

Алгоритмы на графах

Лекция 1.

Основные понятия теории графов. Представления графов.

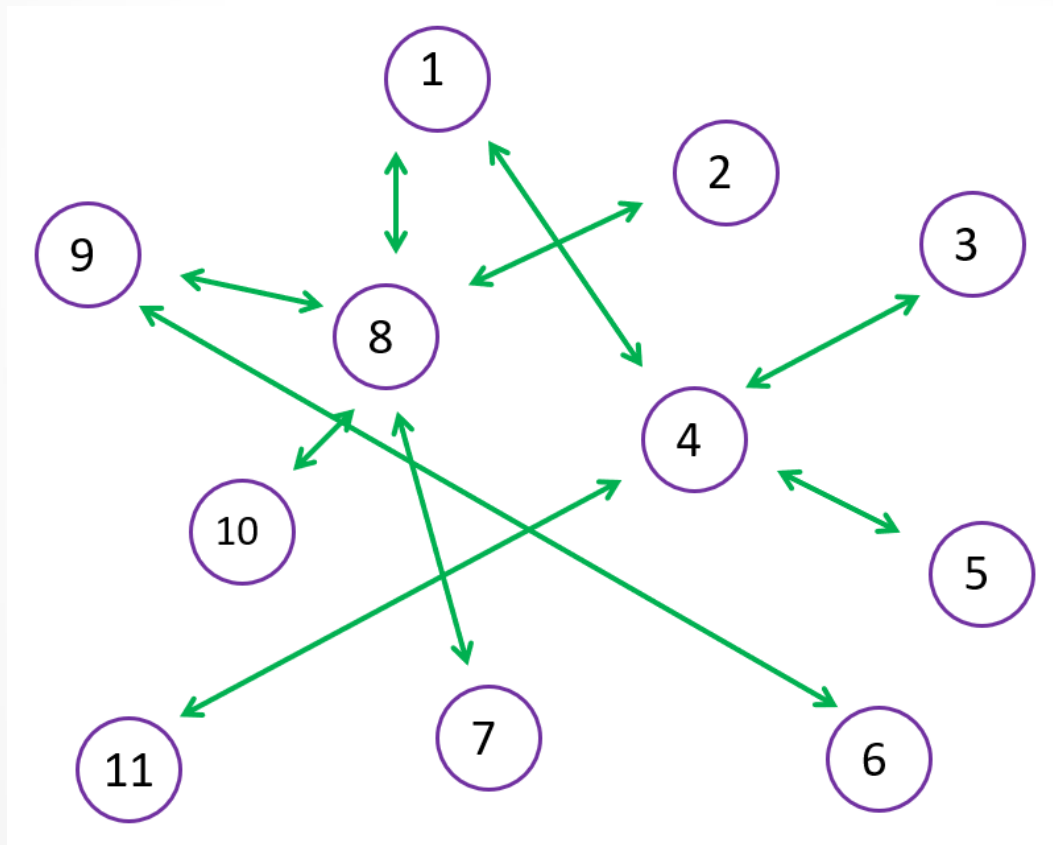
Адигеев Михаил Георгиевич

2025

Основные понятия

Графы

Граф – это абстрактная структура, представляющая *объекты* и *отношения* между ними.



Графы

Граф $G=(V,E)$

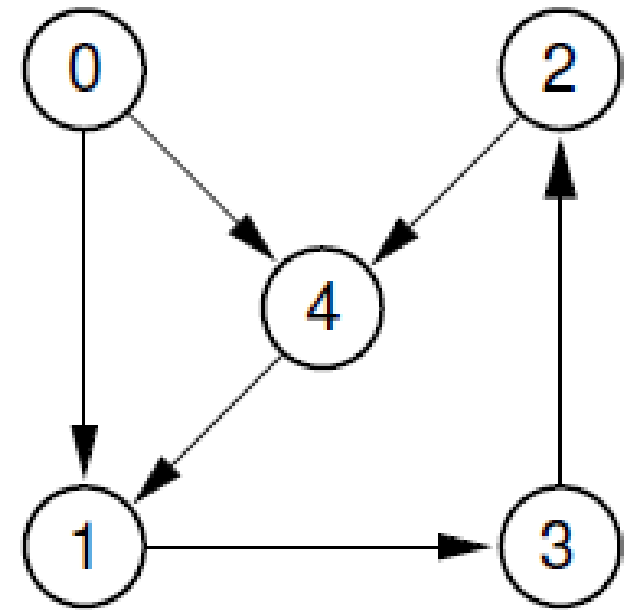
V – множество **вершин** (узлов). $|V|=n$.

