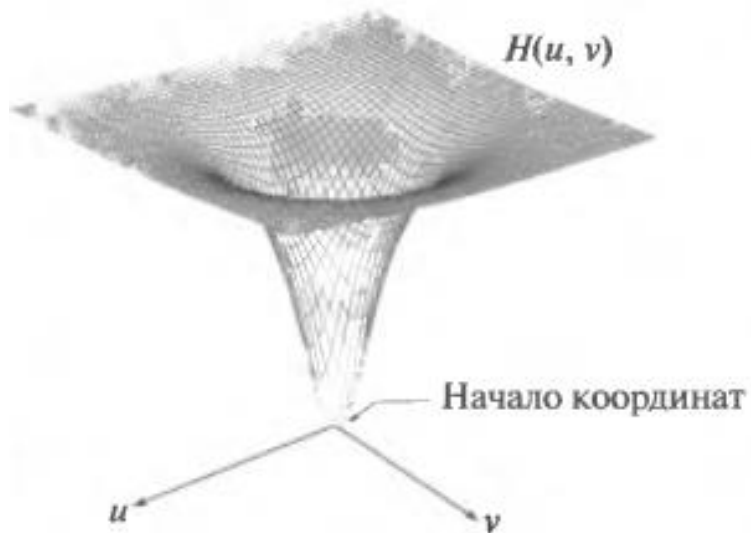
$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{при } (u, v) = (M / 2, N / 2) \\ 1, & \text{в другом случае} \end{cases}$$



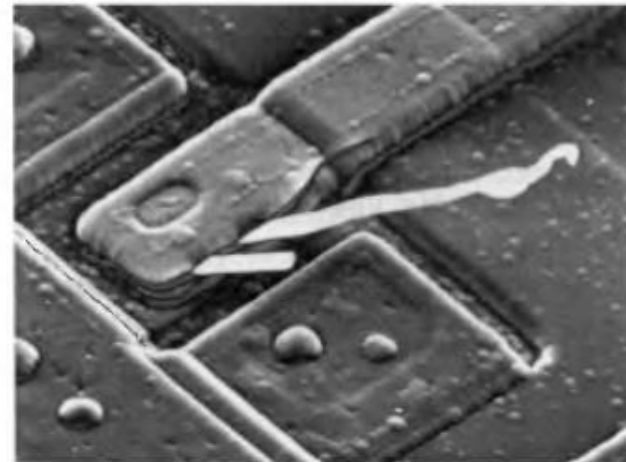
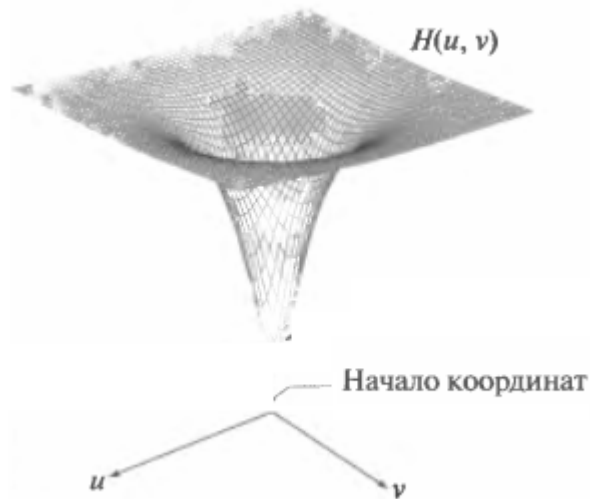
Низкочастотный фильтр



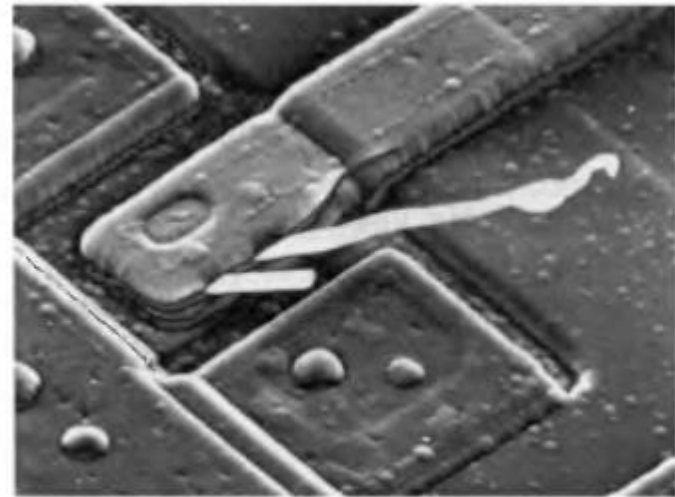
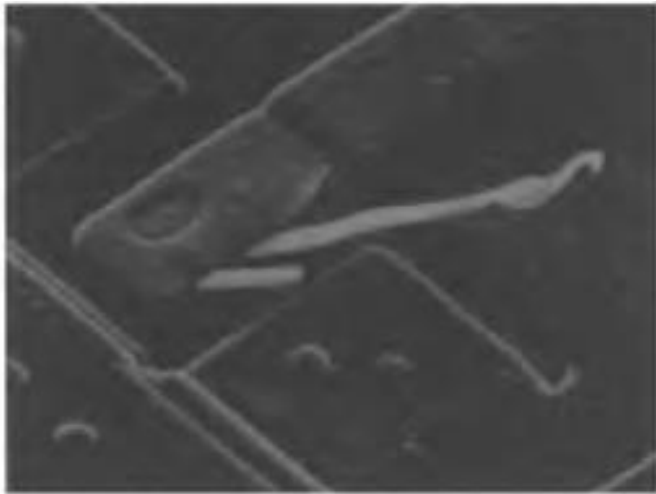
Высокочастотный фильтр



Высокочастотный фильтр с добавлением к передаточной функции константы, равной половине высоты фильтра



Высокочастотный и высокочастотный с усилением



Теорема о свёртке

Соответствие между фильтрацией в частотной и пространственной областях

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

Дискретная свёртка

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

Сравнение фильтров

- Частотные почти всегда нагляднее
- Пространственные много меньшего размера

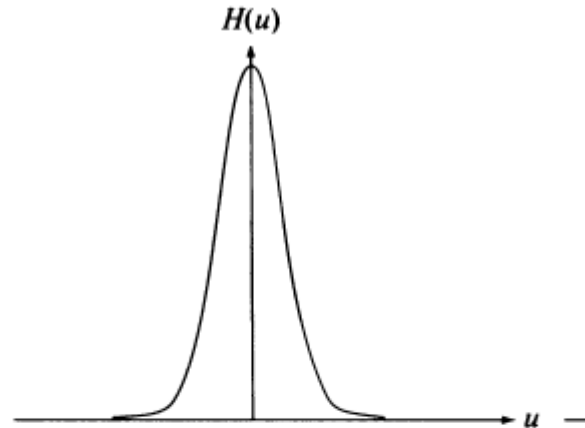
Частотный → Прообраз (пространственный) → Маска меньшего размера

Получение пространственного фильтра из частотного

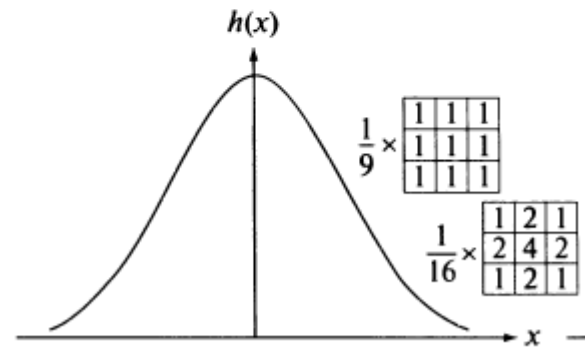
1. Функция фильтра $H(u, v) * (-1)^{u+v}$
2. Вычисляется обратное ДПФ
3. Вещественная часть $* (-1)^{x+y}$

Фурье-пара гауссова фильтра

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$



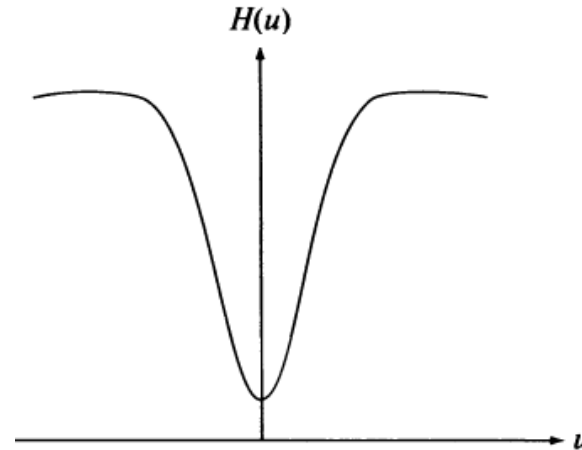
$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$



