Компьютерная графика. Современные технологии компьютерной графики и рендеринга

Лекция 1

02.04.02 ФИИТ

Разработка мобильных приложений и компьютерных игр

2025-2026

WebGL

WebGL (Web-based Graphics Library) — кроссплатформенный API для 3D-графики в браузере, разработан некоммерческой организацией Khronos Group

Тип	API
Автор	Mozilla Foundation
Разработчик	Khronos Group
Операционная система	Cross-platform
Первый выпуск	3 марта 2011
Последняя версия	2.0 (30 августа 2018)
Лицензия	Various
Сайт	khronos.org/webgl/

Современная версия 2.0 (несовместима с версией 1.0) доступна с весны 2017 года (January 17, 2017 :-)

9 февраля 2022 года Khronos Group объявила о поддержке WebGL 2.0 во всех основных браузерах

Особенности WebGL

- Исполняется как элемент HTML5, является полноценной частью объектной модели документа (DOM API) браузера.
- Использует язык программирования шейдеров GLSL.
- Для большинства вычислений использует GPU (видеокарту), а не CPU (центральный процессор).
- Элементы WebGL могут быть интегрированы вместе с другими элементами HTML и объединены с другими частями страницы или фоном страницы.
- WebGL использует два типа шейдеров:
  - Вершинные шейдеры обрабатывают каждую вершину объекта.
  - Фрагментные шейдеры отвечают за цвет и свет на каждой точке, добавляют текстуры, отражения и тени. Они работают с каждым пикселем и определяют его конечный вид.

WebGPU

WebGPU — стандарт для работы с графическим процессором (GPU) в браузере.

WebGPU — это один из современных API, предназначенных для работы с компьютерной графикой.

Это преемник WebGL, построен поверх современных нативных графических API — таких как Direct3D 12, Metal и Vulkan — вместо OpenGL ES.

Разработан рабочей группой W3C «GPU for the Web» совместно с инженерами из Apple, Mozilla, Microsoft, Google и других компаний.

Особенности WebGPU

WebGPU предоставляет разработчикам низкоуровневый доступ к GPU.
Это позволяет создавать более производительные и сложные приложения.

Некоторые особенности работы:

- Поддержка вычислительных шейдеров — JavaScript- и WebAssembly-код могут выполнять параллельные вычисления — например, физику, симуляции или машинное обучение — напрямую на GPU.
- Низкоуровневая модель работы с буферами, текстурами и командными буферами.
- Кроссплатформенность — стандарт предназначен для работы на разных платформах и устройствах.

Особенности API WebGPU

Раздельное управление ресурсами, подготовительными работами и передачей команд в GPU (в WebGL один объект отвечал за всё разом).

Подход при обработке состояний — в WebGPU предлагается два объекта — GPURenderPipeline и GPUComputePipeline, позволяющих комбинировать различные состояния, заранее определённые разработчиком.

Модель связывания — для объединения ресурсов в группы в WebGPU предоставляется объект GPUBindGroup, который во время записи команд можно связать с другими такими же объектами для использования в шейдерах.

Функция Render Bundles — позволяет разработчикам записывать и использовать наборы команд рендеринга для улучшенной производительности.

Язык шейдеров для WebGPU

Для WebGPU разработан WGSL (WebGPU Shading Language) — язык для написания шейдеров.

Некоторые особенности WGSL:

- Синтаксис вдохновлён Rust
- Строгая система типов
- Встроенная поддержка для вычислительных шейдеров
- Поддержка трёх этапов конвейера: vertex, fragment и compute

Реализация WebGPU

По данным на декабрь 2025 года, стандарт WebGPU официально поддерживается в стабильных версиях Chrome, Edge, Firefox и Safari.

Например:

- Chrome, Edge и другие браузеры на базе Chromium — WebGPU доступен в Windows (с Direct3D 12), macOS и ChromeOS, начиная с Chrome и Edge версии 113. Поддержка Android была добавлена в Chrome версии 121 для устройств под управлением Android 12 и выше, оснащённых GPU Qualcomm/ARM.
- Firefox — WebGPU доступен в Windows начиная с Firefox 141, в macOS Tahoe 26 на устройствах ARM64 — начиная с Firefox 145. Поддержка Linux, Android и Mac-компьютеров на Intel находится в разработке.
- Safari — WebGPU доступен в macOS Tahoe 26, iOS 26, iPadOS 26 и visionOS 26.

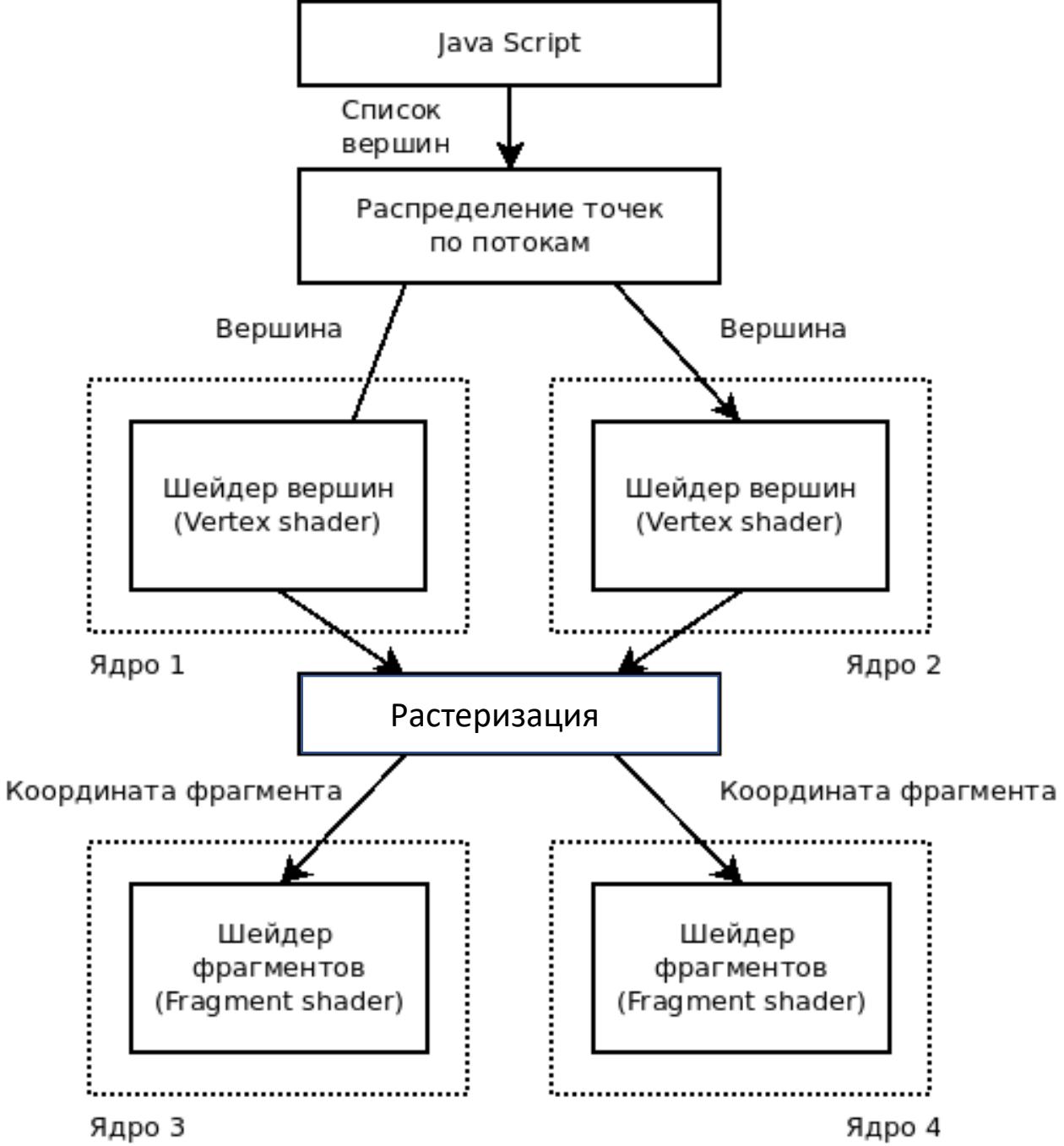
Это даёт разработчикам единый графический API, который они могут задействовать во всех основных браузерных движках.

Основные графические операции WebGL

- конструирует фигуры из геометрических примитивов
- позиционирует объекты в трехмерном пространстве и выбирает точку наблюдения
- вычисляет цвета для всех объектов
  - могут быть определены приложением
  - получены из расчета условий освещенности
  - вычислены при помощи текстур, наложенных на объекты
  - или из любой комбинации этих факторов
- выполняет растеризацию (растровую развертку)

Чего нет в WebGL?

- функций для создания окон
- захвата пользовательского ввода
- высокоуровневых функций для описания моделей трёхмерных объектов


Java Script
Список вершин
Распределение точек по потокам
Вершина
Вершина
Шейдер вершин (Vertex shader)
Шейдер вершин (Vertex shader)
Ядро 1
Ядро 2
Растеризация
Координата фрагмента
Координата фрагмента
Шейдер фрагментов (Fragment shader)
Шейдер фрагментов (Fragment shader)
Ядро 3
Ядро 4

Передача данных в/из/между шейдерами

- Атрибуты (данные, характеризующие вершины, берутся из буфера)

  attribute vec3 aVertexPosition;

  attribute vec4 aVertexColor;

- uniform-переменные (значения, постоянные для всех вершин на протяжении одного вызова отрисовки)

  uniform mat4 mvMatrix;

  uniform mat4 prMatrix;

- varying (in/out) – переменные (для передачи между шейдерами)

  varying vec4 color;

- Текстуры (данные из пикселей/текселей)

Схема работы

1. Получаем WebGL контекст из canvas'а
2. Загружаем программу шейдеров
   - создаем программу шейдеров
   - получаем исходный код отдельно для вершинного и фрагментного шейдеров
   - компилируем коды шейдеров
   - присоединяем к программе
   - активируем программу
3. Устанавливаем две матрицы: model-view и projection
4. Размещаем, заполняем, активируем буферы данных вершин
5. Рисуем

WebGL и OpenGL ES 2.0

WebGl имеет методы, названия которых очень похожи на функции OpenGL ES.