E – множество **рёбер** (дуг). $|E|=m$

Графы бывают *ориентированные* или *неориентированные*.

Графы

Ориентированный граф:

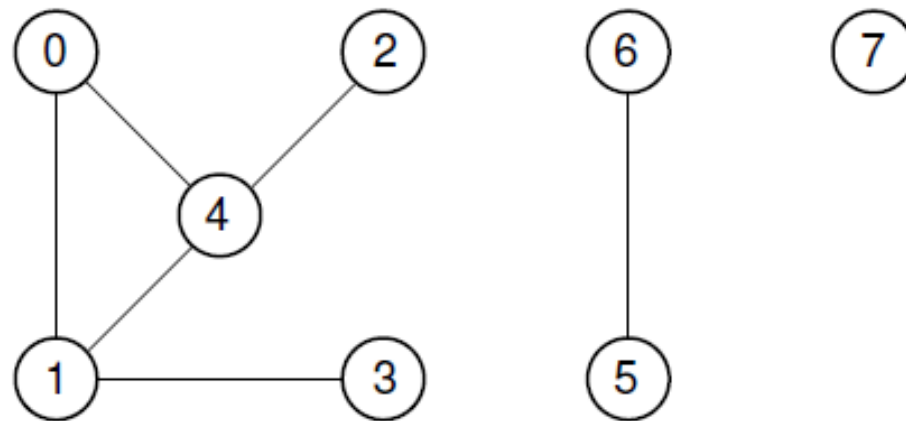


Ориентированные рёбра будем также называть *дугами*.

Дуга(ориентированное ребро) – это *упорядоченная* пара вершин: $e'=(u,v)$ и $e''=(v,u)$ – разные дуги.

Графы

Неориентированный граф:



(Неориентированное) ребро – это *неупорядоченная* пара вершин: $e'=(u,v)$ и $e''=(v,u)$ – одно и то же ребро.

Или два разных ребра...

Графы

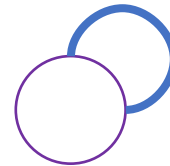
На графах могут быть *кратные* рёбра/дуги (граф тогда называется *мультиграфом*).



Для мультиграфов нужно изменить определение графа $G=(V,E)$. Теперь E – мультимножество, т.е. может содержать некоторые элементы более одного раза.

Графы

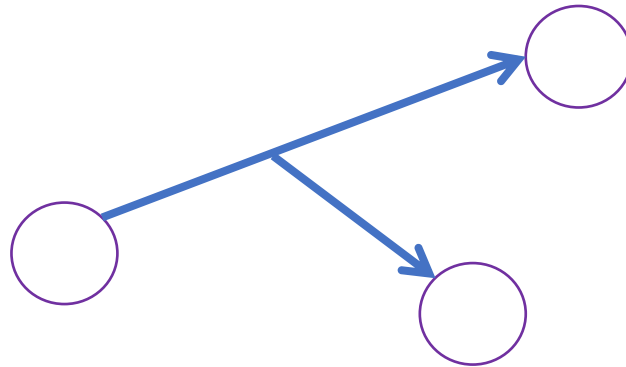
Также для некоторых задач на графах допускается наличие *петель*.



Для неориентированных петель также необходимо модифицировать определение: ребро - это неупорядоченная пара вершин, причём вершины могут совпадать.

Графы

Для очень специфических задач могут быть и более необычные ситуации (квазиграфы), но мы их не рассматриваем.



Локальные характеристики

Рассмотрим дугу (ориентированное ребро) $e=(u,v)$.



Вершина u – **начало** дуги e .

Вершина v – **конец** дуги e .

Вершины u и v **инцидентны** дуге e .

Дуга e также инцидентна каждой из вершин u и v .