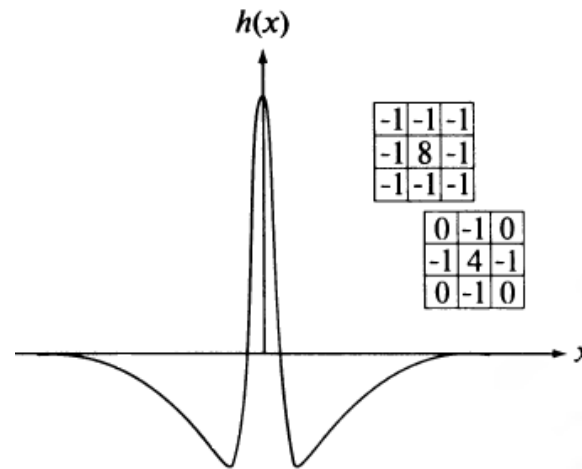
Низкочастотный

Фурье-пара гауссова фильтра

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2}$$

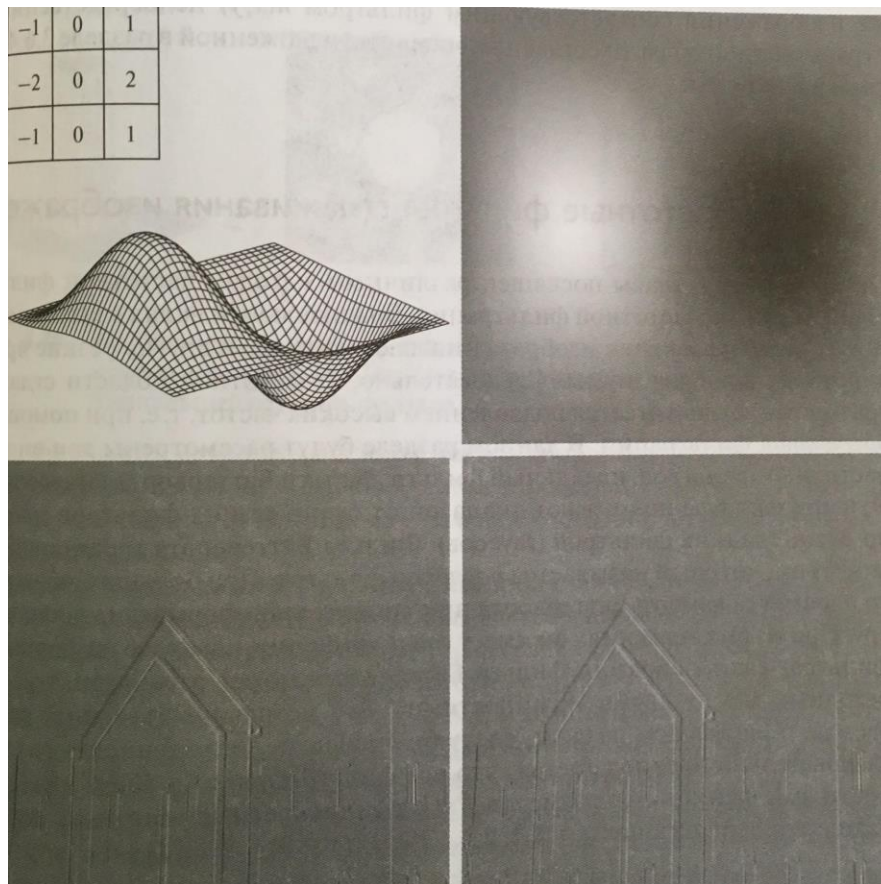


$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma Ae^{-2\pi^2\sigma^2x^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 B e^{-2\pi^2\sigma_2^2x^2}$$



Высокочастотный

Пространственная и частотная маски



Частотная
фильтрация

Пространственная
фильтрация

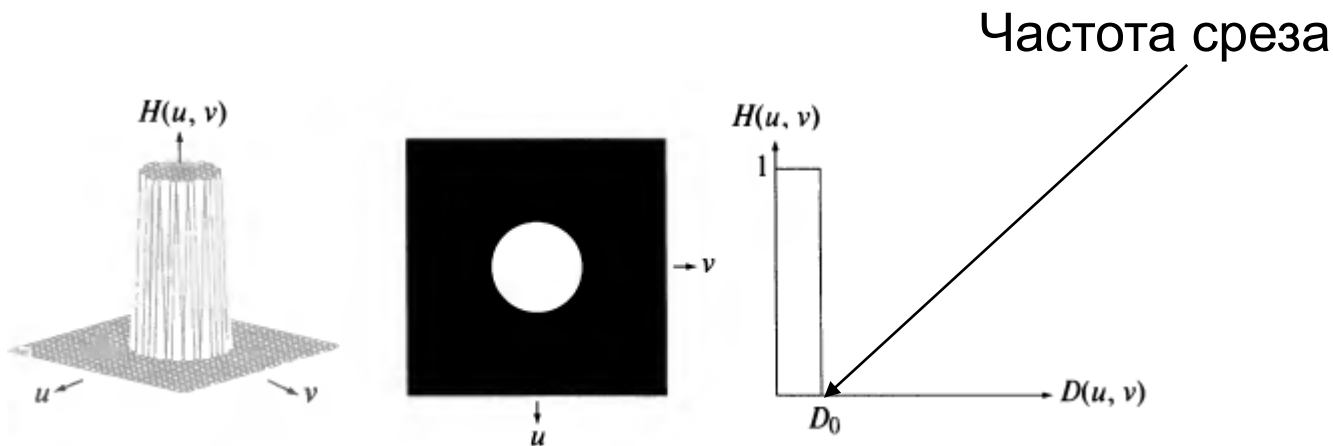
Сглаживающие низкочастотные фильтры

- Идеальные фильтры низких частот – очень резкий
- Фильтр Баттерворта – переходный (зависит от порядка)
- Гауссов фильтр – очень гладкий

Идеальные фильтры низких частот (ИФНЧ)

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{при } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2}$$



Величины для сравнение низкочастотных фильтров

Полная энергия

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

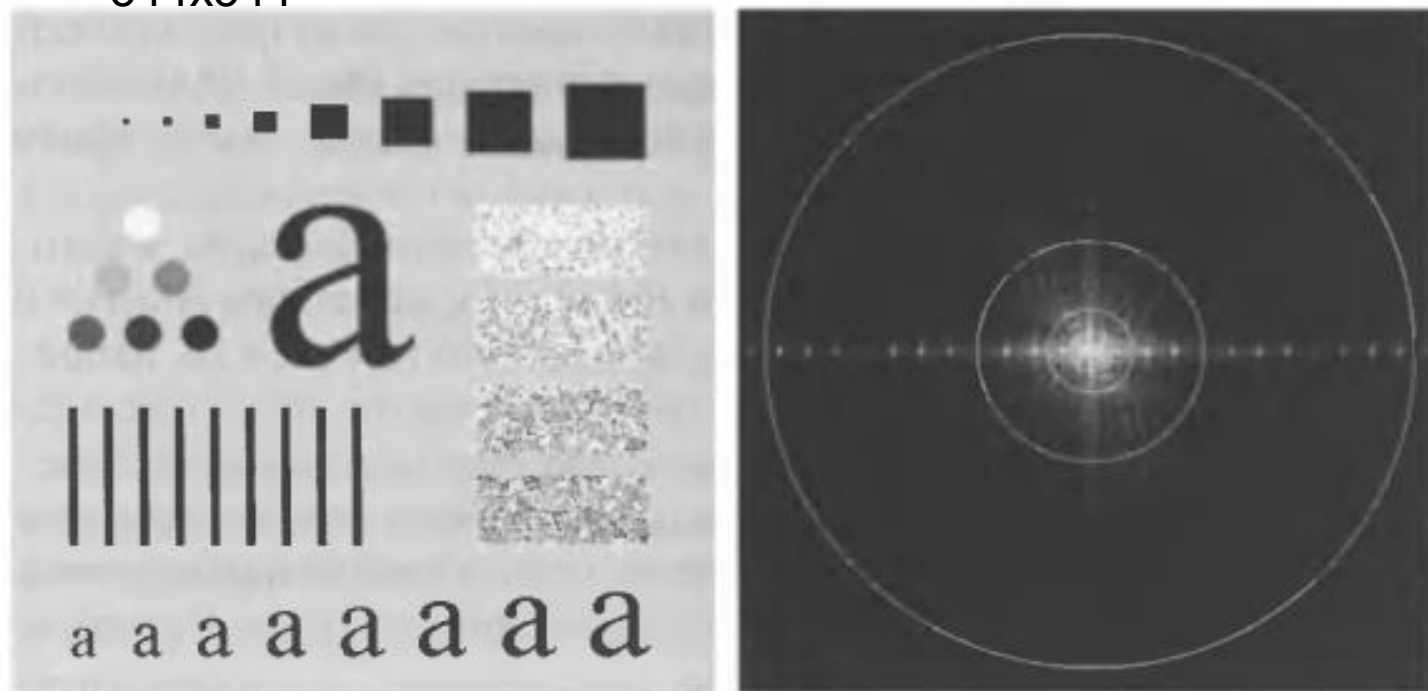
$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

$$\alpha = 100 \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

Частота $r(\alpha)$ – радиус круга с центром в центре частотного прямоугольника, содержащего α процентов энергии спектра

