### Частотные методы улучшения изображений

Лекция 5

#### Частотная обработка изображений

- Базируется на Фурье-анализе
- Частично подходы частотной обработки аналогичны подходам пространственной обработки
- Частично подходы частотной обработки дополняют подходы пространственной обработки

#### Главное научное достижение Фурье

Изложено в мемуарах в 1807

Полностью опубликовано в 1822 в книге «Аналитическая теория тепла»

В 1878 переведена на английский Фрименом

Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье



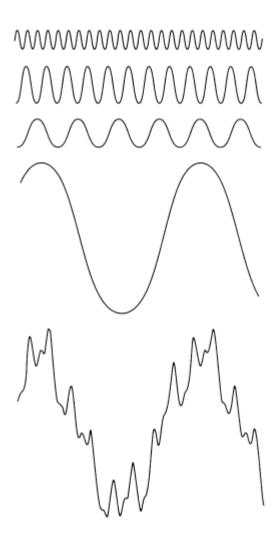
Жан Батист Жозеф Фурье (1768 — 1830)

#### Результат Фурье

**Любая периодическая** функция может быть представлена в виде суммы синусов и/или косинусов различных частот, умноженных на некоторые коэффициенты.

Сумма – ряд Фурье

#### Нижняя функция – сумма четырех верхних



## Результат Фурье для непериодической функции

Если функция **не** является **периодической**, но **площадь под графиком её модуля конечна**, она может быть выражена в виде интеграла от синусов и/или косинусов, умноженных на некоторую весовую функцию.

Преобразование Фурье

#### Характерная особенность

Функция, заданная как рядом, так и преобразованием Фурье, может быть **полностью восстановлена** при помощи процедуры обращения.

#### Идея частотных преобразований

Область определения функции

Область Фурье

Область определения функции

#### Где применяется

- В начале 60-х Революция в области обработки сигналов
  - 3BM
  - БПФ
  - Обработка сигналов
  - Обработка звука
  - Форматы звуковых файлов (например, MP3 и JPEG)
  - Обработка изображений
  - Медицинская диагностика
  - Шифрование
  - Средства электронной связи
  - Классическое компьютерное зрение
  - Нейронные сети для компьютерного зрения

#### Применение к обработке изображений

Изображения – функции конечной протяженности

 $\downarrow$ 

Преобразование Фурье

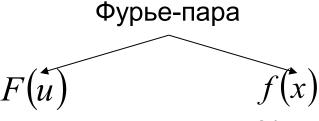
#### Одномерный случай

• Прямое Фурье-преобразование (Фурье-образ)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

• Обратное Фурье-преобразование

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{i2\pi ux} du$$



Демяненко Я.М. ЮФУ

Пара

Фурье

преобразований

#### Двумерный случай

• Прямое Фурье-преобразование (Фурье-образ)

$$F(u,v) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

• Обратное Фурье-преобразование

$$f(x,y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

#### Дискретная форма

Прямое дискретное преобразование Фурье

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i2\pi ux/M}, \quad u = 0,1,2,...,M-1$$

Обратное дискретное преобразование Фурье

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{i2\pi ux/M}, \quad x = 0,1,2,...,M-1$$

Область значений переменной u — частотная область Каждый из M элементов F(u) — частотная компонента преобразования

Область значений переменной x — временная область Каждый из M элементов f(x) — временная компонента

#### Фурье-спектр, энергетический спектр и фаза

Представление в полярных координатах

$$F(u) = |F(u)|e^{-i\varphi(u)}$$

Модуль или спектр Фурье-преобразования

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

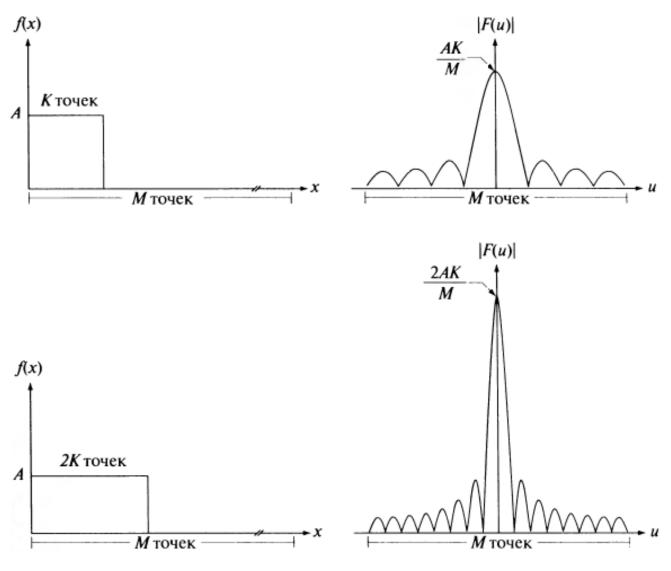
Энергетический спектр или спектральная плотность

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Фаза или фазовый спектр Фурье-преобразования

$$\varphi(u) = arctg \left[ \frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

#### Пример. Фурье-спектры



Демяненко Я.М. ЮФУ

#### Взаимосвязь между шагом дискретизации и частотными интервалами

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{X}$$

$$M\Delta u = \frac{1}{\Delta x}$$

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} = \frac{1}{X}$$
  $M\Delta u = \frac{1}{\Delta x}$   $\Delta x = \frac{1}{M\Delta u} = \frac{1}{U}$ 

частотное разрешение диапазон частот

#### Двумерное ДПФ и его обращение

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,u) e^{i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- u, v переменные преобразования или частотные переменные
- х, у переменные изображения или пространственные переменные

