

Лабораторная работа.
Вычисление определенного интеграла по КФ Гаусса.

Постановка задачи. Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

и будем разыскивать его приближенное значение с требуемой точностью ε .

Методы решения. Квадратурные формулы Гаусса имеют вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n A_k F(t_k), \quad F(t_k) = f\left(\frac{b+a}{2} + t_k \frac{b-a}{2}\right), \quad (2)$$

Узлы интегрирования являются нулями многочлена Лежандра

$$G_{n+1}(t) = \frac{1}{n+1} ((2n+1)t G_n(t) - n G_{n-1}(t)) \quad (3)$$

Коэффициенты квадратурной формулы Гаусса определяются по формуле

$$A_k = \int_{-1}^1 \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{t - t_i}{t_k - t_i} dt \quad (4)$$

Квадратурная формула Гаусса точна для многочленов степени не выше $2n + 1$.

Правило Рунге расчета интеграла с требуемой точностью позволяет подобрать число n так, чтобы приближенное значение определенного интеграла было найдено с требуемой точностью

$$|I^n - I^{2n}| < \varepsilon \quad (5)$$

Методические указания

- Выберите определенный интеграл для отладки программы.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 1 \quad (6)$$

- Задайте подинтегральную функцию, пределы интегрирования и точность

```
> restart;  
> f:=(x)->sin(x);  
> a:=0; b:=Pi/2; eps:=0.0001;
```

- Составьте процедуру для квадратурной формулы Гаусса. Параметрами являются пределы интегрирования a , b и число n . Используйте библиотеку ортогональных многочленов, в которой многочлен Лежандра — $P(n, t)$

```
> with(orthopoly):  
> P(2,t);  
> rez:=solve(P(2,t),x);
```

- Составьте процедуру для расчета интеграла с требуемой точностью по правилу Рунге. Параметрами являются a , b , $nstart$, $nend$ и точность ε . Результатом процедуры является приближенное значение интеграла, число n и код завершения (0 - нормально, 1 - ошибка).
- Вычислите значение интеграла и величину отклонения от точного значения по модулю.
- Сохраните результаты работы для тестового примера в личной папке под именем КВАДРФОРМУЛА₍₀₎.MWS, ---₍₀₀₎.MWS.
- Оформите отчет, который включает: текст задания, описание квадратурной формулы, код с результатами для теста и индивидуального варианта.