Пример. Энергия изображения как функция расстояния от центра ДПФ

344x344



$R = 5, 15, 30, 80, 230$

$\alpha = 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, 99.5$

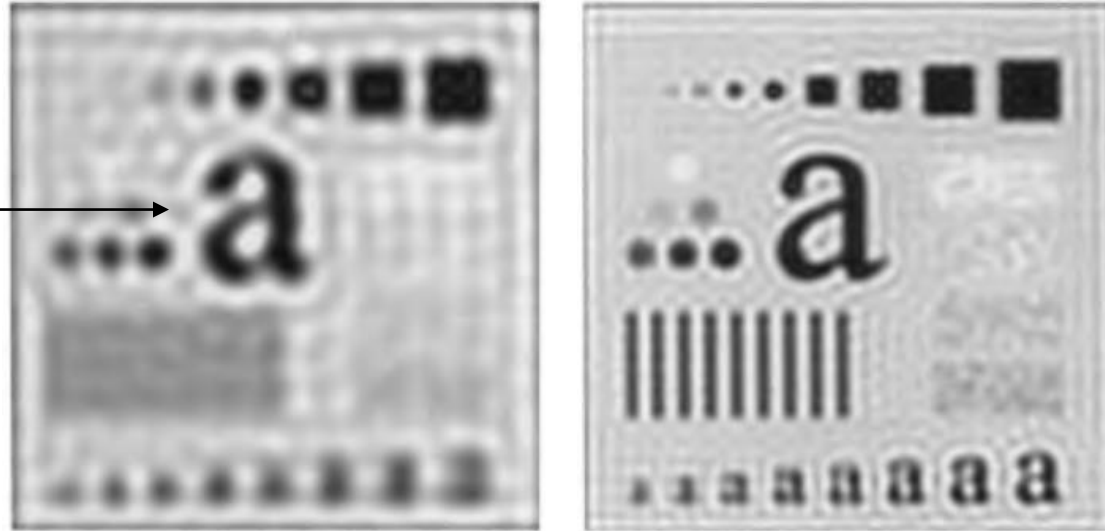
Результаты фильтрации



$$R = 5, \alpha = 92$$

Результаты фильтрации

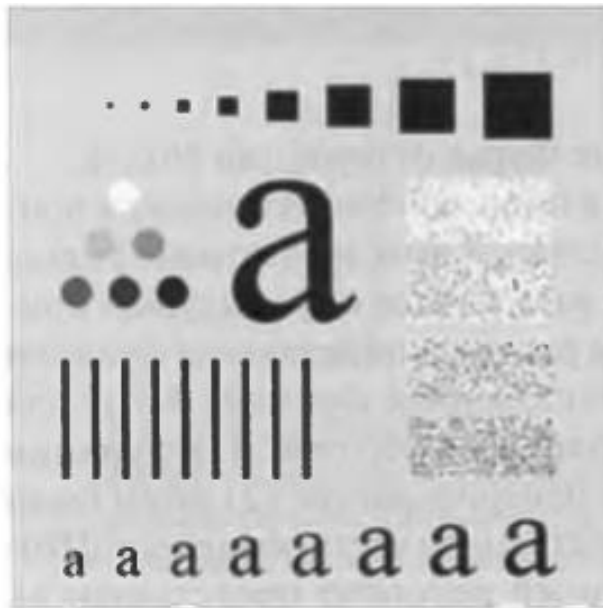
Звон
(явление
Гиббса)



$R = 15, \alpha = 94.6$

$R = 30, \alpha = 96.4$

Результаты фильтрации

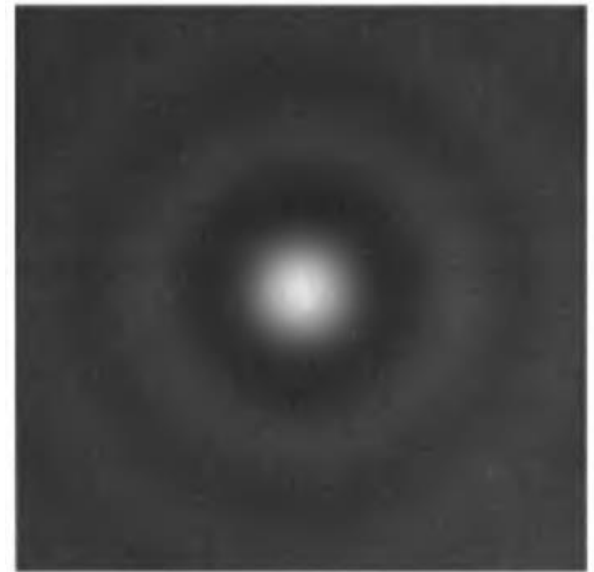
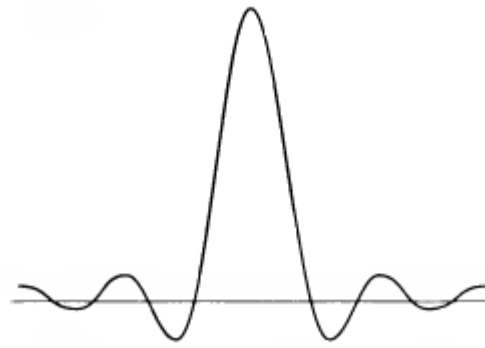
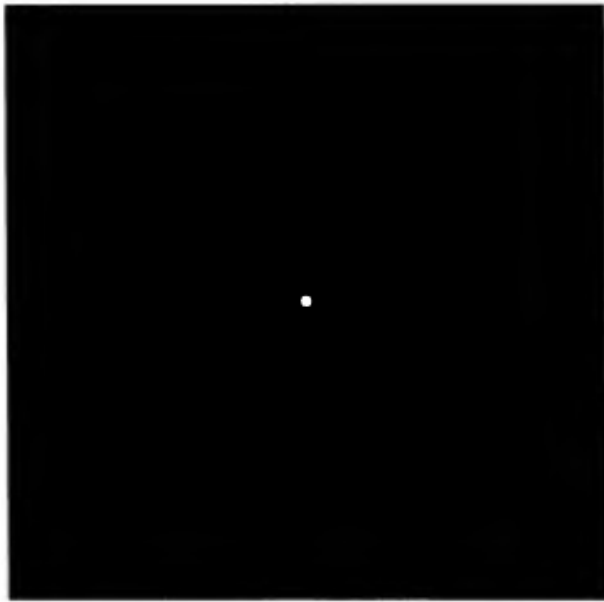


$R = 80, \alpha = 98$



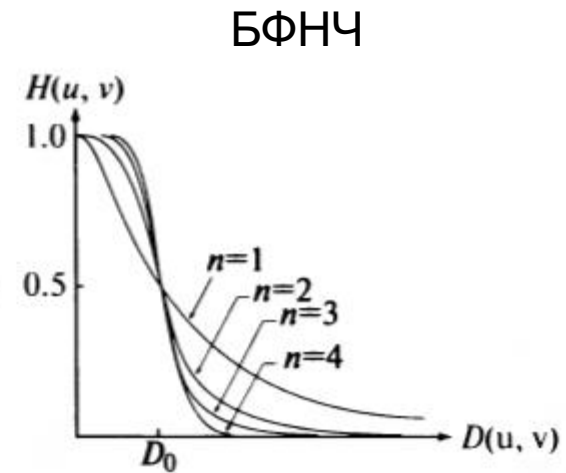
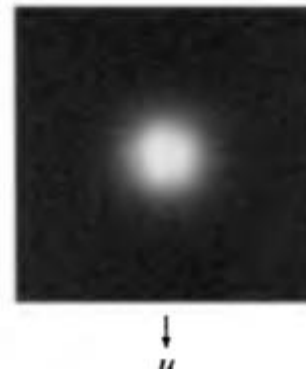
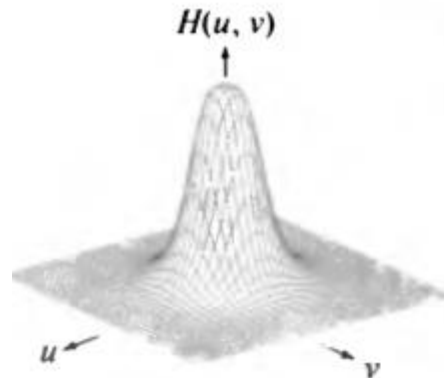
$R = 230, \alpha = 99.5$

Откуда берется звон



$R = 5$, $M \times N = 1000 \times 1000$

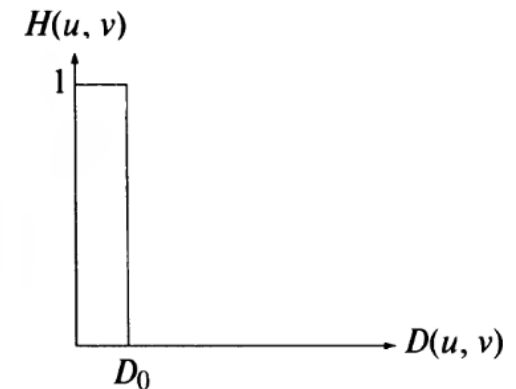
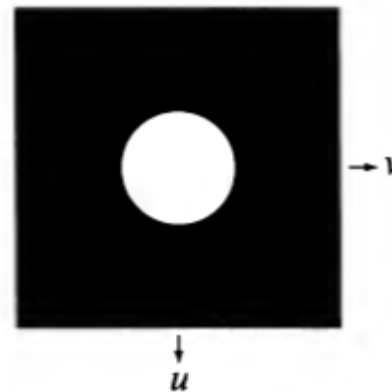
Фильтры низких частот Баттерворта (БФНЧ)