#### Фурье-спектр, энергетический спектр и фаза

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v)+I^2(u,v)]^{\frac{1}{2}}$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

$$\varphi(u,v) = arctg\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

## Взаимосвязь между шагом дискретизации и частотными интервалами

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

частотное разрешение

## Фурье-образ для действительных функций будет симметрично сопряжённым

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

#### Периодичность

$$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u-M/2,v-N/2)$$

| F(u)|

-M/2 0 M/2 M-1 M

- Один период — |

- V

#### Постоянная составляющая спектра

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(ux/M + vy/N)}$$

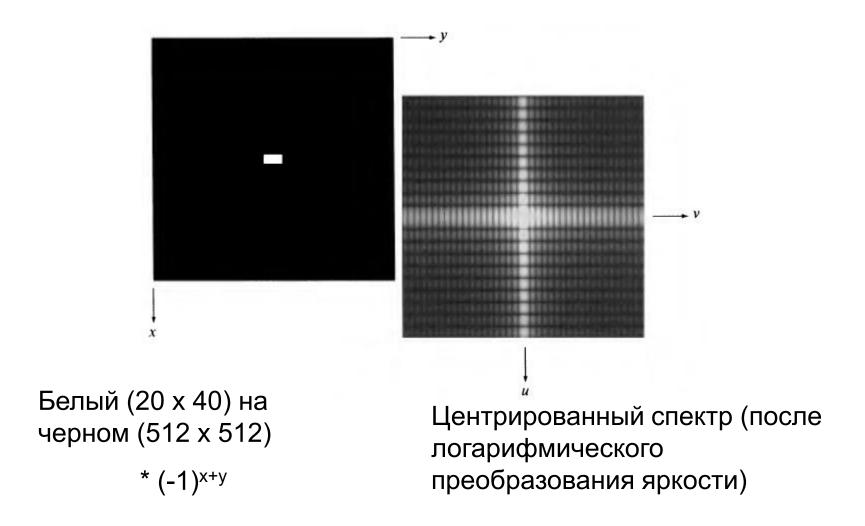
$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Среднее значение яркости на изображении

#### Основные свойства частотной области

- Постоянная частотная составляющая (u=v=0) совпадает со средней яркостью изображения
- <u>Низкие</u> частоты (<u>вблизи начала координат</u>) соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения
- Высокие быстро меняющимся

## Пример. Центрированный спектр простой двумерной функции

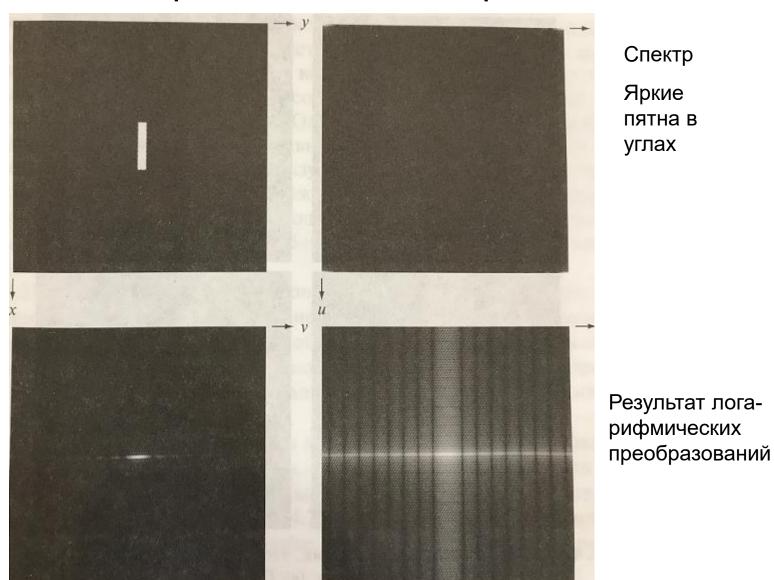


#### Изображение → Спектр

Изображение

Центрирован

ный спектр



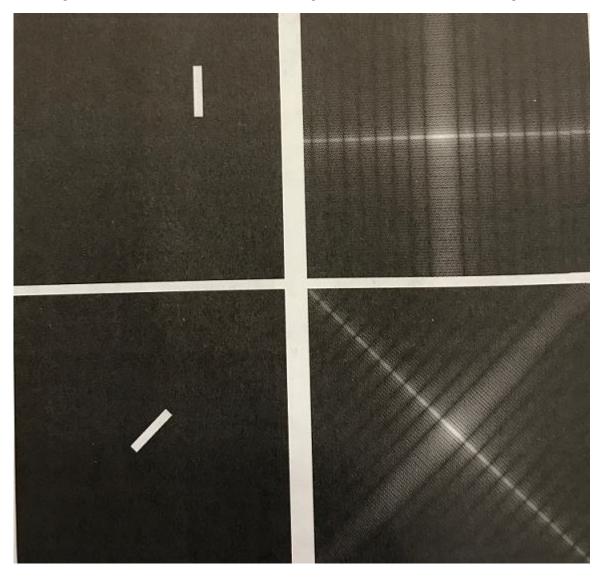
Демяненко Я.М. ЮФУ

Спектр

Яркие пятна в

углах

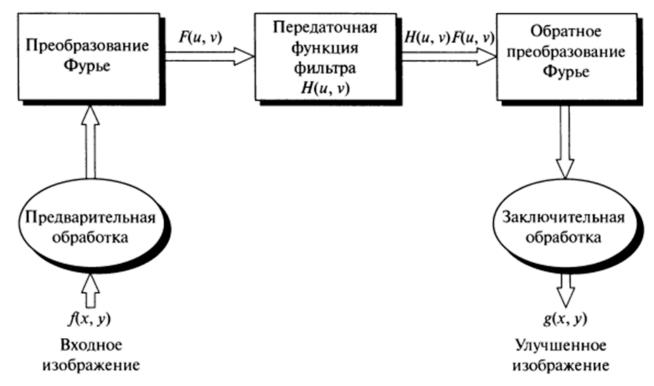
#### Сдвинутый и повёрнутый прямоугольник