Например, функция

для OpenGL ES 2.0
glclear(COLOR_BUFFER_BIT)

для WebGL
gl.clear(gl.COLOR_BUFFER_BIT)

Но не все функции WebGL имеют такой же синтаксис, как и функции OpenGL ES 2.0.

Подготовка контекста WebGL

```
var gl; // глобальная переменная для контекста WebGL

function start() {
  var canvas = document.getElementById("glcanvas");

  gl = initWebGL(canvas);      // инициализация контекста GL – сами пишем

  // продолжать только если WebGL доступен и работает
…
```

function initWebGL

```
function initWebGL(canvas) {
  gl = null;

  try {      // Попытаться получить стандартный контекст.
             // Если не получится, попробовать получить экспериментальный.
    gl = canvas.getContext("webgl2") || canvas.getContext("webgl") || canvas.getContext("experimental-webgl");
  }
  catch(e) {}

  // Если мы не получили контекст GL, завершить работу
  if (!gl) {
    alert("Unable to initialize WebGL. Your browser may not support it.");
    gl = null;
  }

  return gl;
}
```

Расширенный вариант

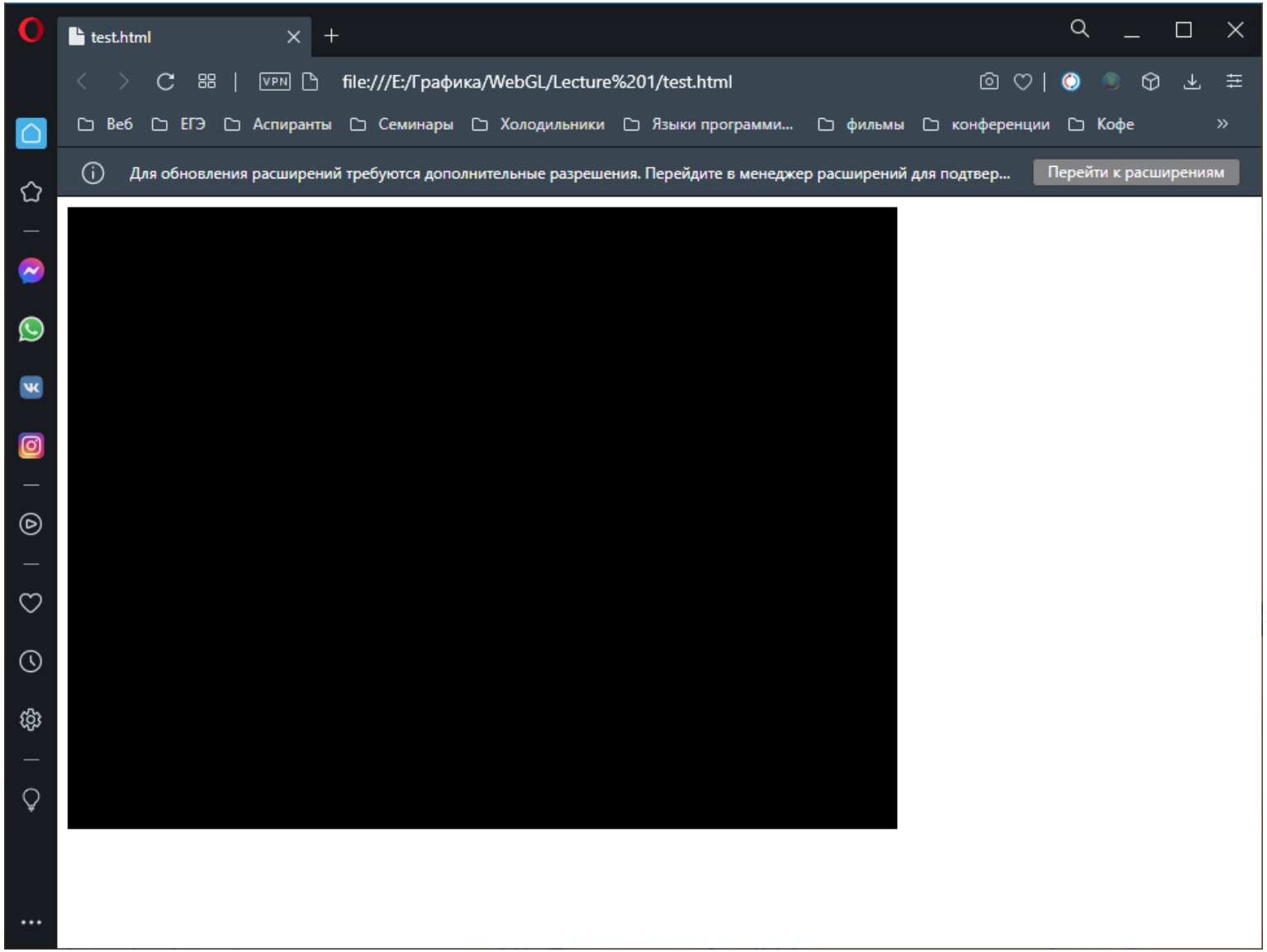
```
var names = ["webgl2", "webgl", "experimental-webgl", "webkit-3d", "moz-webgl"];
    gl = null;
    for (var ii = 0; ii < names.length; ++ii) {
        try {
            gl = canvas.getContext(names[ii]);
        }
        catch(e) {}
        if (gl) {
            break;
        }
    }
```

А можно так начать

```
main();
//
// Start here
//
function main() {
  const canvas = document.querySelector('#glcanvas');
  const gl = canvas.getContext('webgl2');
  // If we don't have a GL context, give up now
  if (!gl) {
      alert('Unable to initialize WebGL. Your browser or machine may not support it.');
      return;
  }
…
}
```

Если WebGL доступен

```
if (gl) { // продолжать только если WebGL доступен и работает

    // Устанавливаем размер вьюпорта
    gl.viewport(0, 0, gl.canvas.width, gl.canvas.height);

   // установить в качестве цвета очистки буфера цвета черный, полная непрозрачность
   gl.clearColor(0.0, 0.0, 0.0, 1.0);

  // включает использование буфера глубины
   gl.enable(gl.DEPTH_TEST);

  // определяет работу буфера глубины: более ближние объекты перекрывают дальние
  gl.depthFunc(gl.LEQUAL);

 // очистить буфер цвета и буфер глубины
 gl.clear(gl.COLOR_BUFFER_BIT|gl.DEPTH_BUFFER_BIT);

  }
} // function start
```


test.html
file:///E:/Графика/WebGL/Lecture%201/test.html
Веб
ЕГЭ
Аспиранты
Семинары
Холодильники
Языки программи...
фильмы
конференции
Кофе
Для обновления расширений требуются дополнительные разрешения. Перейдите в менеджер расширений для подтвер...
Перейти к расширениям

Вершинный шейдер (js)

```
const vsSource = '
        attribute vec3 aVertexPosition;
        attribute vec4 aVertexColor;
        uniform mat4 mvMatrix;
        uniform mat4 prMatrix;
        varying vec4 color;
        //out vec4 color;


        void main(void) {
                gl_Position = prMatrix * mvMatrix * vec4 ( aVertexPosition, 1.0 );
                color = aVertexColor;
        }
';
```

Исходный код вершинного шейдера – еще вариант

```
"use strict";

// Исходный код вершинного шейдера

const vsSource = ' #version 300 es
// Координаты вершины. Атрибут, инициализируется через буфер.
varying vec2 vertexPosition;
//in vec2 vertexPosition;

void main() {
    gl_Position = vec4(vertexPosition, 0.0, 1.0);
} ';
```

Фрагментный шейдер

```
const fsSource = '
        #ifdef GL_ES
        precision highp float;
        #endif
        varying vec4 color;
        //in vec4 color;

        void main(void) {
                gl_FragColor = color;
         }
 ';
```

Исходный код фрагментного шейдера – еще один вариант

```
// Исходный код фрагментного шейдера
const fsSource = '#version 300 es
// WebGl требует явно установить точность флоатов, так что ставим 32 бита
precision mediump float;
out vec4 color;
void main() {
    color = vec4(0, 1, 0, 1);
} ';
```

Вершинный шейдер внутри .html

```
<script id="shader-vs" type="x-shader/x-vertex">
  attribute vec3 aVertexPosition;

  uniform mat4 uMVMatrix;
  uniform mat4 uPMatrix;

  void main(void) {
    gl_Position = uPMatrix * uMVMatrix * vec4(aVertexPosition, 1.0);
  }
</script>
```

Фрагментный шейдер внутри .html

```
<script id="shader-fs" type="x-shader/x-fragment">
  void main(void) {
    gl_FragColor = vec4(1.0, 1.0, 1.0, 1.0);
  }
</script>
```

Инициализация шейдеров

```
// внутри main()

const shaderProgram = initShaderProgram(gl, vsSource, fsSource); //пишете сами
```

initShaderProgram

```
function initShaderProgram(gl, vsSource, fsSource) {
        const vertexShader = loadShader(gl, gl.VERTEX_SHADER, vsSource);
        const fragmentShader = loadShader(gl, gl.FRAGMENT_SHADER, fsSource);

        // Create the shader program


        …



}
```

Загрузка шейдеров

```
function loadShader(gl, type, source) {

        const shader = gl.createShader(type);

        // Send the source to the shader object
        gl.shaderSource(shader, source);

        // Compile the shader program
        gl.compileShader(shader);

        // See if it compiled successfully
         if (!gl.getShaderParameter(shader, gl.COMPILE_STATUS)) {
                alert('An error occurred compiling the shaders: ' + gl.getShaderInfoLog(shader));
                gl.deleteShader(shader);
                return null;
        }
        return shader;
}
```

Create the shader program

```
    …

    // Create the shader program
    const shaderProgram = gl.createProgram();

    gl.attachShader(shaderProgram, vertexShader);
    gl.attachShader(shaderProgram, fragmentShader);

     gl.linkProgram(shaderProgram);

    // If creating the shader program failed, alert
    if (!gl.getProgramParameter(shaderProgram, gl.LINK_STATUS)) {
            alert('Unable to initialize the shader program: ' + gl.getProgramInfoLog(shaderProgram));
            return null;
    }
    return shaderProgram;
}
```

Использование шейдерной программы

gl.useProgram(shaderProgram);

vertexPositionAttribute = **gl.getAttribLocation**(shaderProgram, "aVertexPosition");
gl.enableVertexAttribArray(vertexPositionAttribute);

VBO (Vertex Buffer Object)

```
function initBuffers() {
  squareVerticesBuffer = gl.createBuffer();

  gl.bindBuffer(gl.ARRAY_BUFFER, squareVerticesBuffer);

  var vertices = [
    1.0,  1.0,  0.0,
    -1.0, 1.0,  0.0,
    1.0,  -1.0, 0.0,
    -1.0, -1.0, 0.0
  ];

  gl.bufferData(gl.ARRAY_BUFFER, new Float32Array(vertices), gl.STATIC_DRAW);
}
```

Вначале метод createBuffer() объекта gl создает буфер, в котором мы будем хранить вершины.