Вершины u и v **смежны**. Это соседние вершины.

Также вершину u называют **родителем** v , а v – **дочерней** вершиной для u .

Локальные характеристики

В неориентированном случае всё очень похоже.
Для ребра $e=(u,v)$.



Вершины u и v – **концы** ребра e .

Вершины u и v **инцидентны** дуге e .

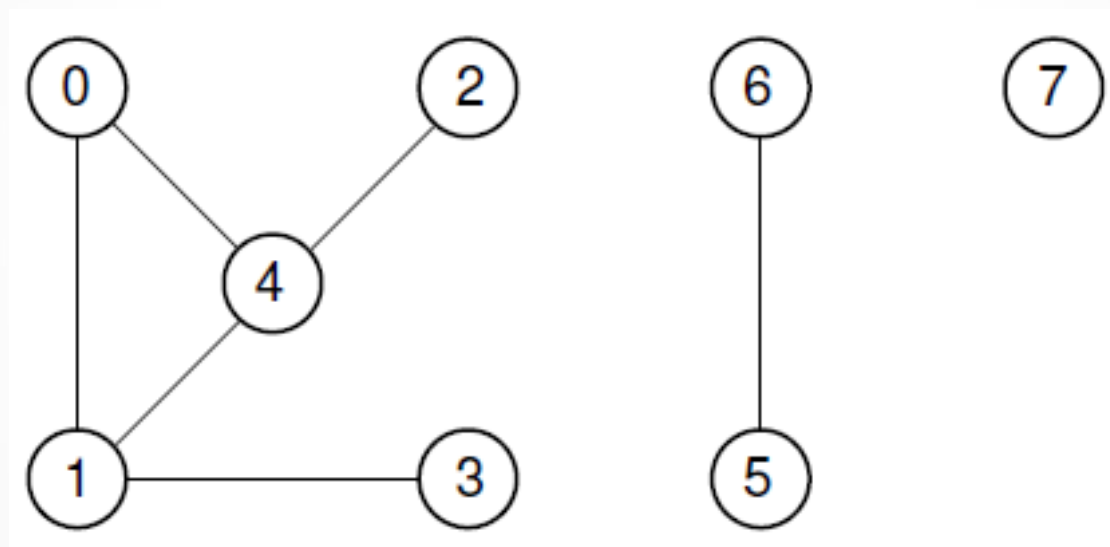
Дуга e также инцидентна каждой из вершин u и v .

Вершины u и v **смежны**. Это соседние вершины.

Степени вершин

Для неориентированного графа $G(V, E)$ и вершины $v \in V$.

Степень вершины v : $\deg(v)$ – это количество рёбер графа, инцидентных данной вершине.



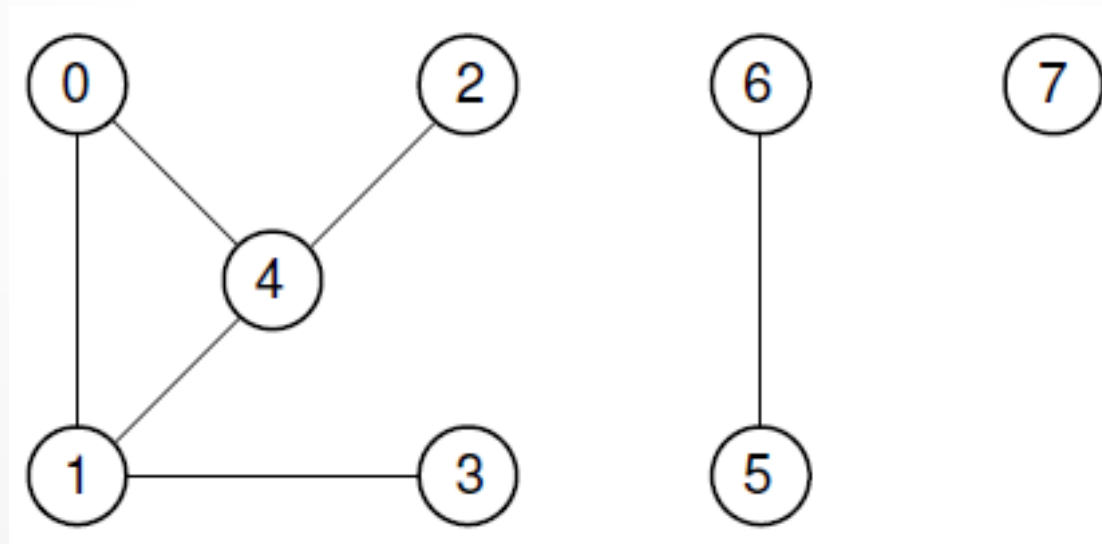
Вершина $v \in V$ называется **узловой**, если $\deg(v) = 0$, и она называется **висячей**, если $\deg(v) = 1$.