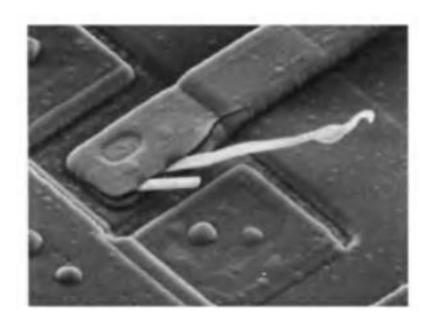
Демяненко Я.М. ЮФУ

#### Процедура фильтрации в частотной области

- 1. Изображение \* (-1)<sup>х+у</sup>
- 2. Вычисляется прямое ДПФ F(u,v)
- 3. Функция  $F(u,v)^*$  функцию фильтра H(u,v)
- 4. Вычисляется обратное ДПФ
- 5. Выделяется вешественная часть
- 6. \*  $(-1)^{x+y}$



#### Пример. Изображение и его Фурье-спектр





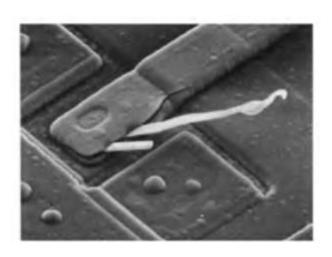
Увеличенное в 2500 раз изображение интегральной схемы, полученное сканирующим электронным микроскопом

Brockhouse Institute for Material Research

#### Основные фильтры

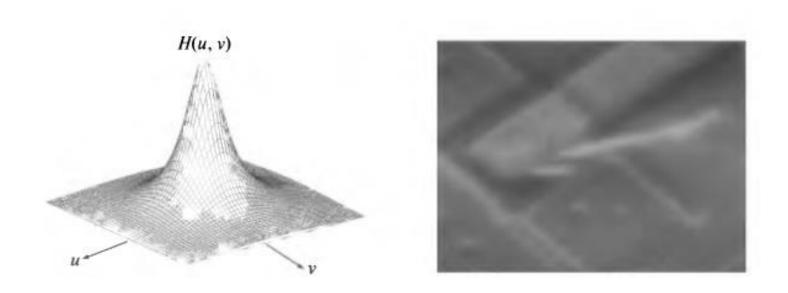
Фильтр пробка – узкополосный режекторный фильтр – обнуление среднего

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & npu(u,v) = (M/2,N/2) \\ 1, & \text{в другом случае} \end{cases}$$

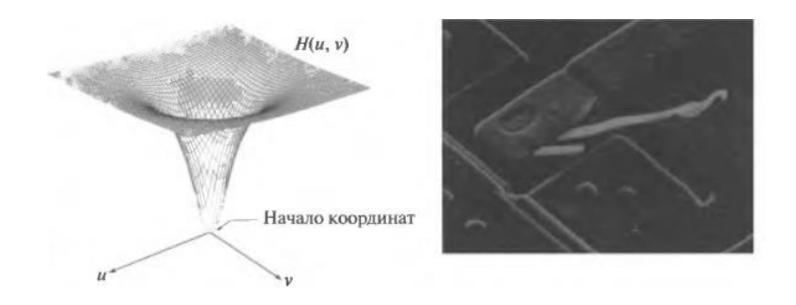




#### Низкочастотный фильтр

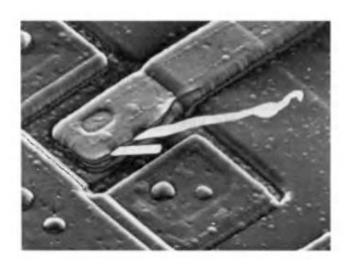


#### Высокочастотный фильтр



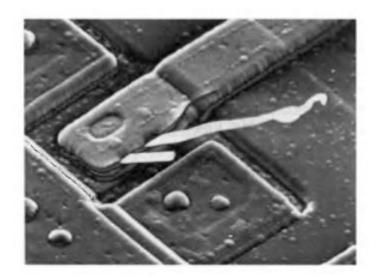
# Высокочастотный фильтр с добавлением к передаточной функции константы, равной половине высоты фильтра





## Высокочастотный и высокочастотный с усилением





#### Теорема о свёртке

Соответствие между фильтрацией в частотной и пространственной областями

$$f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$
$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

Преобразование Фурье свёртки двух функций является поточечным произведением их преобразований Фурье.

Дискретная свёртка

$$f(x,y)*h(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)h(x-m,y-n)$$

#### Сравнение фильтров

• Частотные почти всегда нагляднее

• Пространственные много меньшего размера

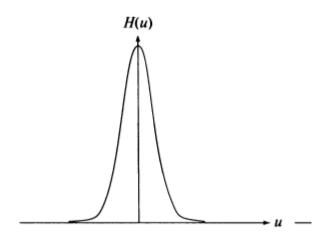
Частотный → Прообраз (пространственный) → Маска меньшего размера

## Получение пространственного фильтра из частотного

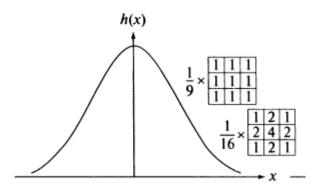
- 1. Функция фильтра *H(u,v)* \* (-1)<sup>u+v</sup>
- 2. Вычисляется обратное ДПФ
- 3. Вещественная часть \* (-1)<sup>x+y</sup>

#### Фурье-пара гауссова фильтра

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$



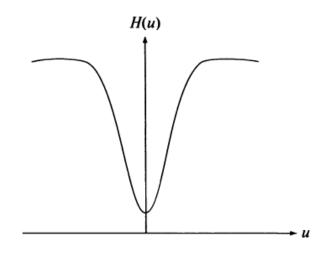
$$h(x) = \sqrt{2\pi} \sigma A e^{-2\pi^2 \sigma^2 x^2}$$