Затем буфер привязывается к контексту, вызовом метода bindBuffer().

Затем создаем JavaScript массив, содержащий координаты для каждой вершины квадрата.

Затем этот массив преобразуется в массив вещественных чисел WebGL и передается в метод bufferData() объекта gl для назначения вершин объекту.

Отрисовка сцены без анимации

```
function drawScene() {
  gl.clear(gl.COLOR_BUFFER_BIT | gl.DEPTH_BUFFER_BIT);

  perspectiveMatrix = makePerspective(45, 640.0/480.0, 0.1, 100.0);

  loadIdentity();
  mvTranslate([-0.0, 0.0, -6.0]);

  gl.bindBuffer(gl.ARRAY_BUFFER, squareVerticesBuffer);
  gl.vertexAttribPointer(vertexPositionAttribute, 3, gl.FLOAT, false, 0, 0);

  setMatrixUniforms();
  gl.drawArrays(gl.TRIANGLE_STRIP, 0, 4);
}
```

угол обзора -- 45°
соотношение w к h -- 640/480 (размеры canvas)
near -- 0.1
far -- 100 единиц от камеры

Z: -6.0 — Важный момент. Так как камера смотрит вдоль оси -Z, перемещение на -6.0 отодвигает объект вперед от камеры. Камера находится в точке (0,0,0), мы сдвигаем всё на -6 по Z, значит объект окажется в 6 единицах перед камерой.

gl.vertexAttribPointer(index, size, type, norm, stride, offset)

gl.vertexAttribPointer(vertexPositionAttribute, 3, gl.FLOAT, false, 0, 0);

index: индекс атрибута, который мы сопоставляем с буфером вершин

size: число значений для каждой вершины, которые хранятся в буфере. Например, у нас три координаты на вершину, поэтому и число передаваемое в качестве данного параметра будет равно 3

type: тип значений, который хранятся в буфере. В качестве значения параметр может принимать следующие константы: FIXED, BYTE, UNSIGNED_BYTE, FLOAT, SHORT и UNSIGNED_SHORT

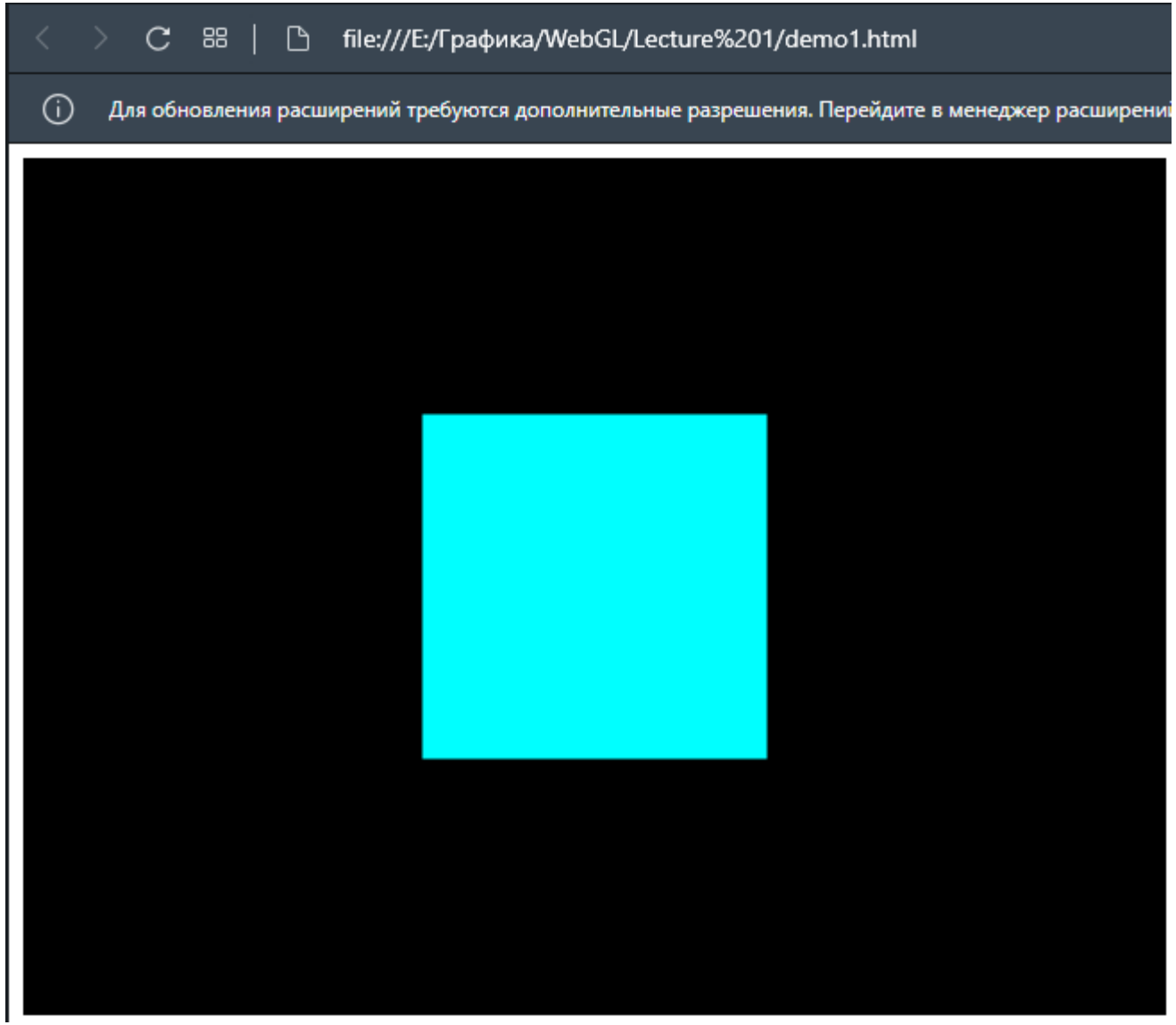
norm: True, если будут нормализованы

stride: шаг между значениями. При установке в качестве значения 0 элементы будут последовательно обрабатываться

offset: смешение - позиция в буфере, с которой начинается обработка

Для setMatrixUniforms

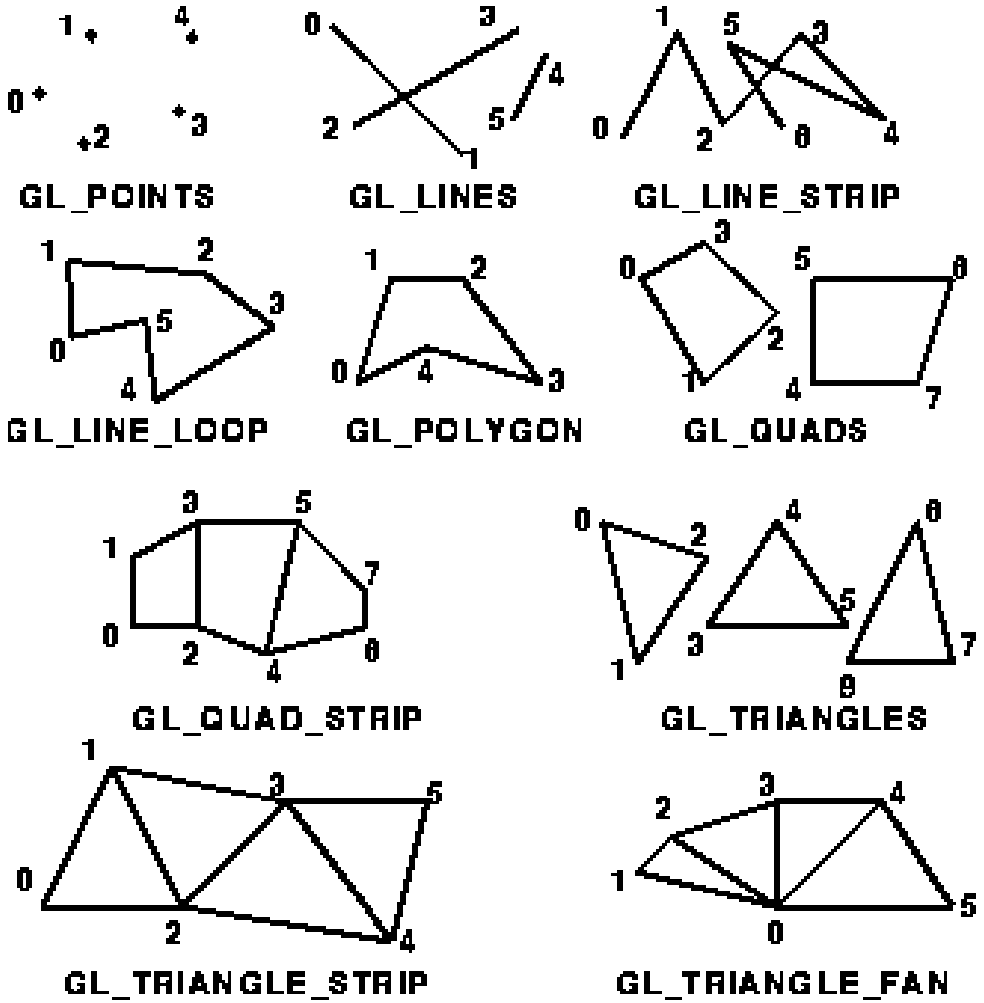
```
// Где-то в функции инициализации (init())
shaderProgram.uPMatrix = gl.getUniformLocation(shaderProgram, 'uPMatrix');
shaderProgram.uMVMatrix = gl.getUniformLocation(shaderProgram, 'uMVMatrix');

// Функция drawScene просто использует сохраненные ссылки
function setMatrixUniforms() {
    // Используем заранее сохраненные локации
    gl.uniformMatrix4fv(shaderProgram.uPMatrix, false, perspectiveMatrix);
    gl.uniformMatrix4fv(shaderProgram.uMVMatrix, false, mvMatrix);
}
```