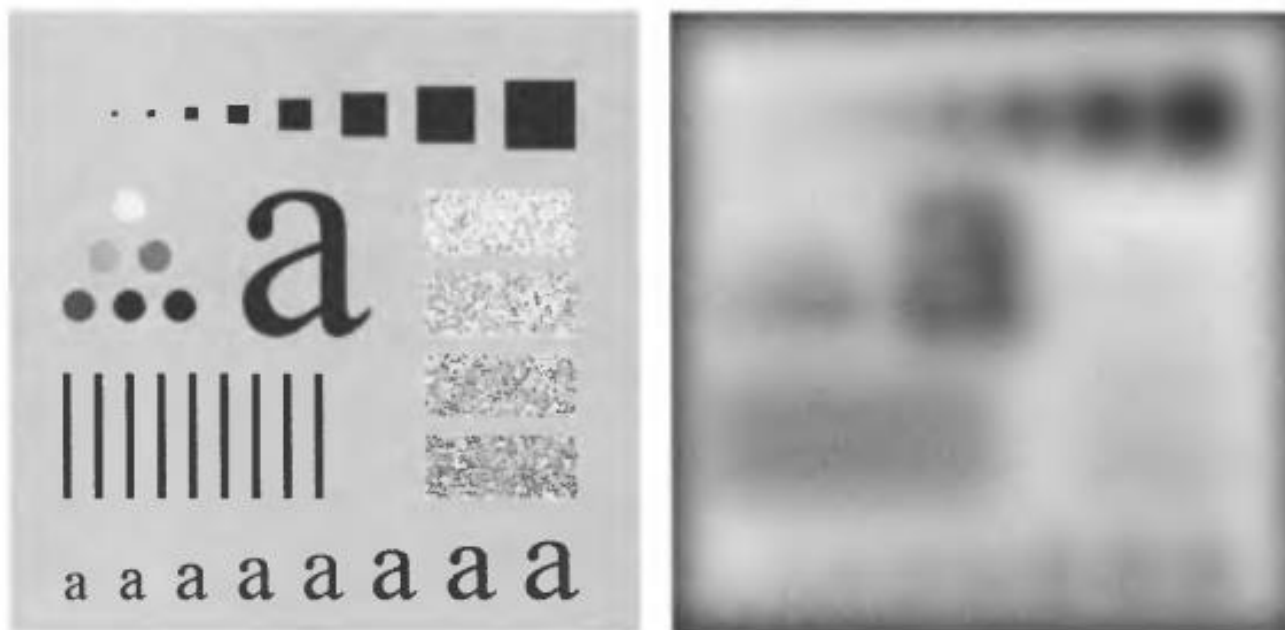
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

$$D(u, v) = [(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2]^{1/2}$$

$$D(u, v) = D_0 \quad H(u, v) = 0,5$$



Результаты применения БФНЧ (n=2)



$$R = 5, \alpha = 92$$

Результаты применения БФНЧ (n=2)

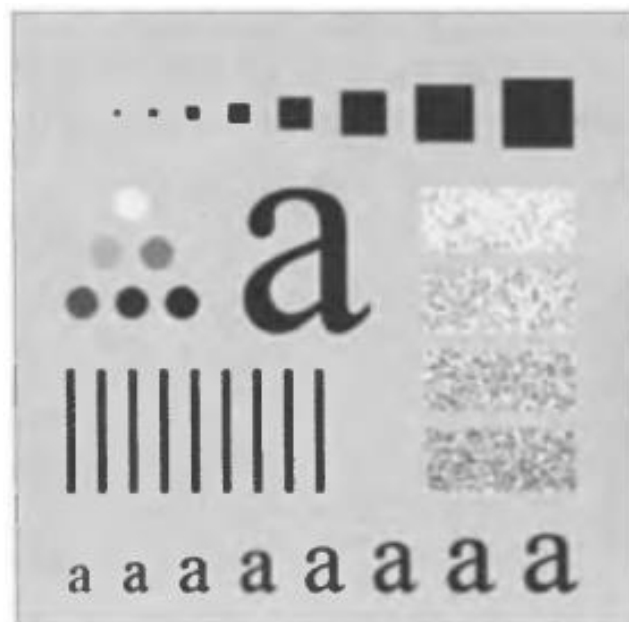


$R = 15, \alpha = 94.6$



$R = 30, \alpha = 96.4$

Результаты применения БФНЧ (n=2)

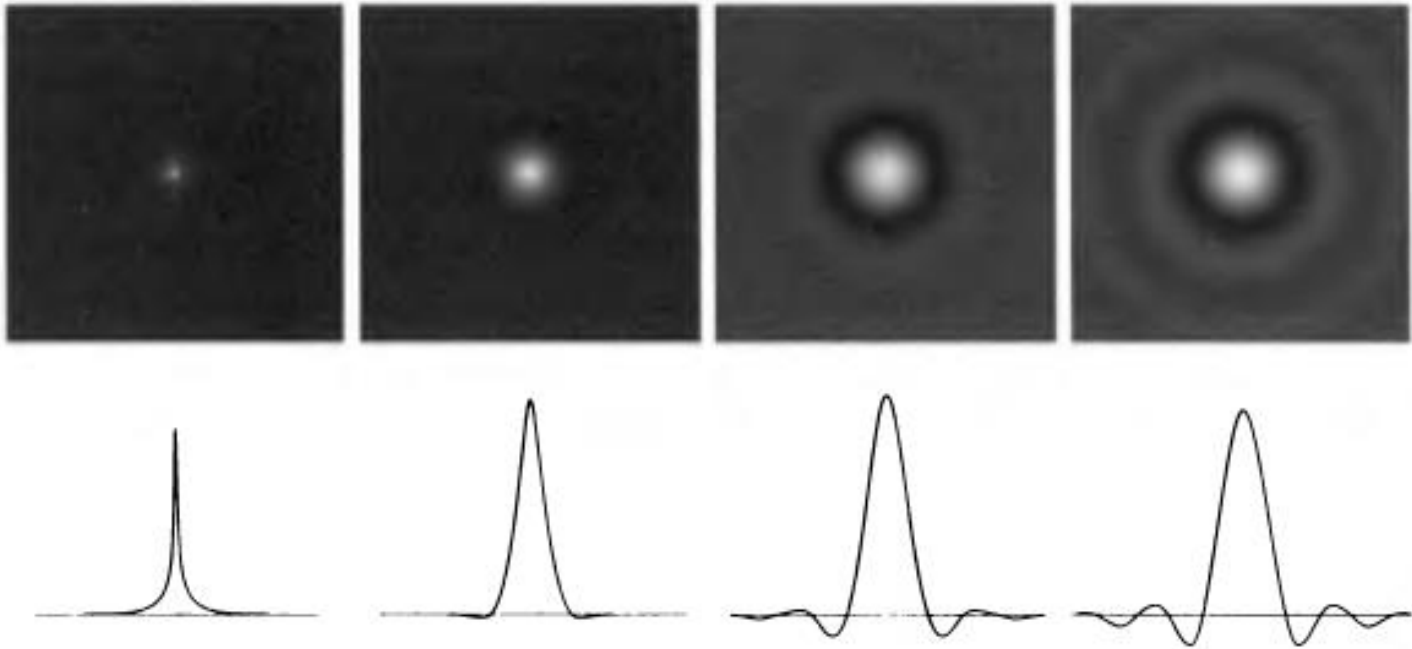


$R = 80, \alpha = 98$



$R = 230, \alpha = 99.5$

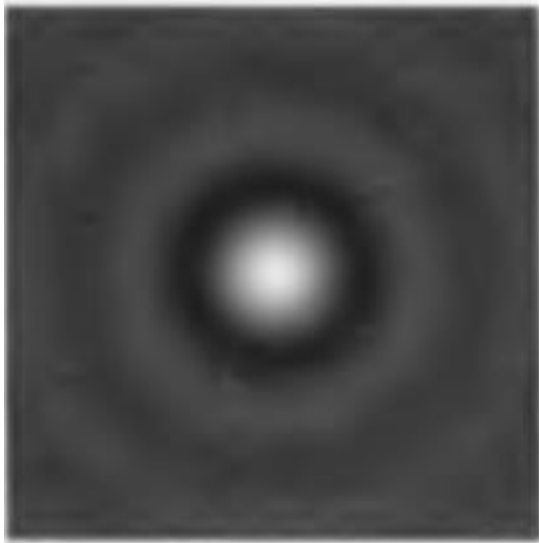
Пространственное представление БФНЧ и профили яркости



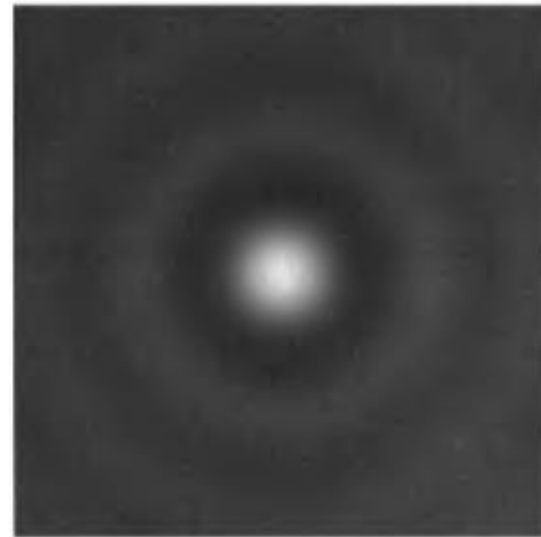
$$D_0 = 5$$

$$n = 1, 2, 5, 20$$

Сравнение БФНЧ ($n=20 \rightarrow \infty$) и ИФНЧ



БФНЧ ($n=20$)



ИФНЧ

$D_0=5$

Гауссовы фильтры низких частот (ГФНЧ)