Низкочастотный

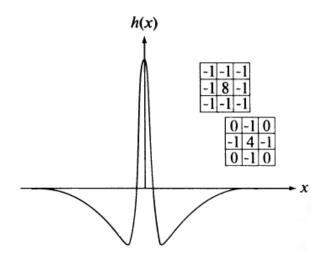
## Фурье-пара гауссова фильтра

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2} Be^{-u^2/2\sigma_2^2}$$

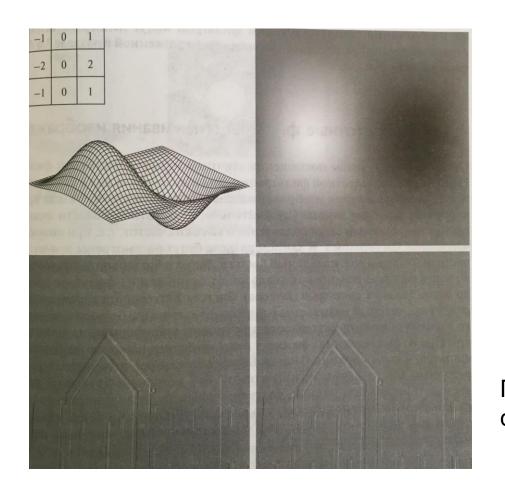


$$h(x) = \sqrt{2\pi} \sigma A e^{-2\pi^2 \sigma^2 x^2}$$
$$-\sqrt{2\pi} \sigma_2 B e^{-2\pi^2 \sigma_2^2 x^2}$$

Высокочастотный



#### Пространственная и частотная маски



Частотная фильтрация

Пространственная фильтрация

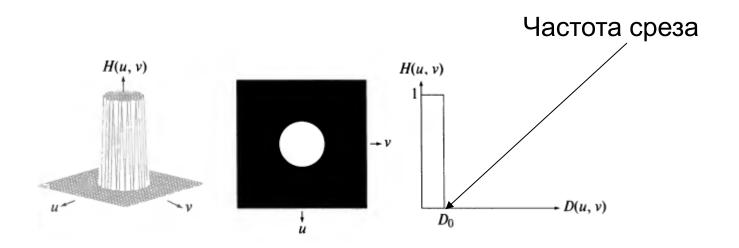
### Сглаживающие низкочастотные фильтры

- Идеальные фильтры низких частот очень резкий
- Фильтр Баттерворта переходный (зависит от порядка)
- Гауссов фильтр очень гладкий

## Идеальные фильтры низких частот (ИФНЧ)

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{при} & D(u,v) \le D_0 \\ 0, & \text{при} & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \left[ (u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2}$$



# Величины для сравнение низкочастотных фильтров

Полная энергия

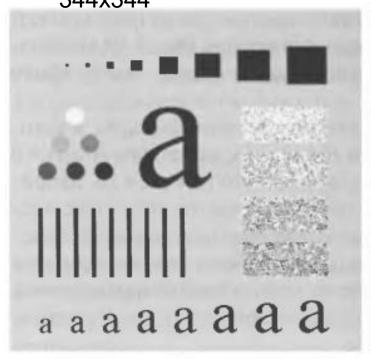
$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

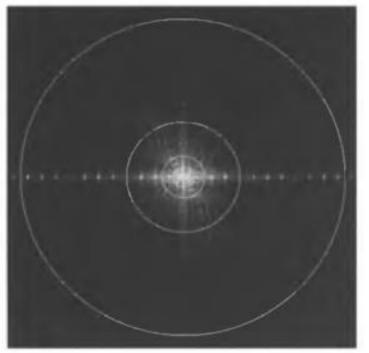
$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

$$\alpha = 100 \left[ \sum_{u} \sum_{v} P(u, v) / P_{T} \right]$$

# Пример. Энергия изображения как функция расстояния от центра ДПФ

344x344





R = 5, 15, 30, 80, 230

 $\alpha$  = 92.0, 94.6, 96.4, 98.0, 99.5

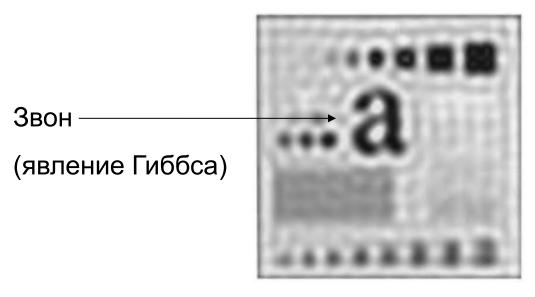
## Результаты фильтрации

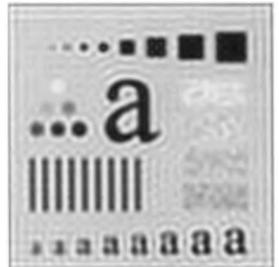




R = 5, 
$$\alpha$$
 = 92

## Результаты фильтрации



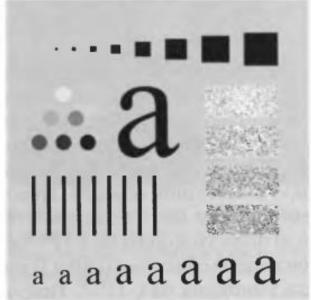


R = 15, 
$$\alpha$$
 = 94.6

R = 15, 
$$\alpha$$
 = 94.6 R = 30,  $\alpha$  = 96.4

### Результаты фильтрации





R = 80, 
$$\alpha$$
 = 98

R = 230, 
$$\alpha$$
 = 99.5

## Откуда берется звон

В частотной области:

Резко обрезаются высокие частоты (умножается спектр на rect).

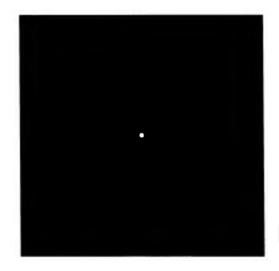
По теореме о свертке:

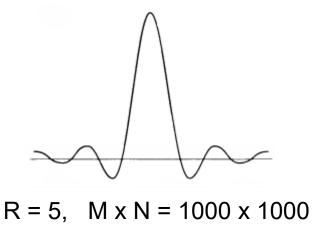
В пространственной области это эквивалентно свертке изображения с sinc.