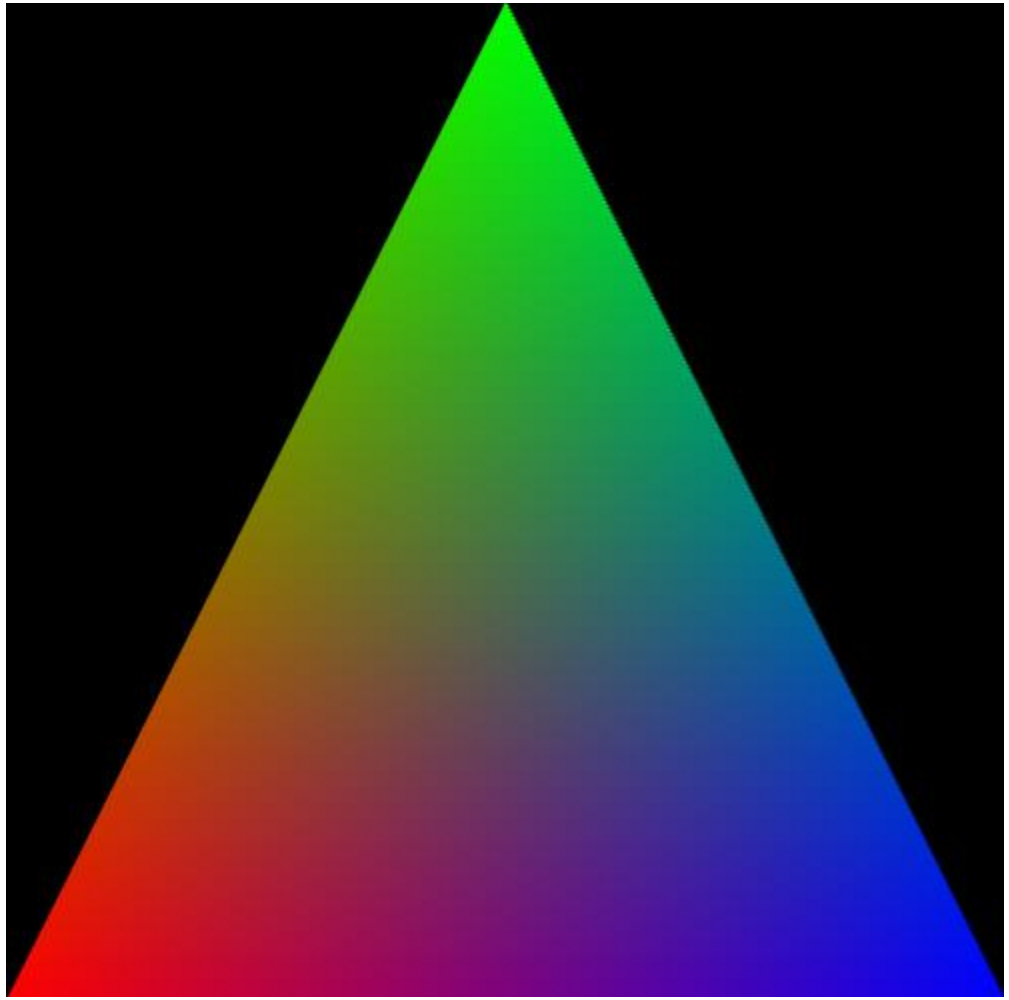

file:///E:/Графика/WebGL/Lecture%201/demo1.html
Для обновления расширений требуются дополнительные разрешения. Перейдите в менеджер расширений

glDrawArrays(тип, смещение, количество);

gl.drawArrays(gl.TRIANGLE_STRIP, 0, 4);

glDrawArrays(GL_TRIANGLES, 0, n*3);

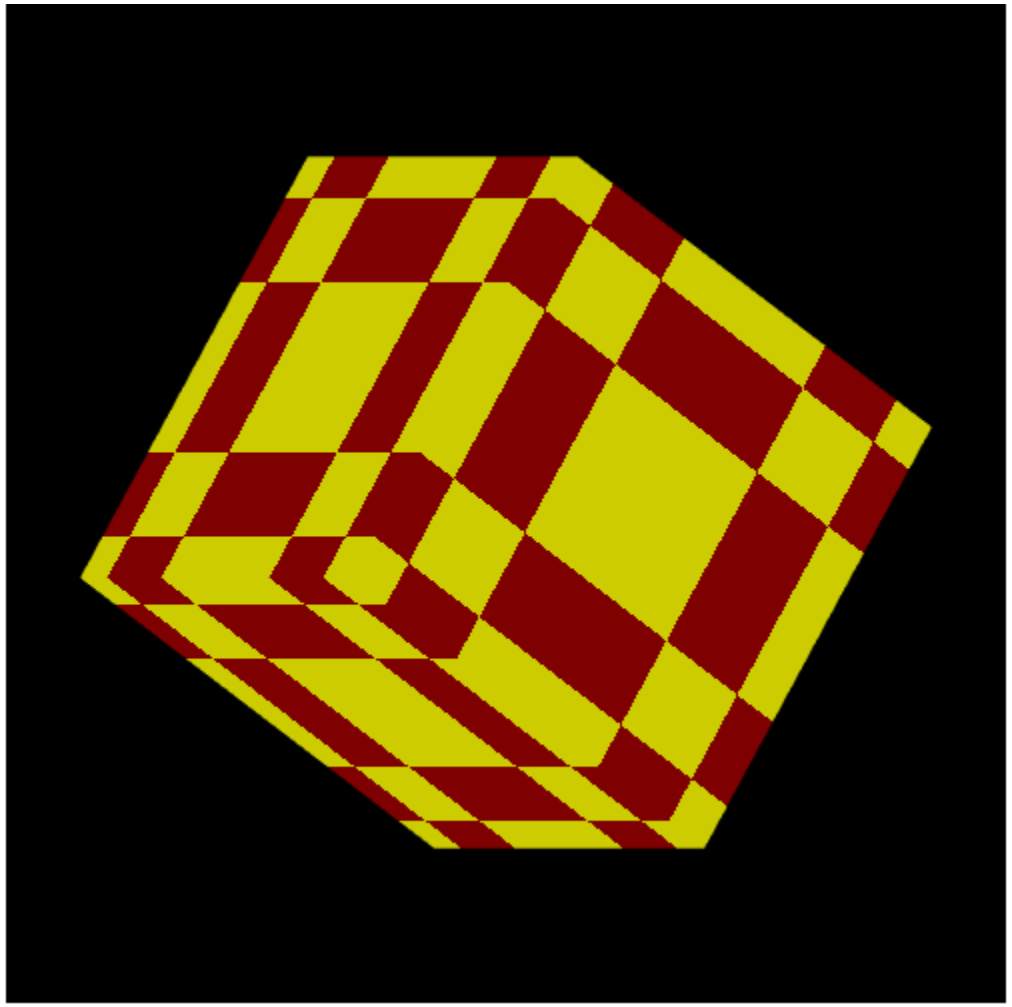




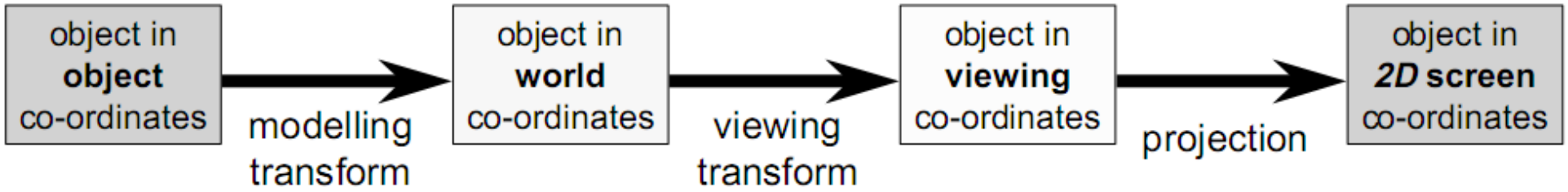
```
// Треугольник

// Превращаем в плоский массив

const positions = [          [-1, -1],          [+0, +1],          [+1, -1],       ].flat()
 // Координаты вершин

// Цвета вершин
const colors = [       [1, 0, 0, 1],       [0, 1, 0, 1],       [0, 0, 1, 1],    ].flat()

const positionBuffer = makeF32ArrayBuffer(gl, positions);   //своя функция
const colorBuffer = makeF32ArrayBuffer(gl, colors);
```

```
function makeF32ArrayBuffer(gl, array) {

  // Создаём буфер
  const buffer = gl.createBuffer();

   gl.bindBuffer (gl.ARRAY_BUFFER, buffer);

   // Заполняем буфер массивом флоатов
   gl.bufferData ( gl.ARRAY_BUFFER,  new Float32Array(array),  gl.STATIC_DRAW );

   return buffer;
}
```

```
function drawScene(gl, programInfo, buffers) {
  // Чистим экран
  gl.clearColor(0.0, 0.0, 0.0, 1.0);
  gl.clearDepth(1.0);
  gl.clear(gl.COLOR_BUFFER_BIT | gl.DEPTH_BUFFER_BIT);

  // ** Подключаем буфер вершин **
  …
 // ** Подключаем буфер цветов **
 …
 // Устанавливаем используемую программу
 //Рисуем
}
```