Степени вершин

Теорема (о рукопожатиях).

В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$



Степени вершин

Для ориентированного графа $G(V, E)$ и вершины $v \in V$.

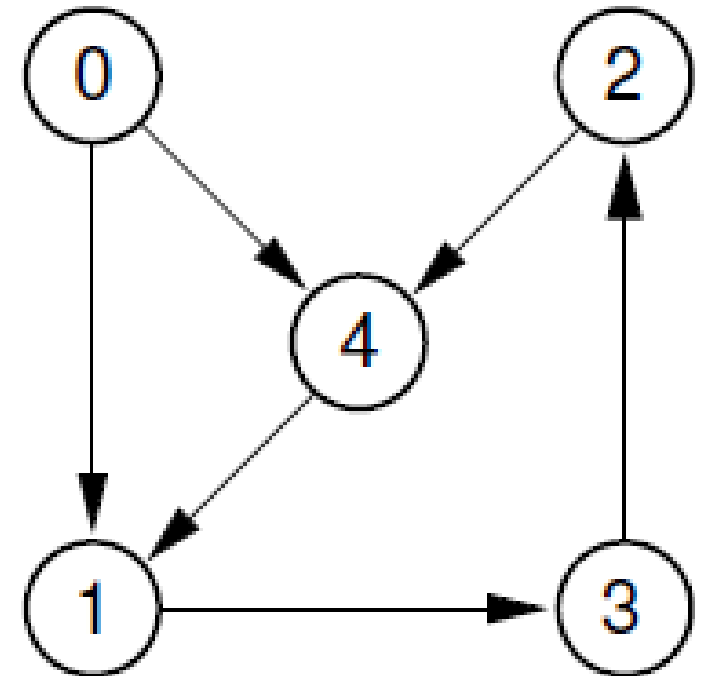
Степень вершины v : $\deg(v)$ – это количество рёбер/дуг графа, инцидентных данной вершине.

Полустепень захода вершины v : $\text{indeg}(v)$ – это количество дуг графа, заходящих в данную вершину.

Полустепень исхода вершины v : $\text{outdeg}(v)$ – это количество дуг графа, исходящих из данной вершины.

Очевидно:

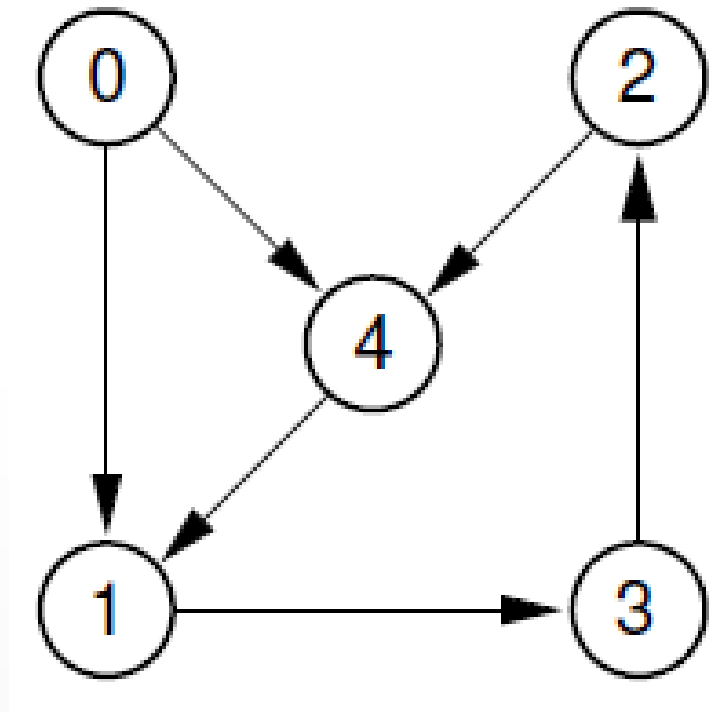
$$\deg(v) = \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v)$$



Степени вершин

Источником называется вершина v : $\text{indeg}(v) = 0$.