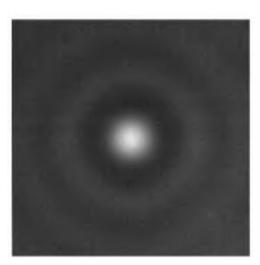
Результат свертки:

Резкие переходы в изображении "размазываются" осциллирующим ядром sinc.

Визуальный эффект: Появляются паразитные волны ("звон") вокруг контуров.

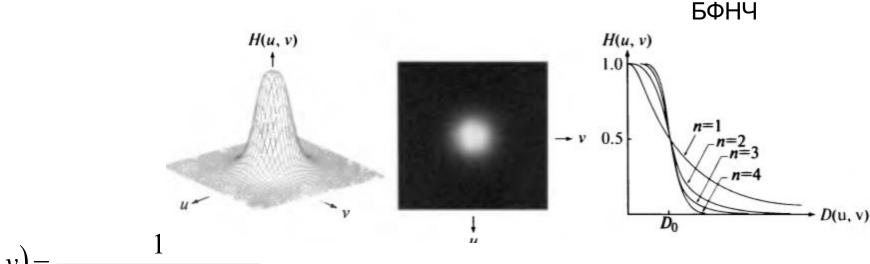






Демяненко Я.М. ЮФУ

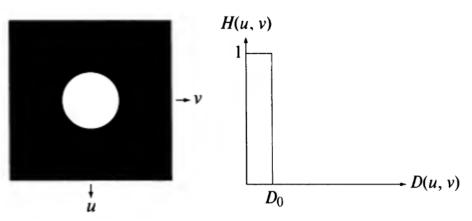
# Фильтры низких частот Баттерворта (БФНЧ)



$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

$$D(u,v) = \left[ (u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2}$$

$$D(u,v) = D_0$$
  $H(u,v) = 0.5$ 



Демяненко Я.М. ЮФУ

ИФНЧ

47

## Результаты применения БФНЧ (n=2)





R = 5, 
$$\alpha$$
 = 92

## Результаты применения БФНЧ (n=2)

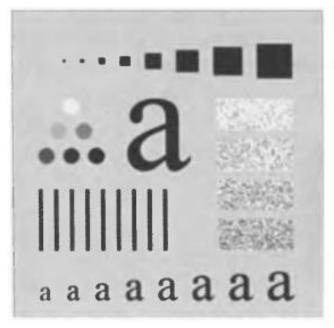


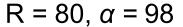


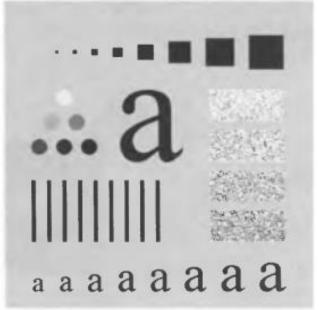
R = 15, 
$$\alpha$$
 = 94.6

R = 30, 
$$\alpha$$
 = 96.4

## Результаты применения БФНЧ (n=2)

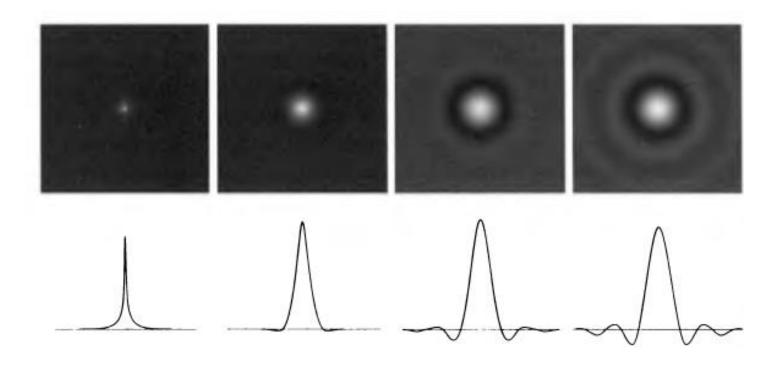






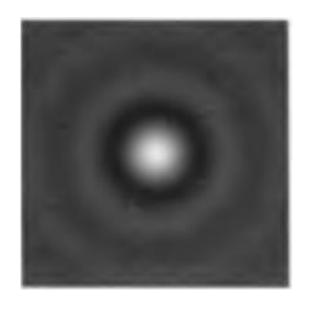
R = 230, 
$$\alpha$$
 = 99.5

# Пространственное представление БФНЧ и профили яркости

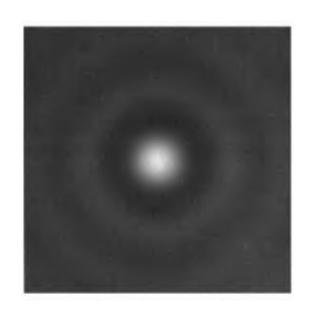


$$D_0 = 5$$
  
n= 1, 2, 5, 20

# Сравнение БФНЧ (n=20 →∞) и ИФНЧ



БФНЧ (n=20)



ИФНЧ

$$D_0 = 5$$

# Гауссовы фильтры низких частот (ГФНЧ)

$$H(u) = Ae^{-u^{2}/2\sigma^{2}} \qquad H(u,v) = e^{-D^{2}(u,v)/2\sigma^{2}}$$

$$H(u,v) = e^{-D^{2}(u,v)/2D_{0}^{2}}$$

$$D(u,v) = D_{0} \qquad H(u,v) = 0,607$$

$$H(u,v) = D_{0} \qquad H(u,v) = 0,607$$

$$D_{0.667} \qquad D_{0} = 10$$

$$D_{0} = 20$$

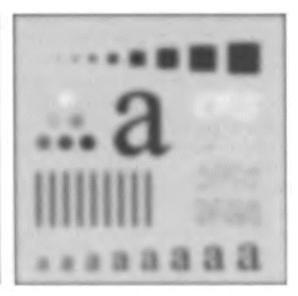
D(u, v)