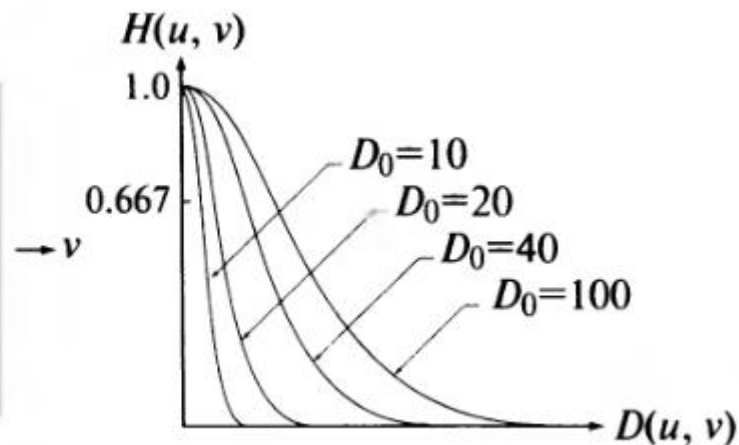
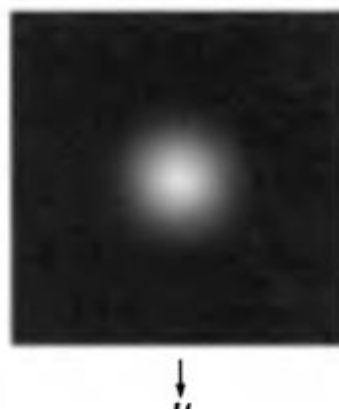
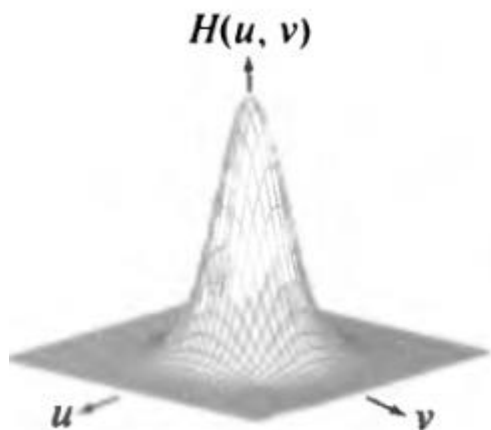
$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

$$D(u, v) = D_0$$

$$H(u, v) = 0,607$$



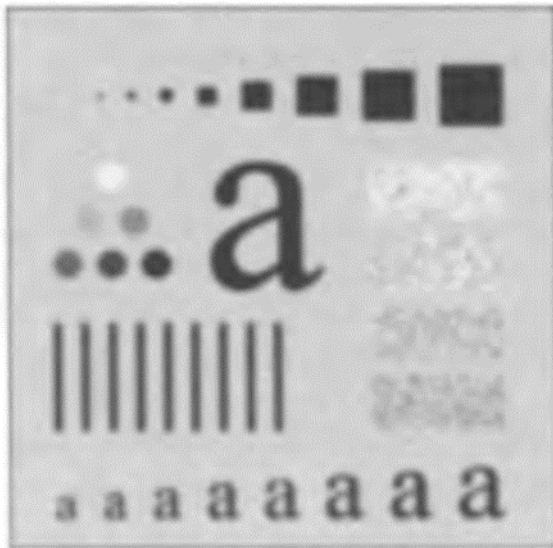
Результаты применения ГФНЧ



$R = 5, \alpha = 92$

$R = 15, \alpha = 94.6$

Результаты применения ГФНЧ



$R = 30, \alpha = 96.4$



$R = 80, \alpha = 98$



$R = 230, \alpha = 99.5$

Сравнение БФНЧ и ГФНЧ ($D_0=15$)

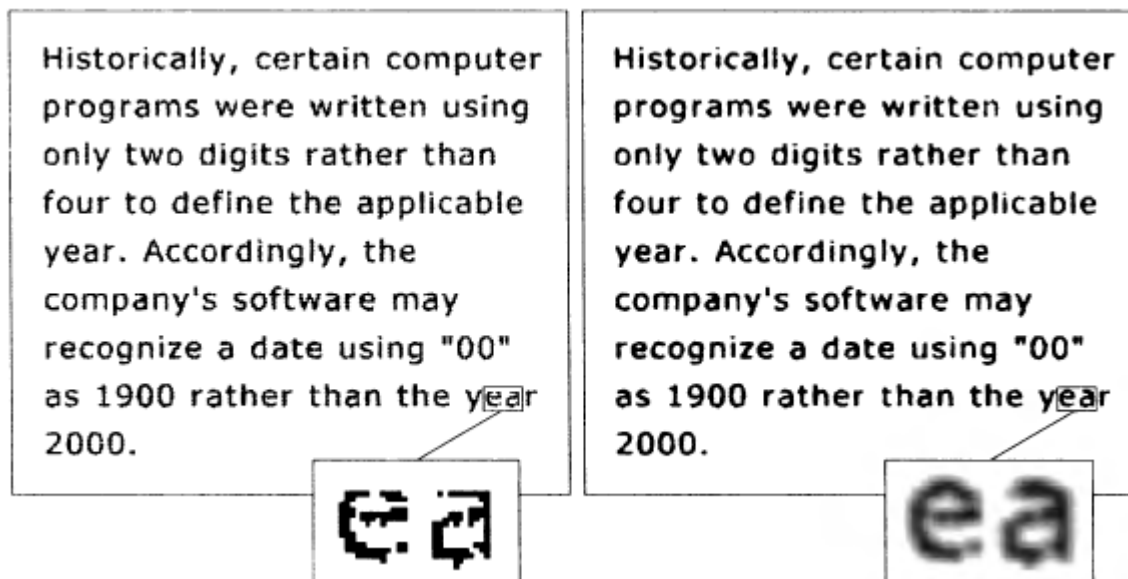


$R = 15, \alpha = 94.6$



$R = 15, \alpha = 94.6$

Примеры низкочастотной фильтрации в распознавании текста



ГФНЧ ($D_0=80$) размер изображения 444 x 508

Частотные фильтры повышения резкости

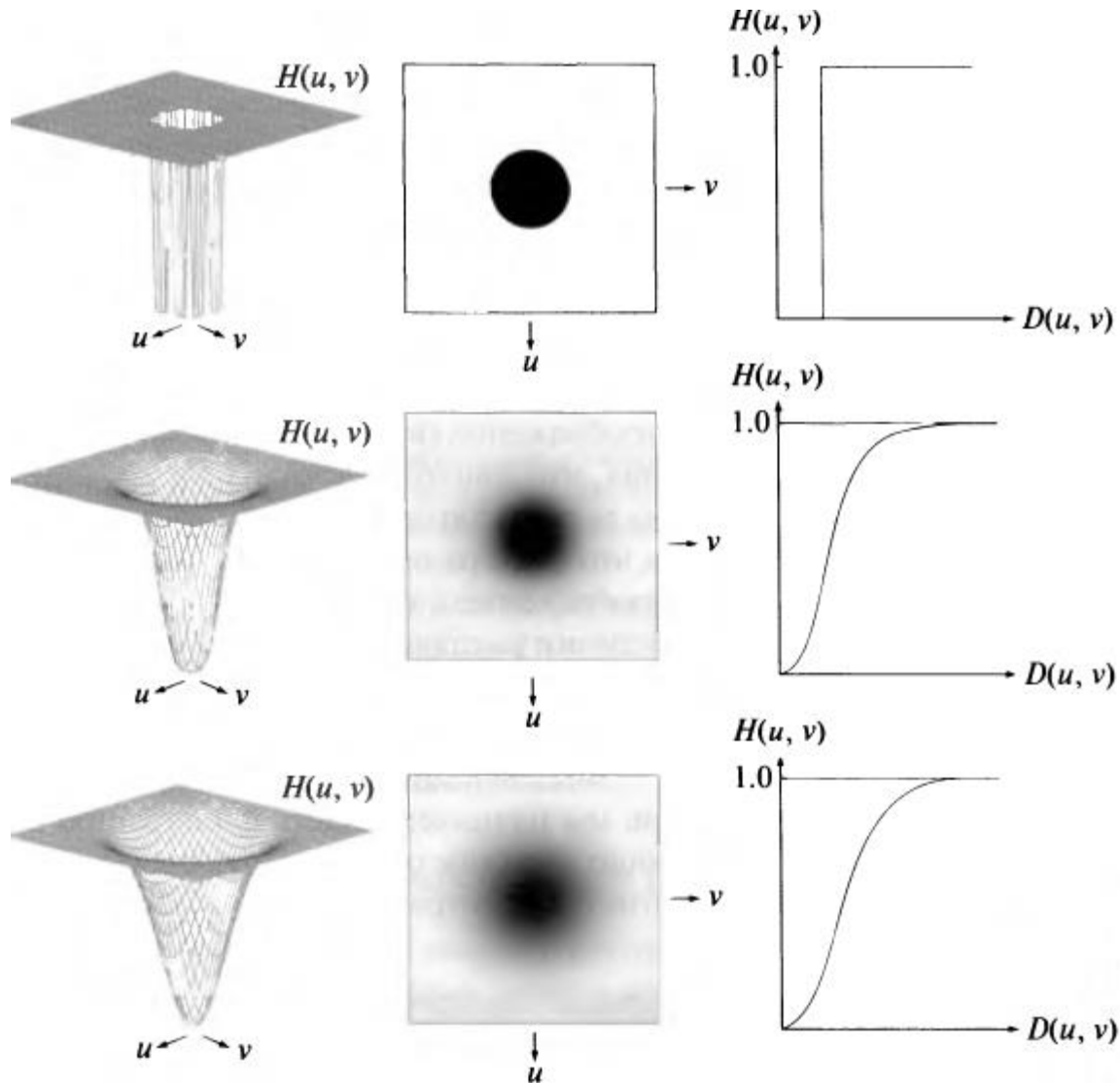
Рассматриваем центрально-симметричные фильтры нулевого фазового сдвига