Сток – вершина, для которой $\text{outdeg}(v) = 0$



Представления графов

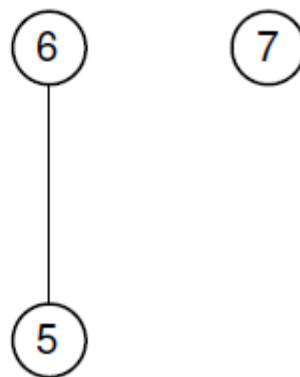
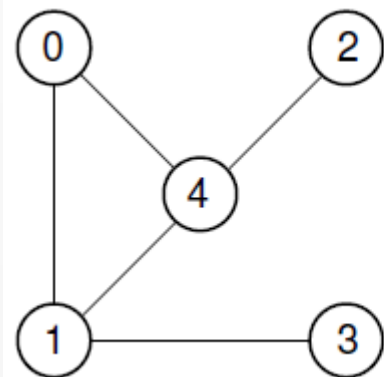
Список дуг

Граф $G(V, E)$ можно представить в виде двух списков:

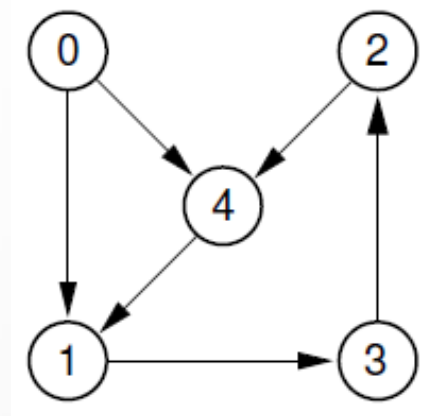
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1 = (u_1, v_1), \dots, e_m = (u_m, v_m)\}$$

0	1
0	4
1	3
1	4
2	4
5	6



0	1
0	4
1	3
4	1
2	4
3	2

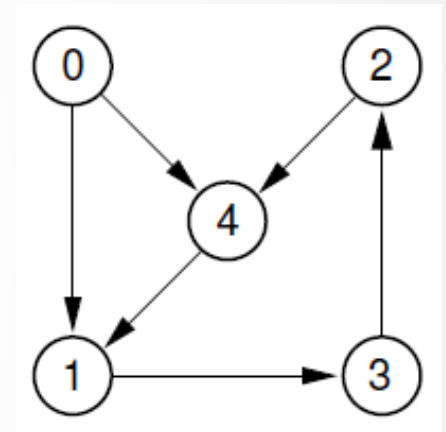


Список дуг

$$E = \{e_1 = (u_1, v_1), \dots, e_m = (u_m, v_m)\}$$

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(m)$
in-deg(v)	$O(m)$
deg(v)	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(m)$
is_source(v)	$O(m)$
is_sink(v)	$O(m)$

0	1
0	4
1	3
4	1
2	4
3	1

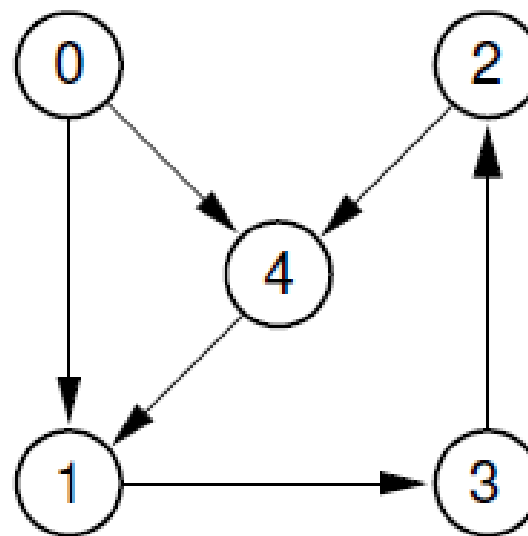


Матрица смежности

Ориентированный граф $G(V,E)$ можно представить в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n: a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