 $D_0 = 100$ 

## Результаты применения ГФНЧ







R = 5, 
$$\alpha$$
 = 92

R = 15, 
$$\alpha$$
 = 94.6

## Результаты применения ГФНЧ







R = 30, 
$$\alpha$$
 = 96.4

R = 80, 
$$\alpha$$
 = 98

R = 230, 
$$\alpha$$
 = 99.5

# Сравнение БФНЧ и ГФНЧ ( $D_0$ =15)





R = 15, 
$$\alpha$$
 = 94.6

R = 15, 
$$\alpha$$
 = 94.6

# Примеры низкочастотной фильтрации в распознавании текста

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

연건

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

ГФНЧ ( $D_0$ =80) размер изображения 444 x 508

### Частотные фильтры повышения резкости

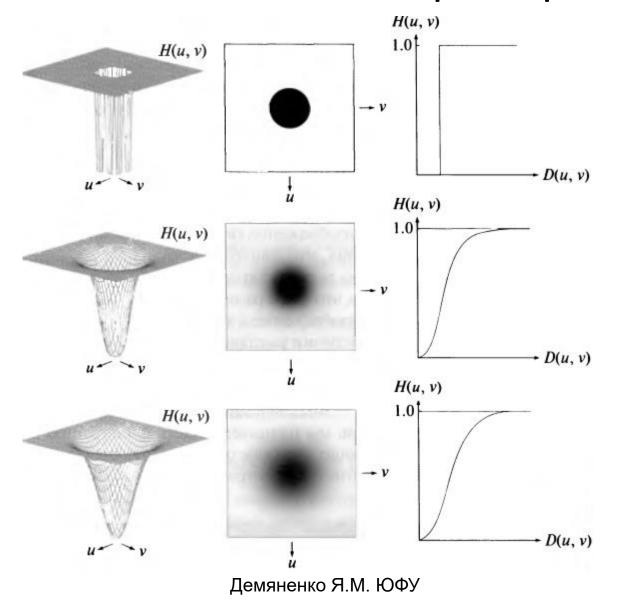
Рассматриваем центрально-симметричные фильтры нулевого фазового сдвига

Передаточная функция 
$$H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

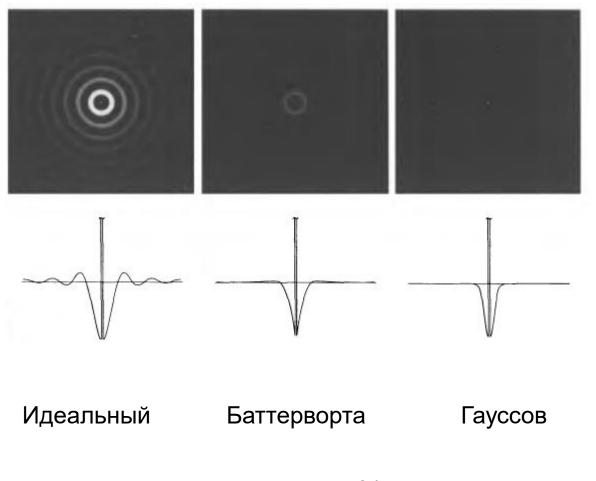
### Высокочастотные фильтры

- Идеальные фильтры высоких частот очень резкий
- Фильтр Баттерворта переходный (зависит от порядка)
- Гауссов фильтр очень гладкий

## Высокочастотные фильтры



## Представление в пространственной области



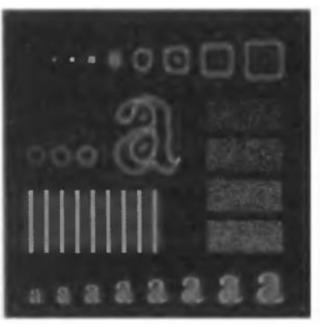
Демяненко Я.М. ЮФУ

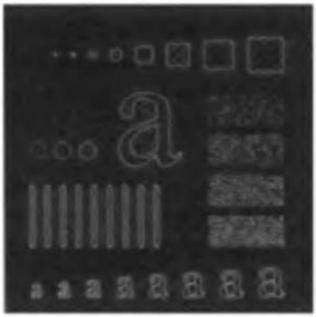
## Идеальные фильтры низких частот (ИФВЧ)

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{при} & D(u,v) \le D_0 \\ 1, & \text{при} & D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u,v) = \left[ (u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2}$$