Передаточная функция $H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$

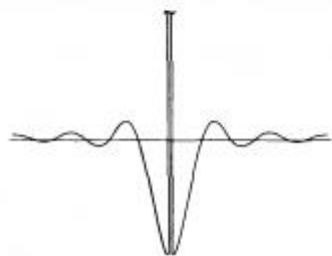
Высокочастотные фильтры

- Идеальные фильтры высоких частот – очень резкий
- Фильтр Баттерворта – переходный (зависит от порядка)
- Гауссов фильтр – очень гладкий

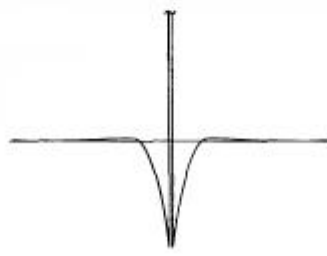
Высокочастотные фильтры



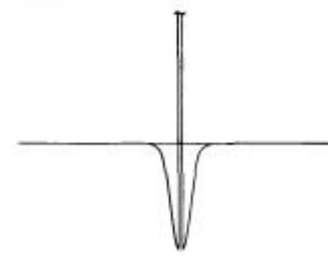
Представление в пространственной области



Идеальный



Баттерворта



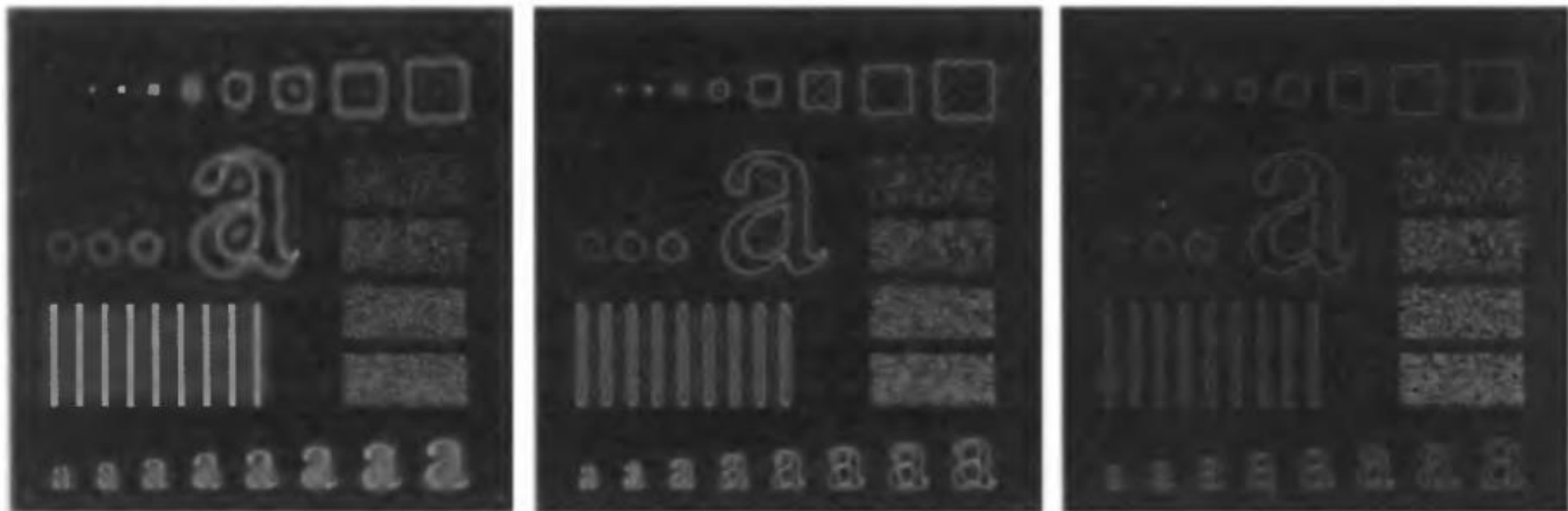
Гауссов

Идеальные фильтры низких частот (ИФВЧ)

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{при } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u, v) = \left[(u - M / 2)^2 + (v - N / 2)^2 \right]^{1/2}$$

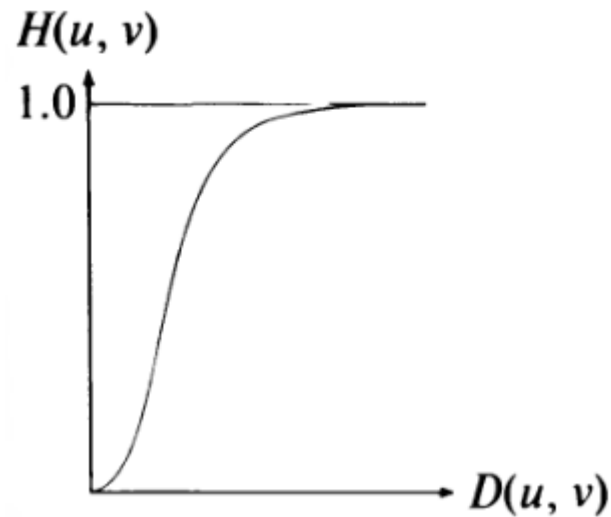
Результат применения ИФВЧ



$D_0 = 15, 30, 80$

Фильтры высоких частот Баттерворта (БФВЧ)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$



Результаты применения БФВЧ (n=2)



$D_0 = 15, 30, 80$

Гауссовы фильтры высоких частот (ГФВЧ)

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2}$$

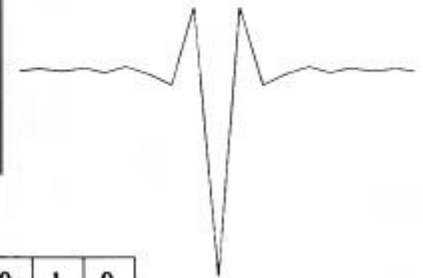
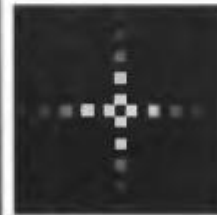
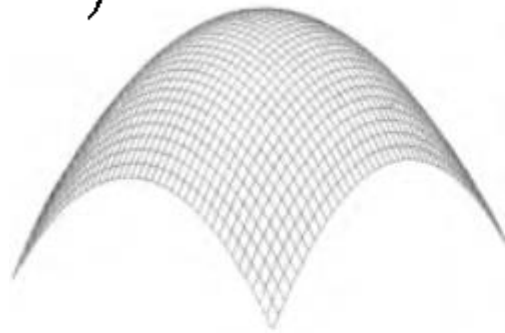
Результаты применения ГФВЧ



$D_0 = 15, 30, 80$

Лапласиан в частотной и пространственной областях

$$H(u, v) = -4\pi^2 (u^2 + v^2)$$



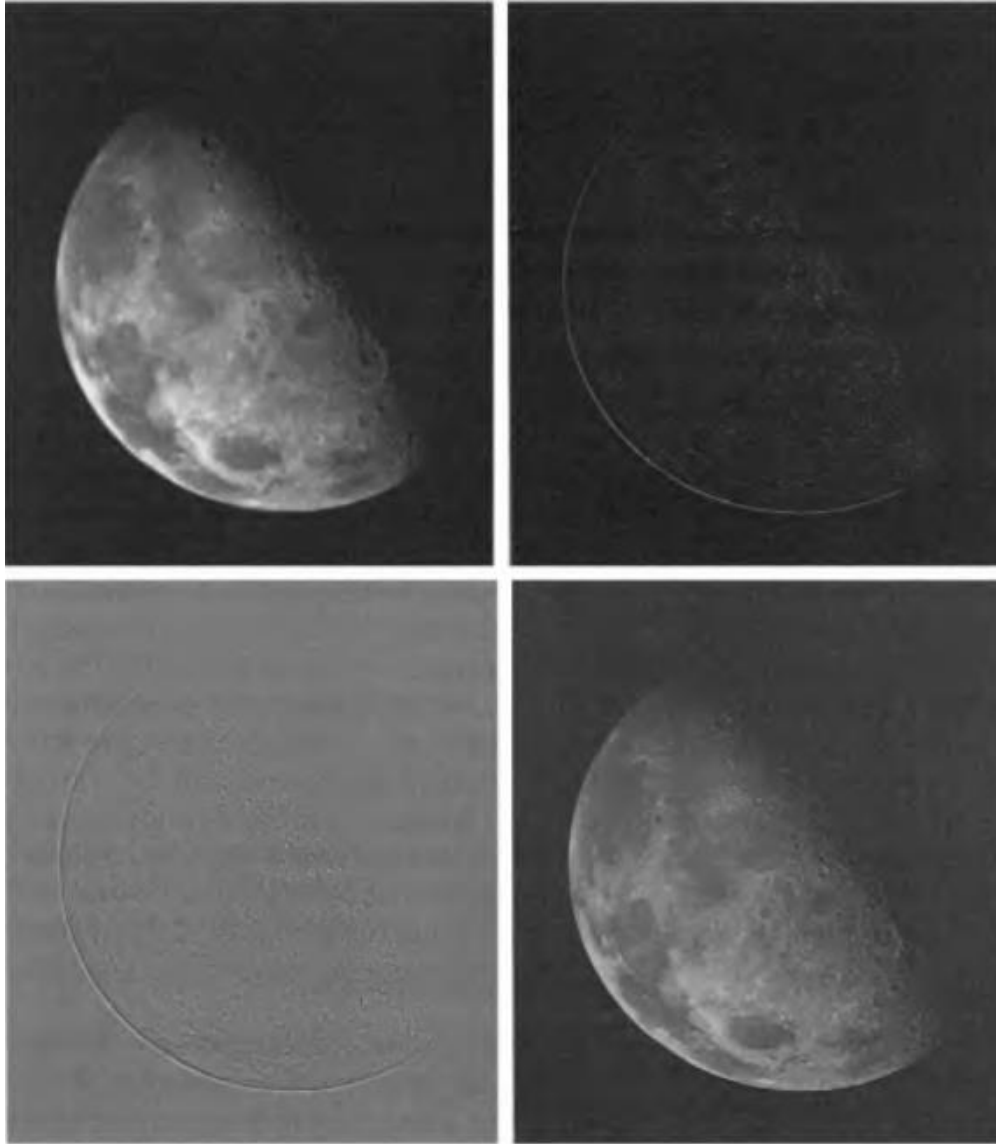
| | | |
|---|----|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | -4 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