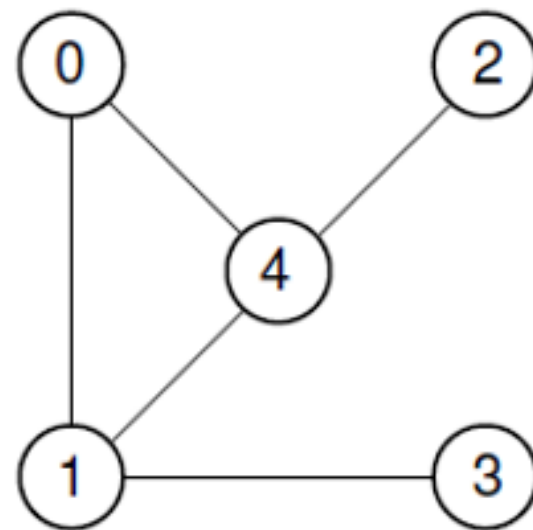


Матрица смежности

Неориентированный граф $G(V,E)$ также можно представить в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n: a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0



Матрица смежности

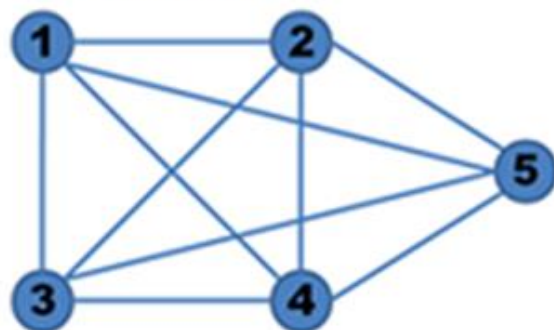
Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ содержит $O(n^2)$ элементов. Эффективно ли такое представление (по памяти)?

- Эффективно для плотных графов ($m \sim O(n^2)$).
- Неэффективно для разреженных графов ($m \sim O(n)$).

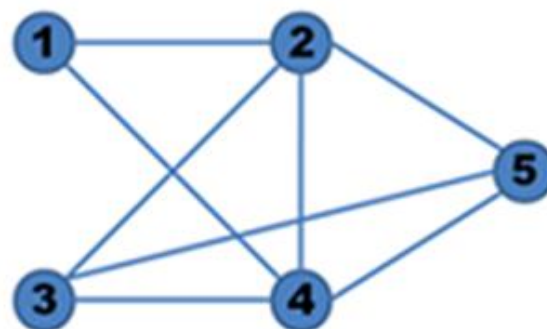
Матрица смежности

Полным графом называется граф, в котором все вершины попарно смежны.