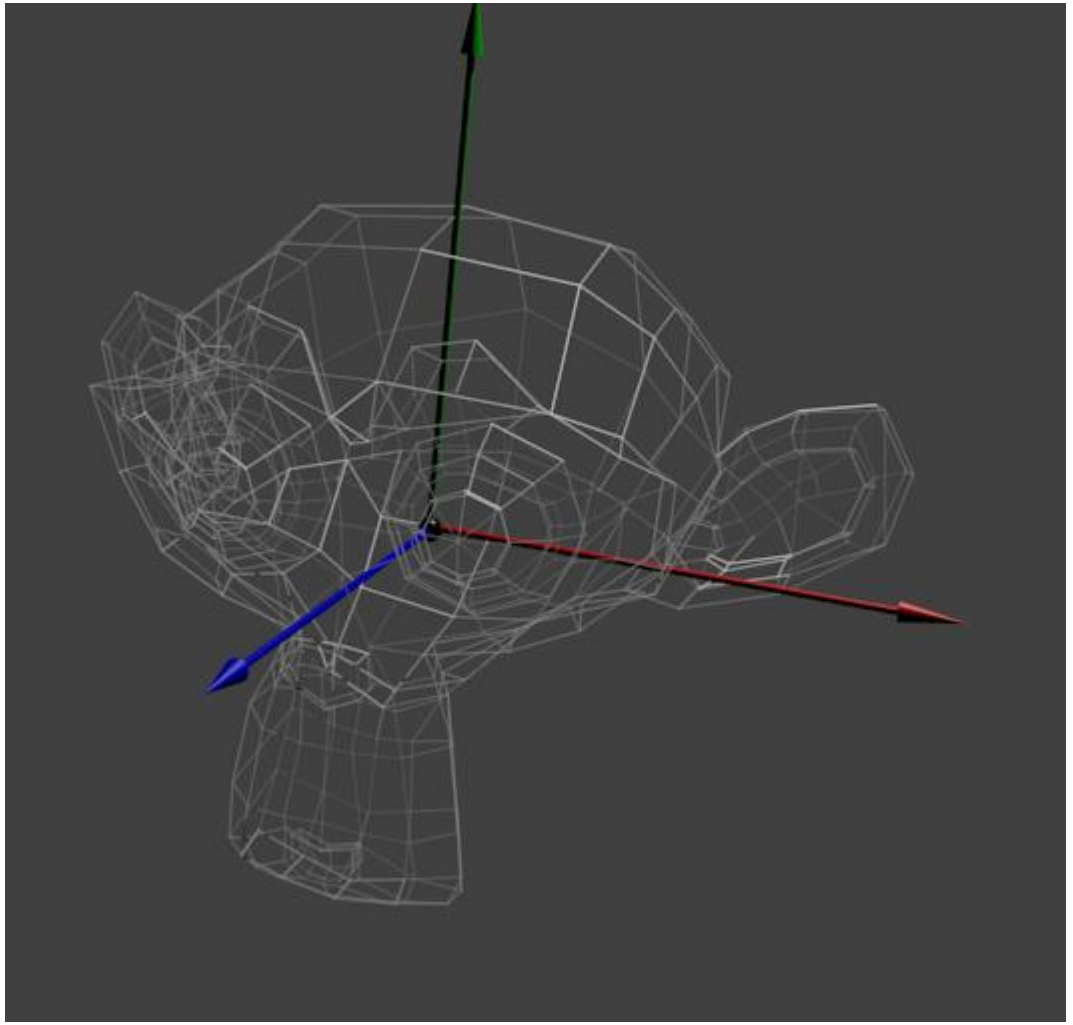
Разнообразие преобразований – мировая, видовая и проекционная матрицы



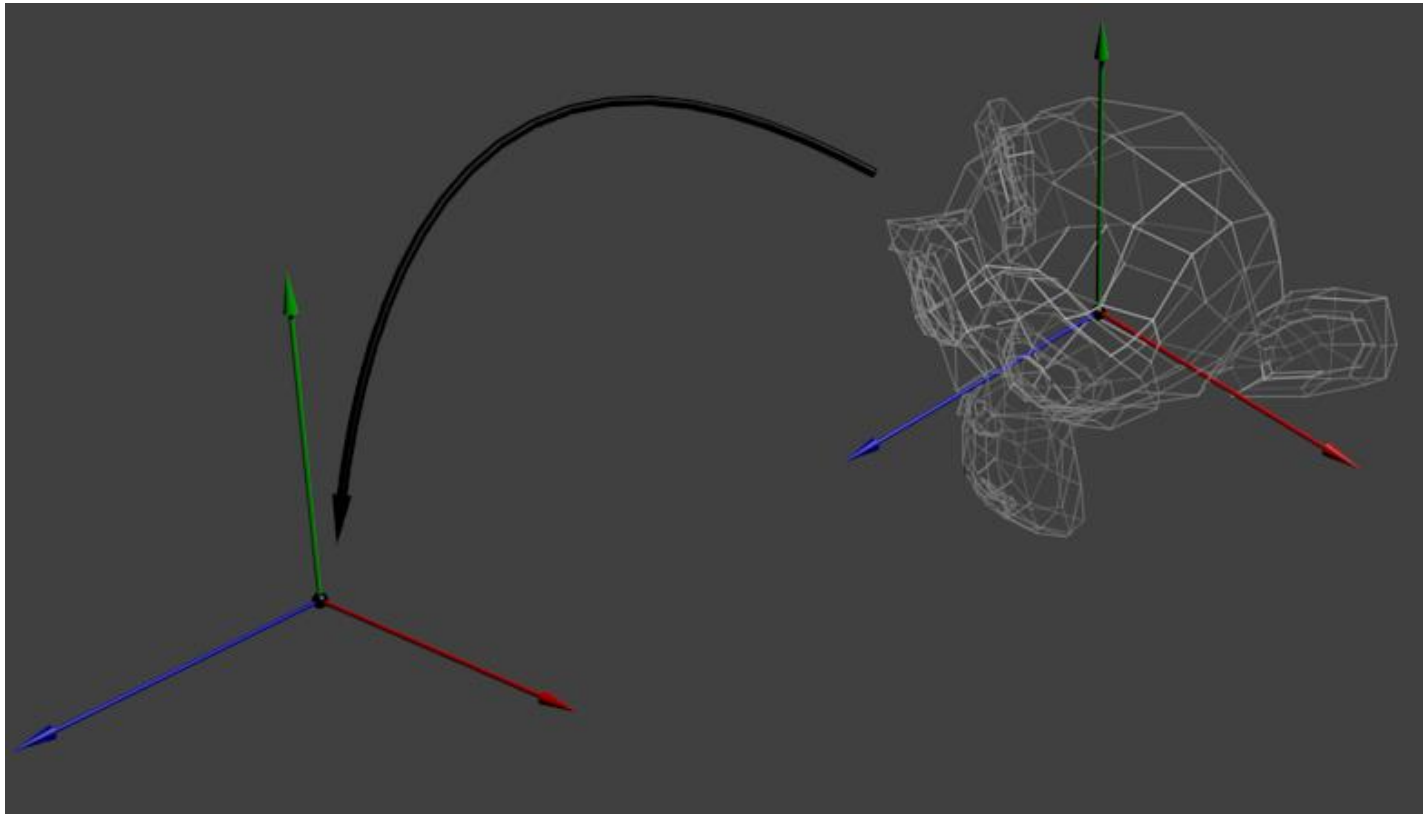
- модельно-видовая как одна матрица (мировая x видовая)
- как мировая, так и видовая могут быть единичными

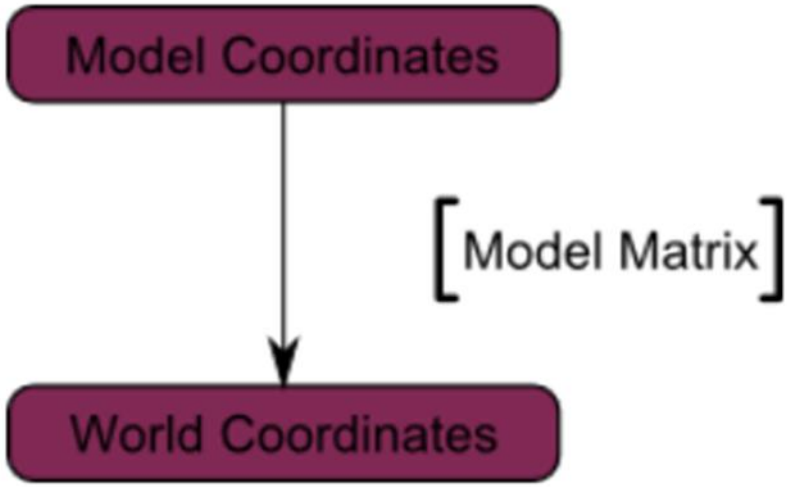
Модель в объектных координатах

Модель задается множеством вершин, координаты которых заданы относительно центра объекта, т. е. вершина с координатами (0, 0, 0) будет находиться в центре объекта.



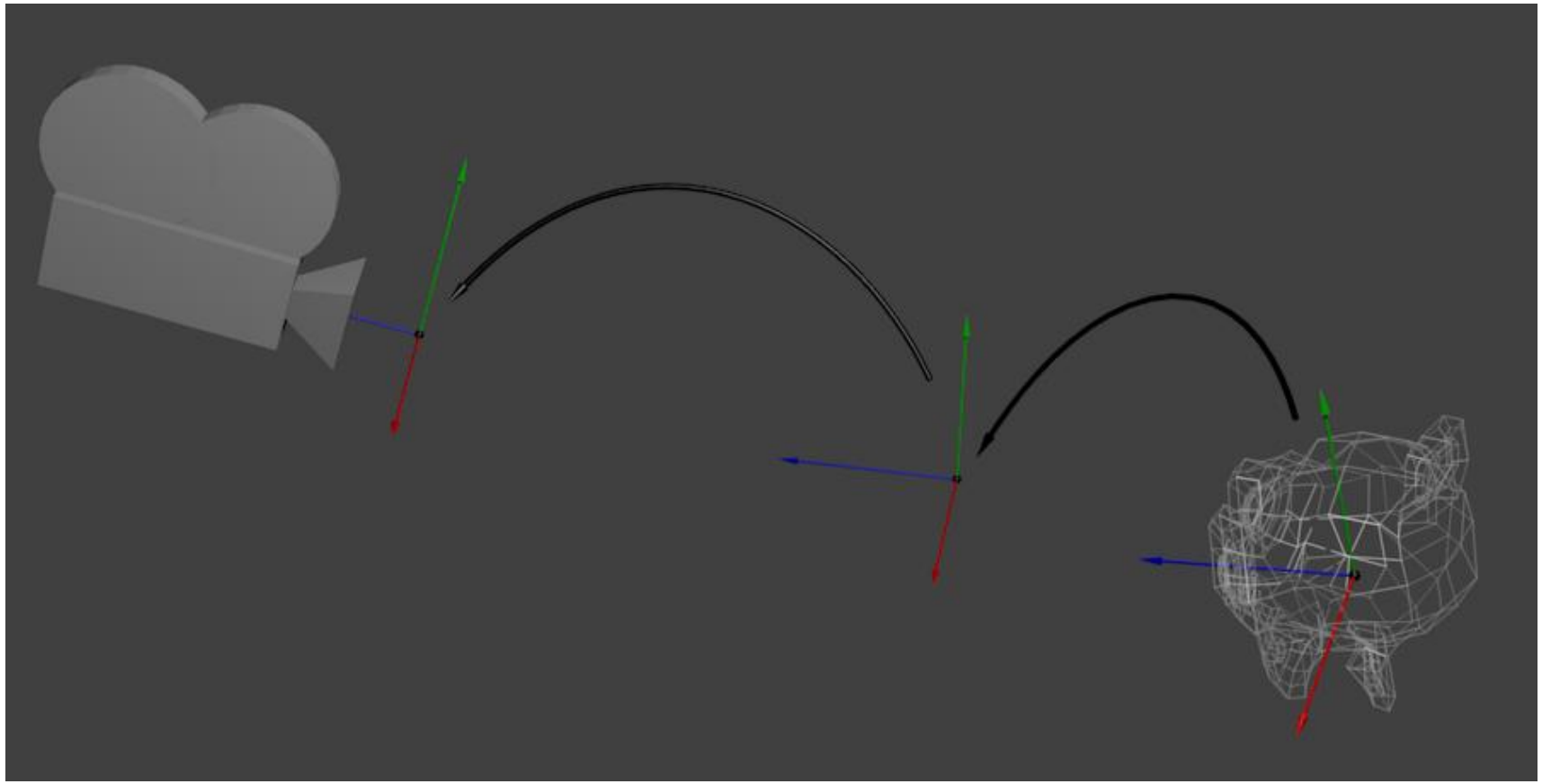
Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