#### Результат применения ИФВЧ



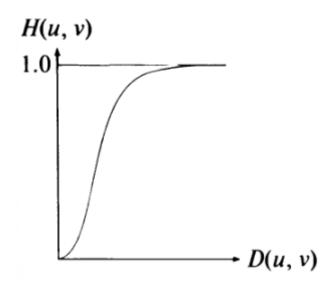




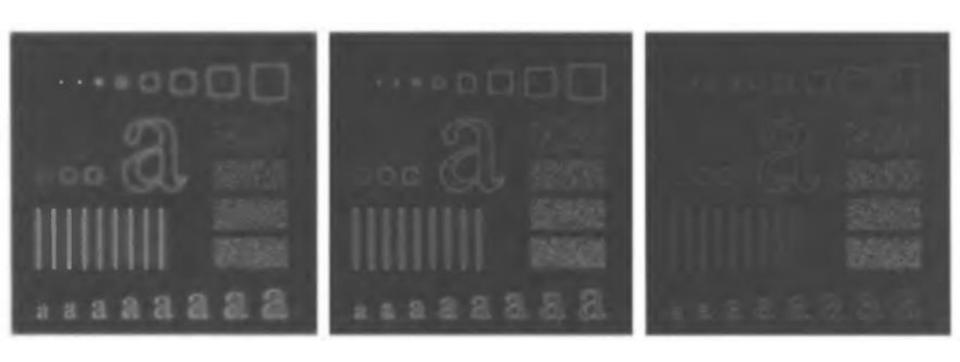
$$D_0 = 15, 30, 80$$

# Фильтры высоких частот Баттерворта (БФВЧ)

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u,v)]^{2n}}$$



# Результаты применения БФВЧ (n=2)

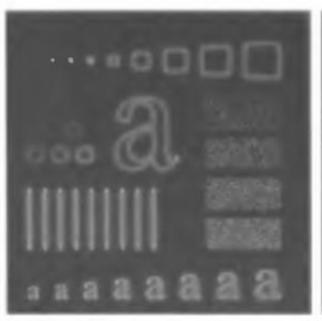


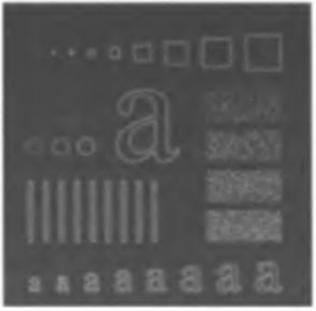
$$D_0 = 15, 30, 80$$

## Гауссовы фильтры высоких частот (ГФВЧ)

$$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

## Результаты применения ГФВЧ

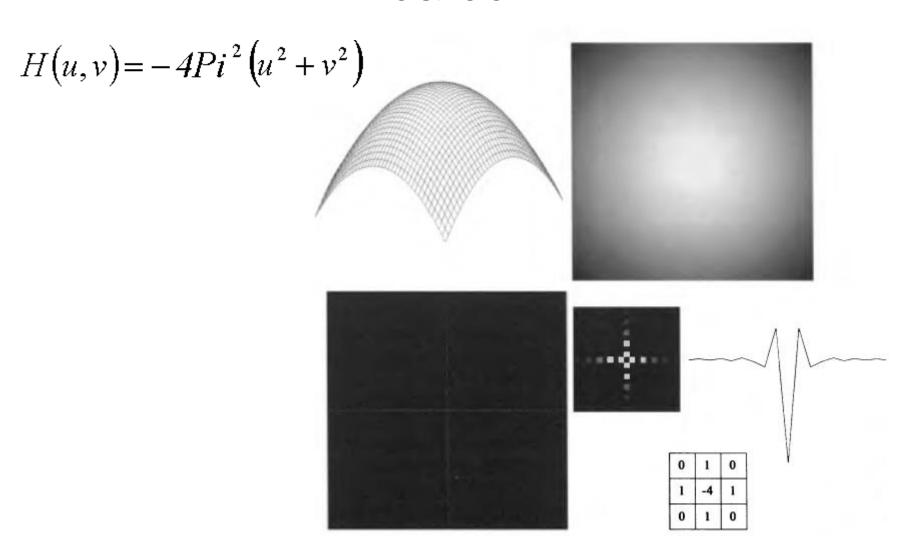






$$D_0 = 15, 30, 80$$

# Лапласиан в частотной и пространственной областях

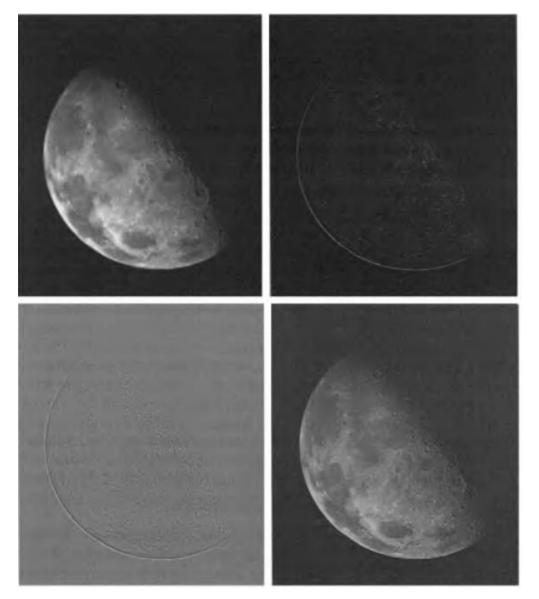


## Для получения улучшенного изображения

вычитаем Лапласиан (изображение полученное с использованием частотного фильтра Лапласа) из оригинала

$$g(x,y) = f(x,y) - \nabla^2(x,y)$$

# Применение лапласиана в частотной области



Демяненко Я.М. ЮФУ

### Вариации фильтров

- Нерезкое маскирование
- Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики
- Фильтрация с усилением высоких частот

### Нерезкое маскирование

Нерезкое маскирование = оригинал – сглаженная копия

Нерезкое маскирование в пространственной области

$$f_{hp}(x,y) = f(x,y) - f_{lp}(x,y)$$

Нерезкое маскирование в частотной области

$$H_{hp}(u,v)=1-H_{lp}(u,v)$$

# Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики

$$f_{hb}(x,y) = Af(x,y) - f_{lp}(x,y)$$

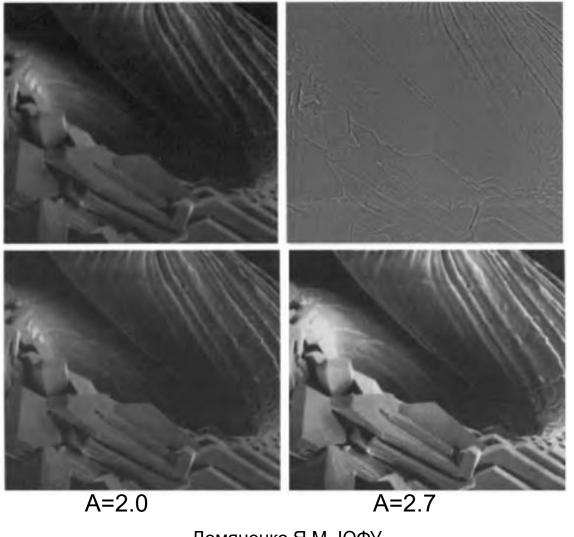
$$f_{hb}(x,y) = (A-1)f(x,y) + f(x,y) - f_{lp}(x,y)$$

$$f_{hb}(x,y) = (A-1)f(x,y) + f_{hp}(x,y)$$

# Фильтрация с подъемом частотной характеристики

$$H_{hb}(u,v) = (A-1) + H_{hp}(u,v)$$

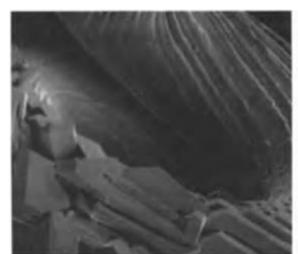
### Результат ФВЧ с подъемом частотной характеристики



