

Лабораторная работа.

Решение системы линейных алгебраических уравнений LU -разложением

Постановка задачи. Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

...

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

Требуется найти решение системы прямым методом, основанным на LU -разложении.

Элементы теории. В качестве **прямого метода** решения возьмем метод LU -разложения. Представим матрицу A в виде $A=LU$, где L — нижнетреугольная матрица, U — верхнетреугольная матрица. Расчетные формулы метода имеют вид

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad i = 2, \dots, n \quad (2)$$

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}, \quad j = 2, \dots, n \quad (3)$$

$$l_{i2} = \frac{1}{u_{22}} (a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12}), \quad i = 3, \dots, n \dots \quad (4)$$

Следует чередовать вычисление строк матрицы U и столбцов матрицы L , в общем виде с учетом порядка выполнения расчета формулы имеют вид:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \quad i \leq j \quad (5)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right), \quad i > j \quad (6)$$

После того, как будут найдены матрицы L и U , решение системы $Ax = b$ сводится к последовательному решению двух систем:

$$Ly = b, \quad (7)$$

$$y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2 - l_{21} y_1, \quad y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k, \quad i = 2, \dots, n \quad (8)$$

$$Ux = y, \quad (9)$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} \cdot x_k \right), \quad i = n-1, \dots, 1 \quad (10)$$

Для контроля вычислений следует вычислить невязку для полученного решения:

$$NV = \|Ax - b\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right| \quad (11)$$

Методические указания

- Возьмите в качестве теста систему уравнений с симметричной матрицей коэффициентов, имеющей диагональное преобладание, например, третьего порядка для теста (с известным целым решением). Найдите матрицы L , U и вектор y для отладки программы.
- Запрограммируйте процедуру $LU(n, A)$ для определения матриц L и U .
- Запрограммируйте процедуру решения системы $SLU(n, A, b)$.
- Посчитайте невязку для решения, полученного прямым методом.
- Сохраните результаты работы для своего примера в личной папке под именем СИСТЕМА ЛИН УРАВНЕНИЙ(ТЕСТ).MWS.
- Для индивидуального задания выполните расчет прямым методом, рассчитайте невязку. Сохраните результаты работы в личной папке под именем СИСТЕМА ЛИН УРАВНЕНИЙ(ИНД).MWS.
- Оформите отчет, который включает: текст задания, описание методов решения, код с результатами.