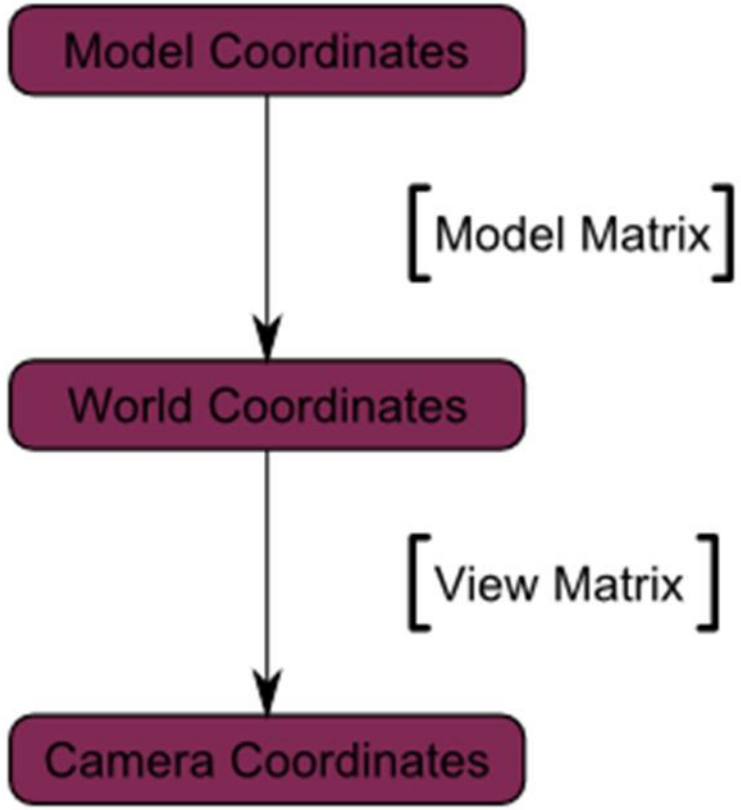




Мы перешли из пространства объекта (все вершины заданы относительно центра объекта) к мировому пространству (все вершины заданы относительно центра мира)

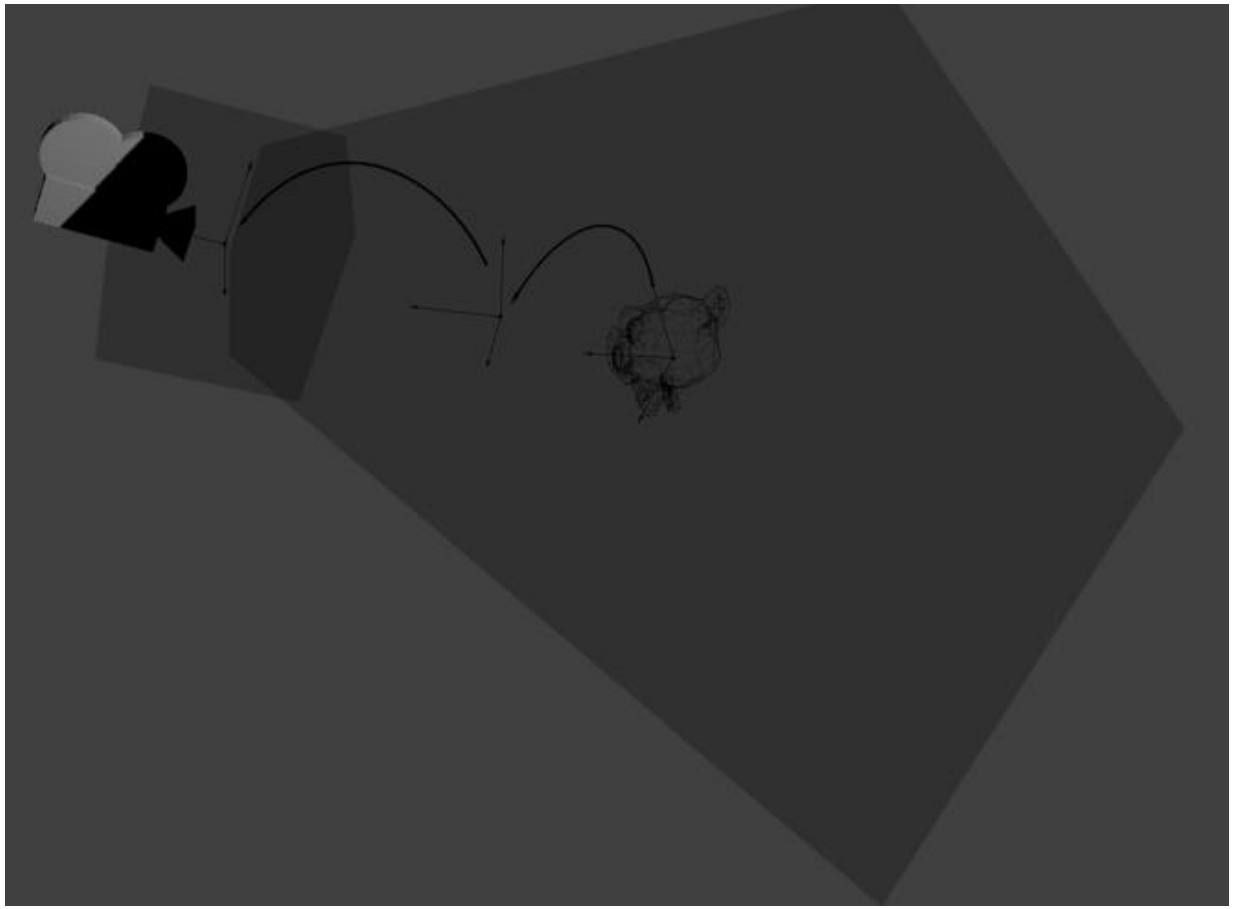
Переход к системе координат камеры – видовая матрица

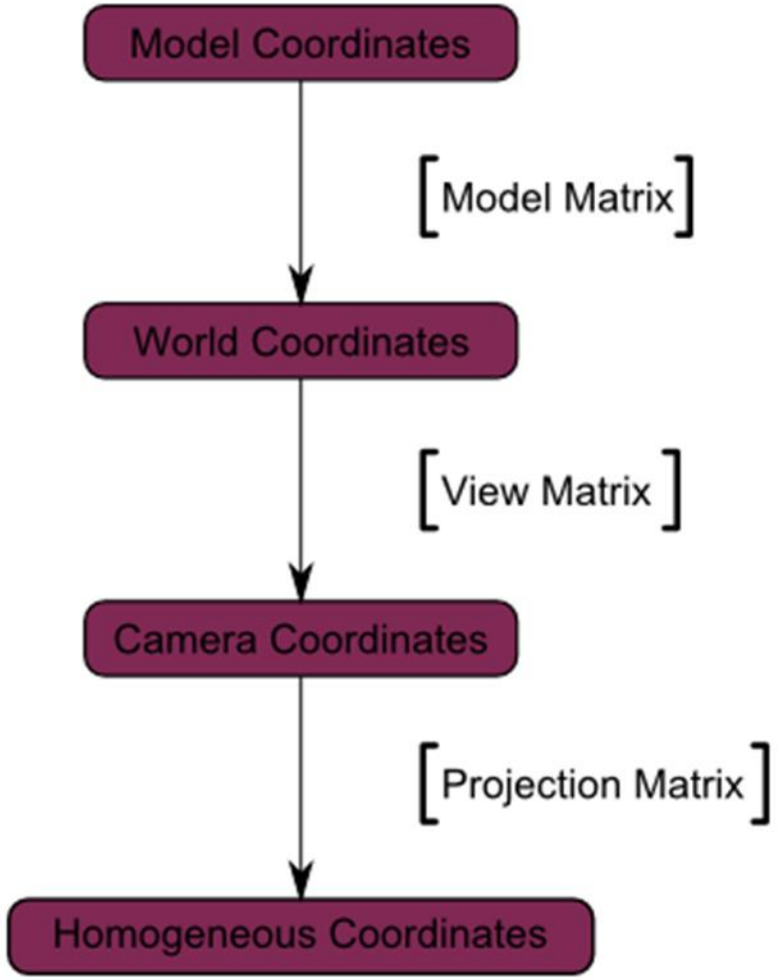




Мы перешли из мировой системы координат (все вершины заданы относительно центра мировой системы) к системе координат камеры (все вершины заданы относительно камеры)