Лапласиан

Демяненко Я.М. ЮФУ

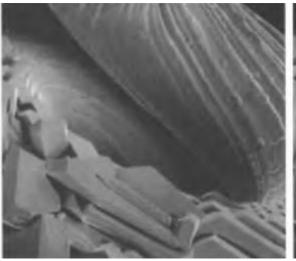
# Сравнение частотного лапласиана с пространственным

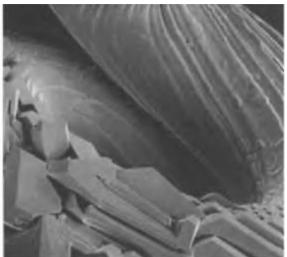




частотный

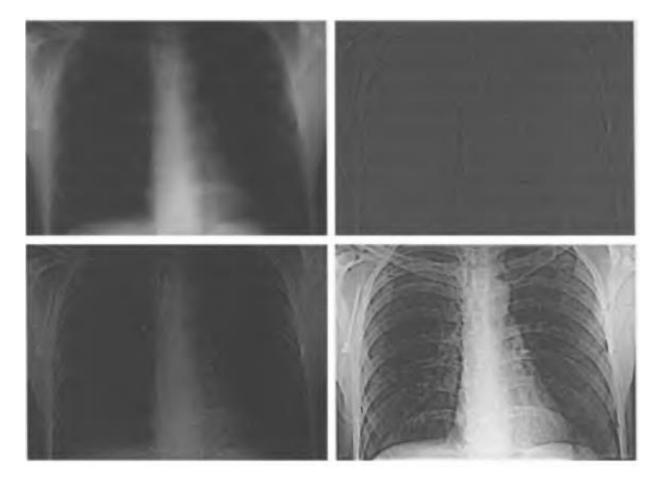
пространственный





Демяненко Я.М. ЮФУ

# Результат применения фильтрации с усилением высоких частот



БФВЧ n=2  $D_0=5\%$  высоты

Усиление высоких частот

+Эквализация гистограммы

### Гомоморфная фильтрация

Сжатие яркостного диапазона и усиление контраста

Еще один вариант представления изображения: произведение освещенности и коэффициента отражения

$$f(x,y)=i(x,y)r(x,y)$$

### Сложности частотной обработки

$$\Im\{f(x,y)\} \neq \Im\{i(x,y)\}\Im\{r(x,y)\}$$

Рассмотрим величину

$$z(x,y) = \ln f(x,y) = \ln i(x,y) + \ln rf(x,y)$$

Тогда

$$\Im\{z(x,y)\} = \Im\{\ln f(x,y)\} = \Im\{\ln i(x,y)\} + \Im\{\ln r(x,y)\}$$

или

$$Z(u,v) = F_i(u,v) + F_r(u,v)$$

#### Применим фильтрацию

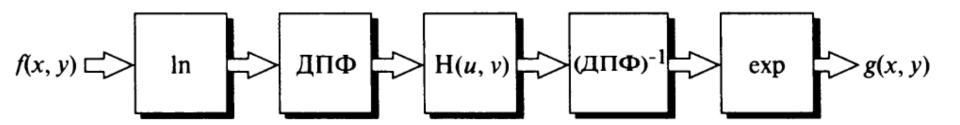
$$S(u,v) = H(u,v)Z(u,v) = H(u,v)F_i(u,v) + H(u,v)F_r(u,v)$$

#### В пространственной области имеем

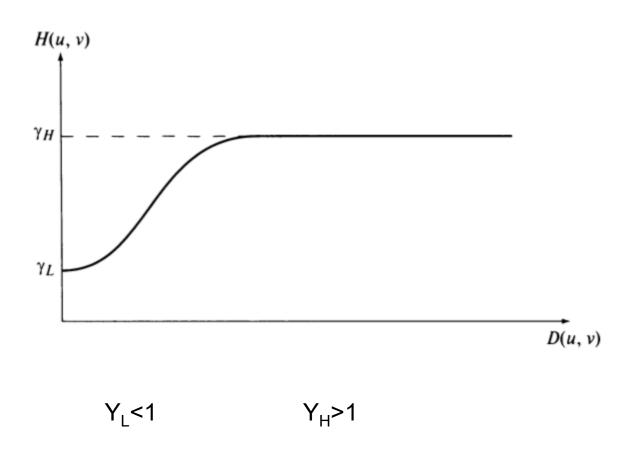
$$s(x,y) = \mathfrak{I}^{-1}\{S(u,v)\} = \mathfrak{I}^{-1}\{H(u,v)F_i(u,v)\} + \mathfrak{I}^{-1}\{H(u,v)F_r(u,v)\}$$
$$s(x,y) = i'(x,y) + r'(x,y)$$

$$g(x,y) = e^{s(x,y)} = e^{i'(x,y)} \cdot e^{r'(x,y)} = i_0(x,y) \cdot r_0(x,y)$$

#### Схема метода гомоморфной фильтрации



### Профиль центрально-симетричной передаточной функции фильтра



### Аппроксимация модифицированным ГФВЧ

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left| 1 - e^{\left(-c\left(D^2(u,v)/D_0^2\right)\right)} \right| + \gamma_L$$

Константа С управляет крутизной наклона

Похож на фильтр усиления высоких частот

#### Результат гомоморфной фильтрации





$$\gamma_L = 0.5$$
  $\gamma_H = 2.0$