Для получения улучшенного изображения

вычитаем Лапласиан (изображение полученное с использованием частотного фильтра Лапласа) из оригинала

$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2(x, y)$$

Применение лапласиана в частотной области



Вариации фильтров

- Нерезкое маскирование
- Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики
- Фильтрация с усилением высоких частот

Нерезкое маскирование

Нерезкое маскирование = оригинал – сглаженная копия

Нерезкое маскирование в пространственной области

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

Нерезкое маскирование в частотной области

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики

$$f_{hb}(x, y) = Af(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

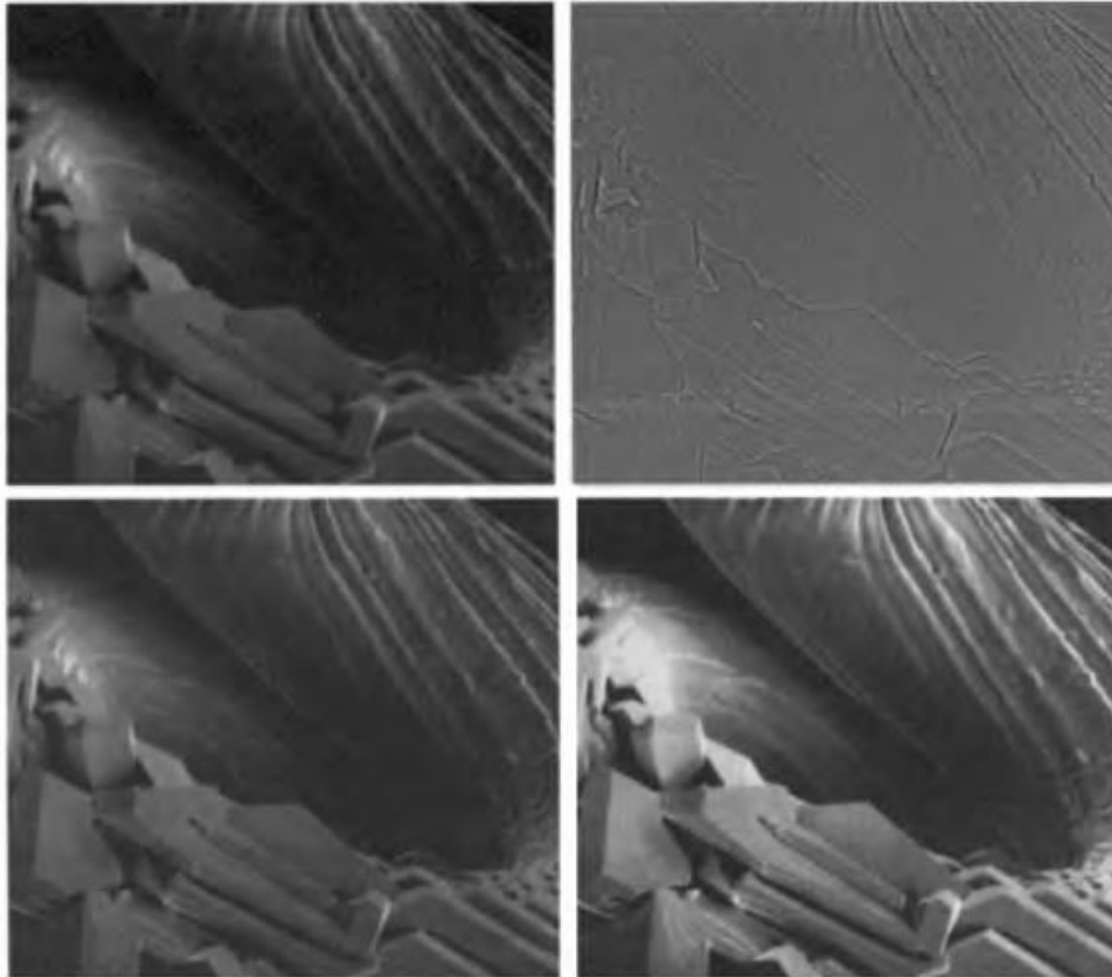
$$f_{hb}(x, y) = (A-1)f(x, y) + f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

$$f_{hb}(x, y) = (A-1)f(x, y) + f_{hp}(x, y)$$

Фильтрация с подъемом частотной характеристики

$$H_{hb}(u, v) = (A - 1) + H_{hp}(u, v)$$

Результат ФВЧ с подъемом частотной характеристики



Лапласиан

$A=2.0$

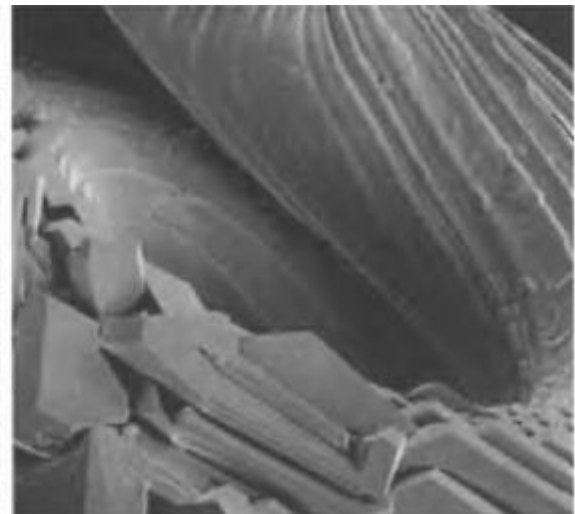
$A=2.7$

Сравнение частотного лапласиана с пространственным

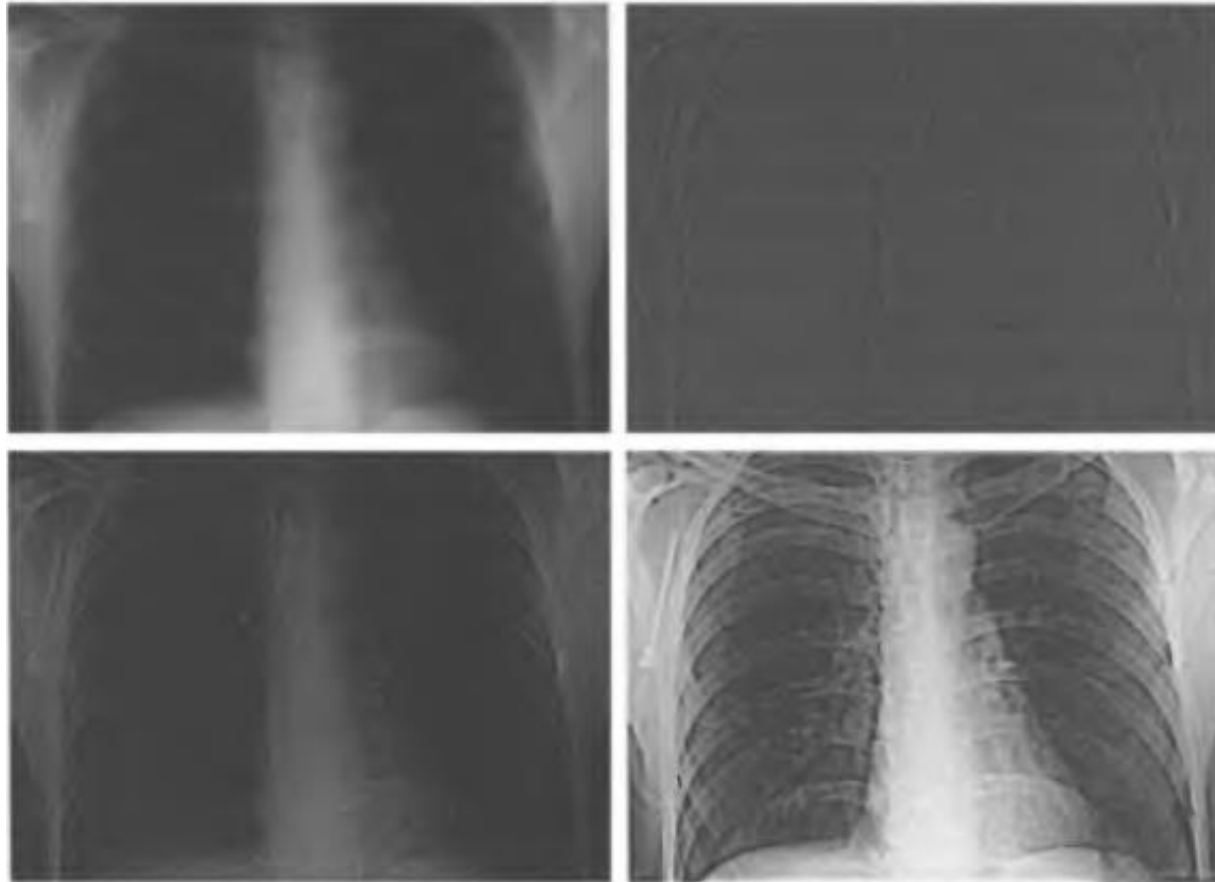


частотный

пространственный



Результат применения фильтрации с усилением высоких частот



БФВЧ $n=2$
 $D_0=5\%$
ВЫСОТЫ

Усиление высоких частот +Эквализация гистограммы

Гомоморфная фильтрация

Сжатие яркостного диапазона и усиление контраста

Еще один вариант представления изображения:
произведение освещенности и коэффициента отражения