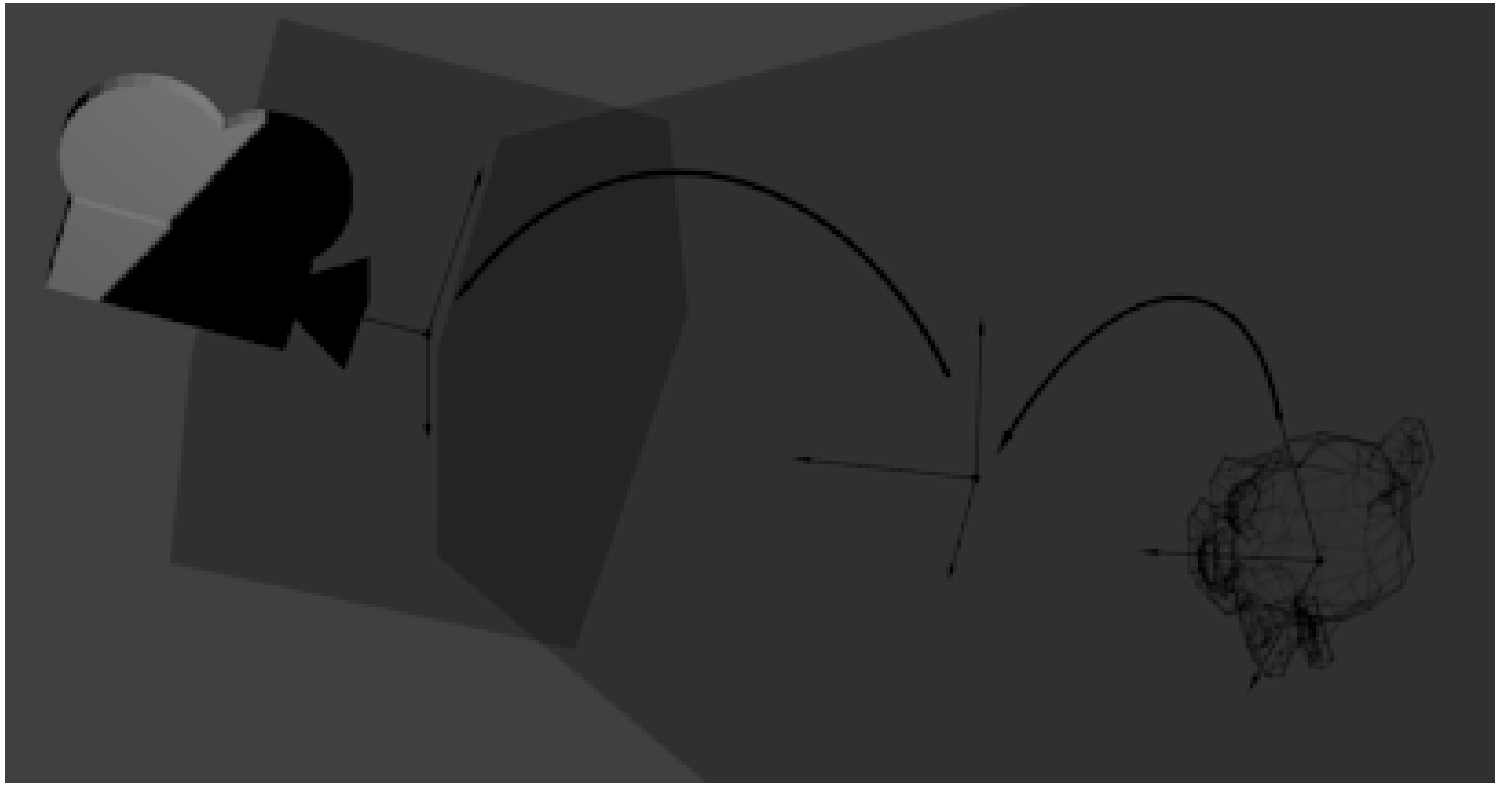
Переход из пространства камеры в однородное пространство





Мы перешли из Пространства Камеры (все вершины заданы относительно камеры) в Однородное пространство (все вершины находятся в небольшом кубе. Все, что находится внутри куба - выводится на экран).

Перспективная проекция



Вершина, которая получит координаты x == 0 и y == 0 будет отображаться по центру экрана. Однако, при отображении объекта огромную роль играет также дистанция до камеры (z). Для двух вершин, с одинаковыми x и y, вершина имеющая большее значение по z будет отображаться ближе, чем другая.

Аффинные преобразования

Определение Аффи́нное преобразование $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть преобразование вида

$$f(x) = M \cdot x + v,$$

где M — обратимая матрица и $v \in \mathbb{R}^n$.

Базовые аффинные преобразования

- Поворот вокруг начала координат на угол φ
- Растяжение/Сжатие
- Отражение
- Перенос

Однородные координаты точки

- Однородными координатами точки называется любая тройка одновременно не равных нулю чисел *x1, x2, x3*, связанных с заданными числами *x* и *y* следующими соотношениями:
- *x1 / x3 = x, x2 / x3 = y*.

Произвольная матрица аффинного преобразования

$$(x^* \cdot y^* \cdot 1) = \cdot (x \cdot y \cdot 1) \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

- A. Матрица вращения (rotation)

$$[R]=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- B. Матрица растяжения /сжатия (dilatation).

$$[D]=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

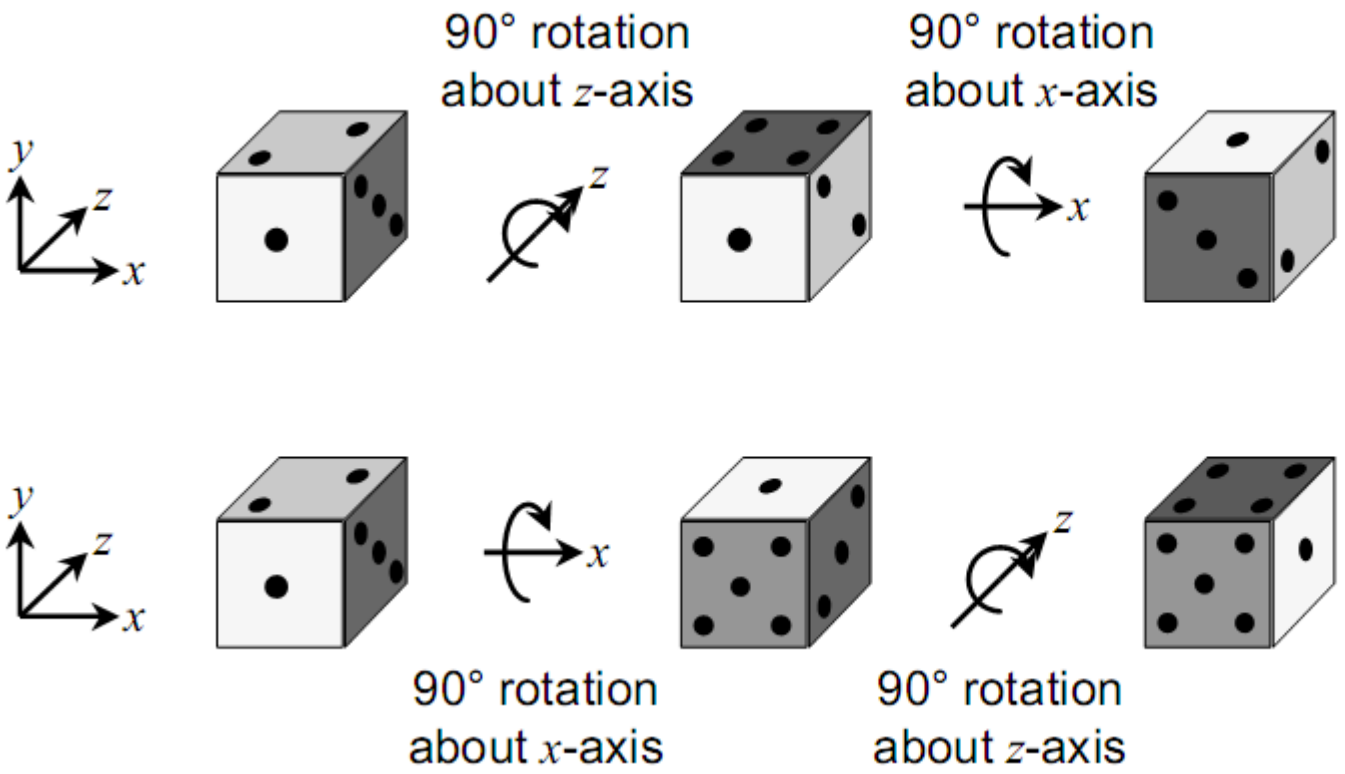
- C. Матрица отражения (reflection).

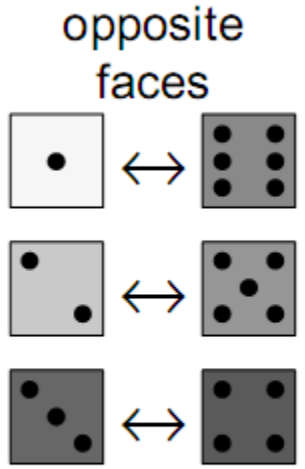
$$[M]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- D. Матрица переноса (translation).

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & \mu & 1\end{bmatrix}$$

Преобразования некоммутативны





Пример 1

Построить матрицу растяжения с коэффициентами растяжения вдоль оси абсцисс и вдоль оси ординат и с центром в точке A(a, b).

Итоговая матрица

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ (1-\alpha)\times a & (1-\delta)\times b & 1 \end{bmatrix}$$

Решение

1-й шаг. Перенос на вектор *–A(-a, -b)* для совмещения центра растяжения с началом координат

$$[T_{-a}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

2-й шаг. Растяжение вдоль координатных осей с коэффициентами α и δ соответственно.

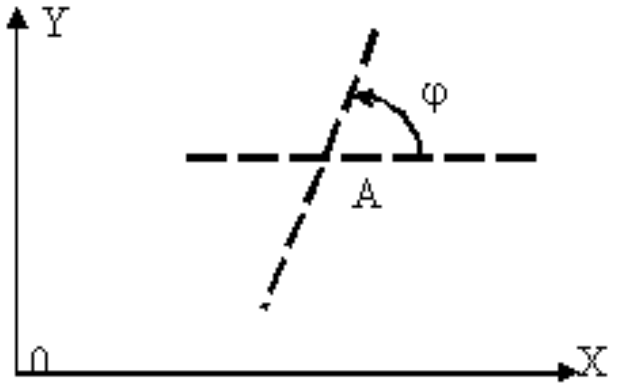
$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-й шаг. Перенос на вектор A(a, b) для возвращения центра растяжения в прежнее положение.