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

Сложности частотной обработки

$$\mathfrak{T}\{f(x, y)\} \neq \mathfrak{T}\{i(x, y)\}\mathfrak{T}\{r(x, y)\}$$

Рассмотрим величину

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

Тогда

$$\mathfrak{T}\{z(x, y)\} = \mathfrak{T}\{\ln f(x, y)\} = \mathfrak{T}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{T}\{\ln r(x, y)\}$$

ИЛИ

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

Применим фильтрацию

$$S(u, v) = H(u, v)Z(u, v) = H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v)$$

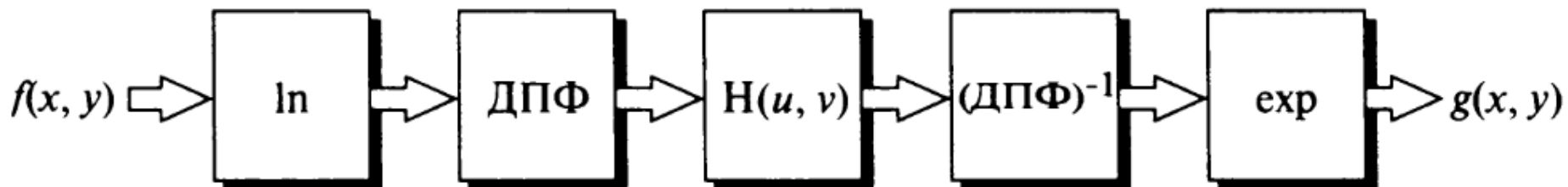
В пространственной области имеем

$$s(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{S(u, v)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

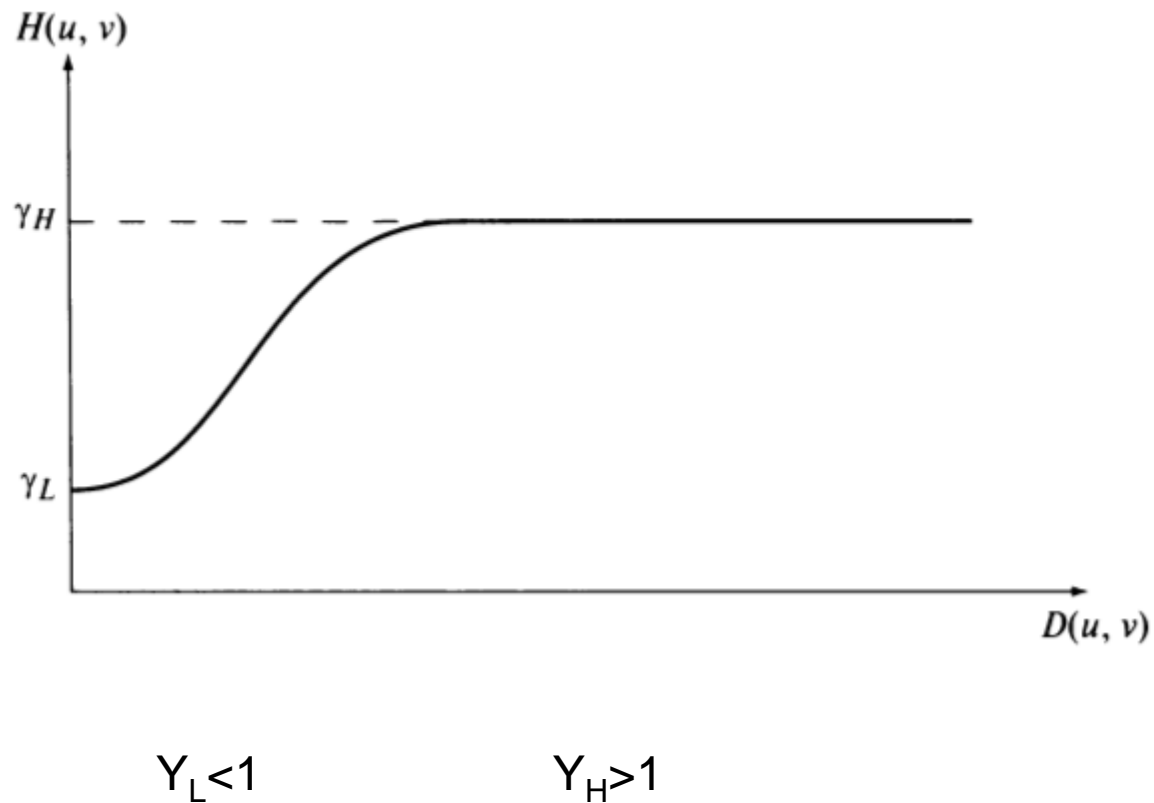
$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y)} \cdot e^{r'(x, y)} = i_0(x, y) \cdot r_0(x, y)$$

Схема метода гомоморфной фильтрации



Профиль центрально-симметричной передаточной функции фильтра



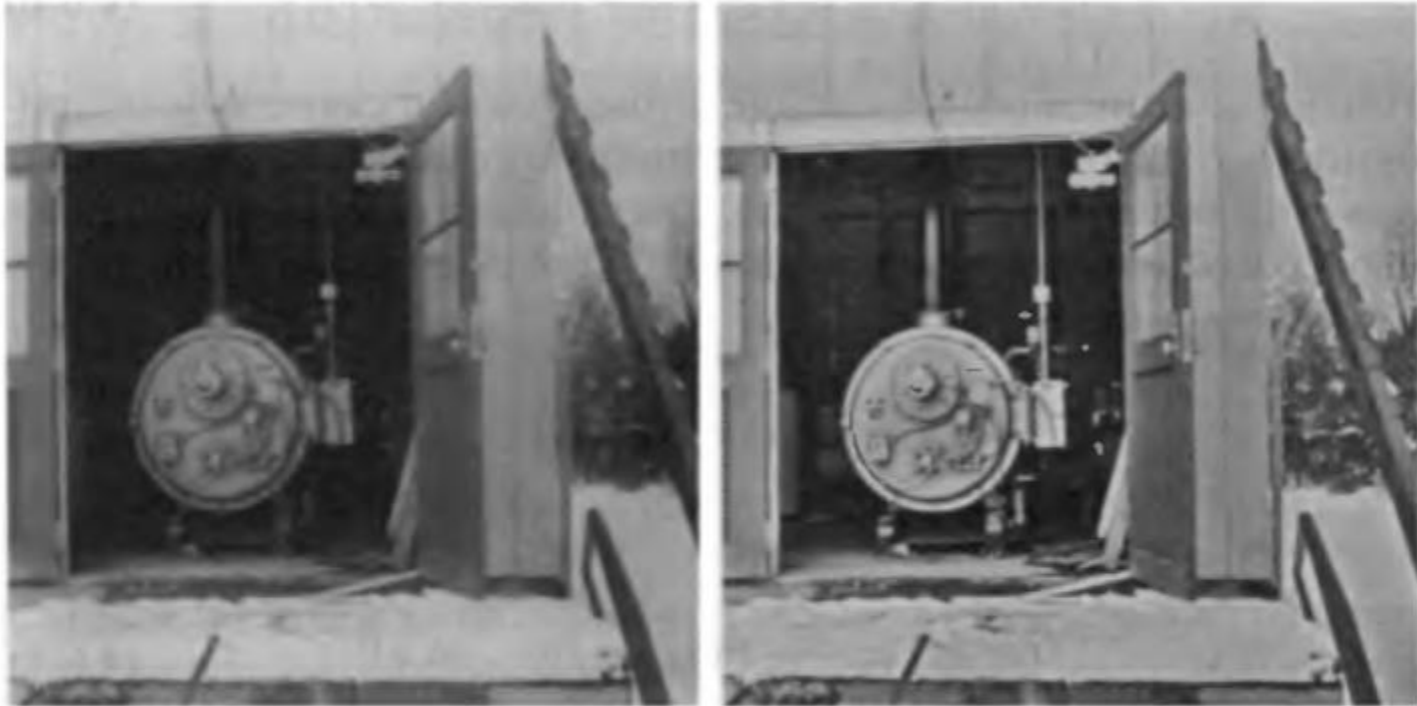
Аппроксимация модифицированным ГФВЧ

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left| 1 - e^{(-c(D^2(u, v)/D_0^2))} \right| + \gamma_L$$

Константа c управляет крутизной наклона

Похож на фильтр усиления высоких частот

Результат гомоморфной фильтрации



$$\gamma_L = 0.5 \quad \gamma_H = 2.0$$