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример2

- Построить матрицу поворота вокруг точки *A(a, b)* на угол φ

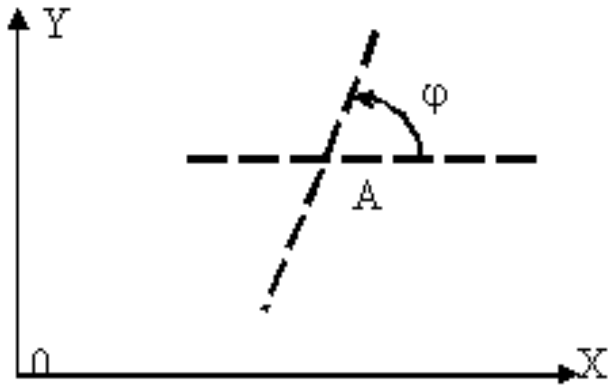


$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ -a \times \cos(\varphi) + b \times \sin(\varphi) + a & -a \times \sin(\varphi) - b \times \cos(\varphi) + b & 1 \end{bmatrix}$$

Решение: 1-й шаг

Перенос на вектор *A(-a,-b)* для совмещения центра поворота с началом координат.

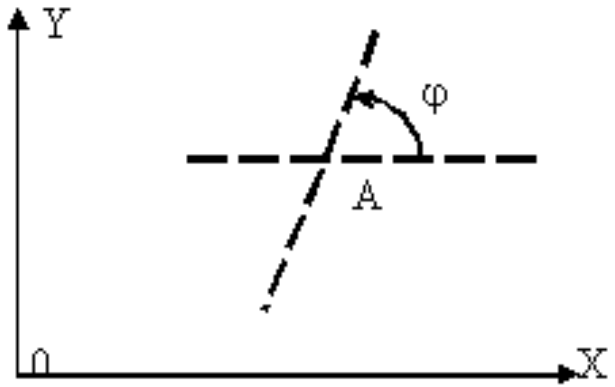
$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$



Решение: 2-й шаг

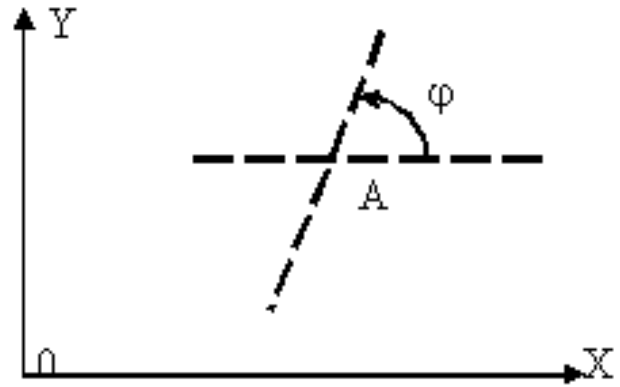
Поворот на угол φ.

$$[R_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Решение: 3-й шаг

Перенос на вектор *A(a,b)* для возвращения центра поворота в прежнее положение



$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

Итоговая матрица

$$[T_{-A}]R_{\varphi}[T_{A}]$$

$$[T_{-A}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -a & -b & 1\end{bmatrix}\qquad [R_{\varphi}]=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad [T_{A}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & b & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x^{*} & y^{*} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ -a\times\cos(\varphi)+b\times\sin(\varphi)+a & -a\times\sin(\varphi)-b\times\cos(\varphi)+b & 1\end{bmatrix}$$

Базовые аффинные преобразования (при умножении слева на вектор-строку)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Базовые аффинные преобразования (при умножении справа на вектор-столбец)

translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

identity

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about x-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

scale

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about z-axis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about y-axis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача

- Повернуть объект вокруг произвольной прямой L в пространстве на заданный угол.
- Объект задаётся списком вершин и списком рёбер.
- Прямая задаётся точкой A (a,b,c) , через которую она проходит, и единичным вектором (l,m,n).

Результирующая матрица

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos\varphi(1 - l^2) & l(1 - \cos\varphi)m + n\sin\varphi & l(1 - \cos\varphi)n - m\sin\varphi & 0 \\ l(1 - \cos\varphi)m - n\sin\varphi & m^2 + \cos\varphi(1 - m^2) & m(1 - \cos\varphi)n + l\sin\varphi & 0 \\ l(1 - \cos\varphi)n + m\sin\varphi & m(1 - \cos\varphi)n - l\sin\varphi & n^2 + \cos\varphi(1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

План решения

1. Перенести прямую L в центр координат на –A (-a,-b,-c)
2. Совместить прямую L с одной из координатных осей
3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
4. Выполнить преобразования 1 и 2 в обратной последовательности

Решение

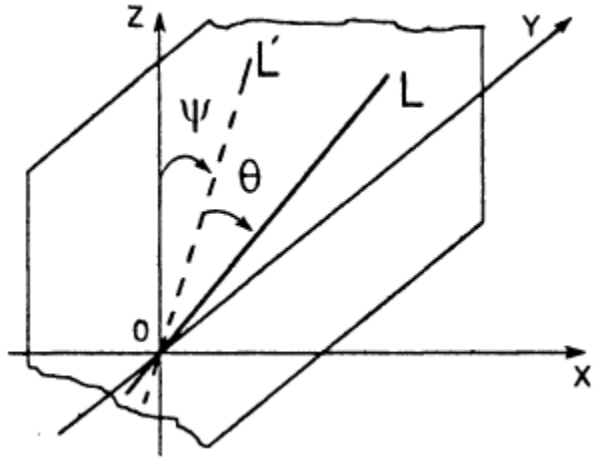
1. Перенести прямую L в центр координат на –A (-a,-b,-c)
2. Совместить прямую L с одной из координатных осей, например, Z
   - ✓ Повернуть прямую L вокруг Ox
   - ✓ Повернуть прямую L вокруг Oy
3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
4. Выполнить повороты 2 в обратной последовательности на обратные углы
5. Выполнить перенос на A (a, b, c)

Перенос на –A (-a,-b,-c)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

Совмещение прямой L с осью Z

- Повернуть прямую L вокруг Ox на угол ψ
- Повернуть прямую L вокруг Oy на угол θ

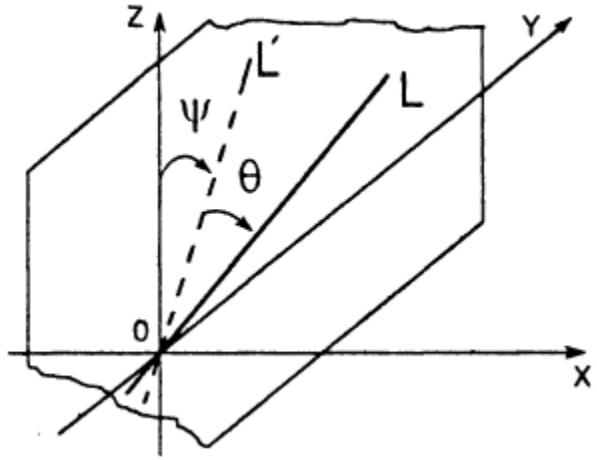


Поворот прямой L вокруг Ox на угол ψ

- Рассмотрим L' – проекцию на YZ – (0,m,n)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(l, m, n, 1)[R_x] = (l, 0, d, 1)$$



$$\cos\psi = \frac{n}{d}, \quad \sin\psi = \frac{m}{d},$$

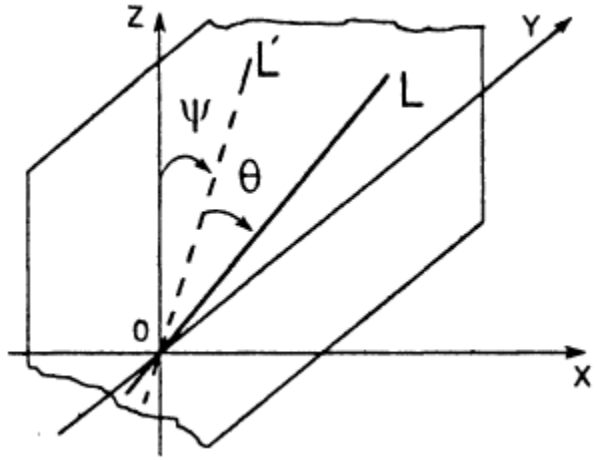
$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот прямой L вокруг Oy на угол θ

$$(l,\ m,\ n,\ 1)\left[R_x\right] = (l,\ 0,\ d,\ 1)$$

$$\cos\theta = l,\quad \sin\theta = -d.$$

$$\left[R_y\right] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\cos\psi = \frac{n}{d},\quad \sin\psi = \frac{m}{d},$$

$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот объекта вокруг прямой L на угол ф

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратные преобразования

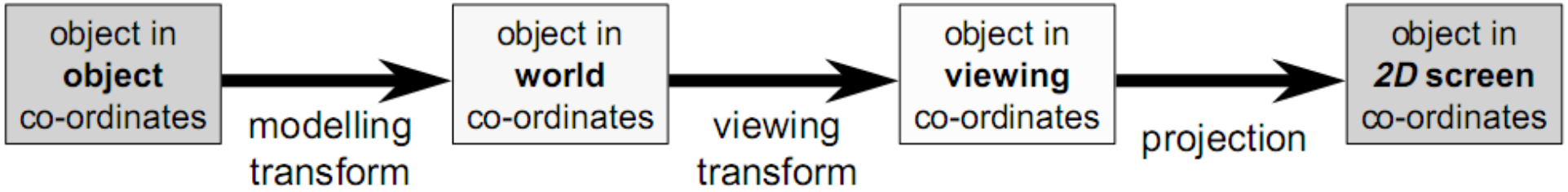
- Поворот прямой L вокруг Ox на угол -θ
- Поворот прямой L вокруг Oy на угол –ψ
- Перенос на A (a, b, c)

$$[T][R_x][R_y][R_z][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}$$

Результирующая матрица

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos\varphi(1 - l^2) & l(1 - \cos\varphi)m + n\sin\varphi & l(1 - \cos\varphi)n - m\sin\varphi & 0 \\ l(1 - \cos\varphi)m - n\sin\varphi & m^2 + \cos\varphi(1 - m^2) & m(1 - \cos\varphi)n + l\sin\varphi & 0 \\ l(1 - \cos\varphi)n + m\sin\varphi & m(1 - \cos\varphi)n - l\sin\varphi & n^2 + \cos\varphi(1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Разнообразие преобразований – мировая, видовая и проекционная матрицы



- **модельно-видовая как одна матрица (мировая х видовая)**
- **как мировая, так и видовая могут быть единичными**