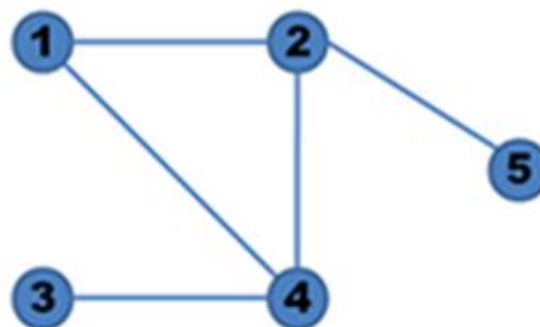
Полный граф



Плотный граф

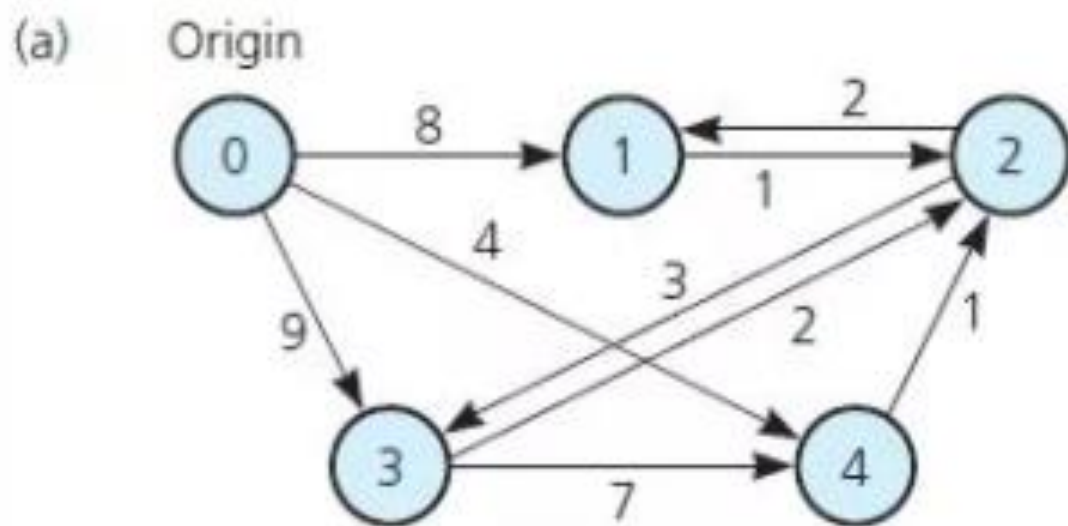


Разреженный граф



Матрица смежности

Матрица смежности может нести дополнительную информацию – например, представлять матрицу расстояний:



(b)

	0	1	2	3	4
0	∞	8	∞	9	4
1	∞	∞	1	∞	∞
2	∞	2	∞	3	∞
3	∞	∞	2	∞	7
4	∞	∞	1	∞	∞

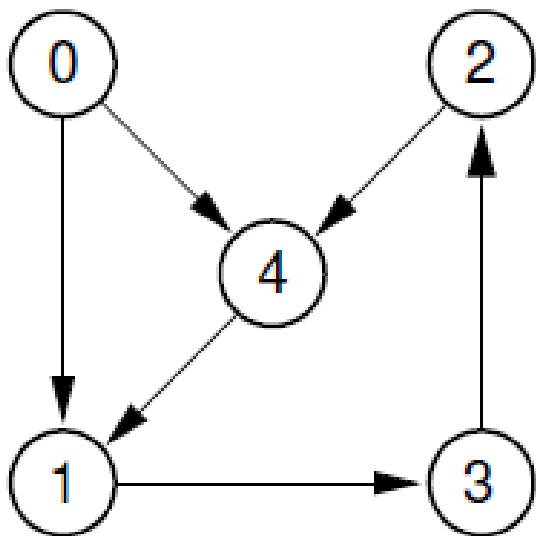
Матрица смежности

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(n)$
in-deg(v)	$O(n)$
deg(v)	$O(n)$
has_edge(v,w)	$O(1)$
is_source(v)	$O(n)$
is_sink(v)	$O(n)$

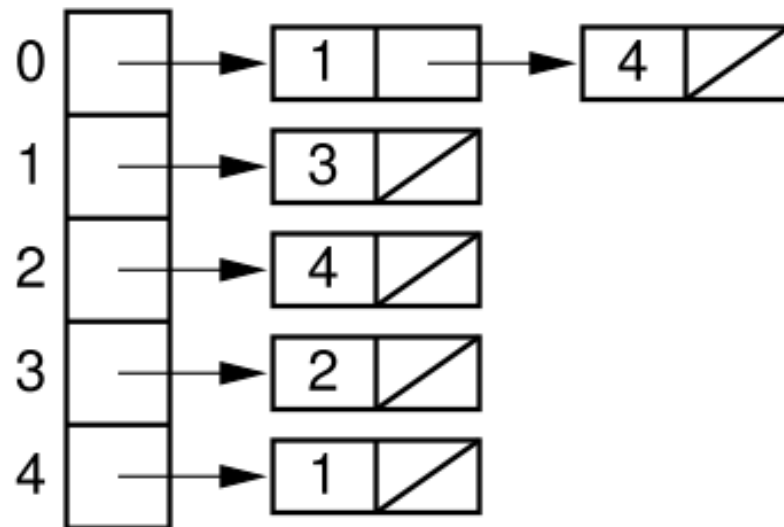
	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

Список смежности



	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

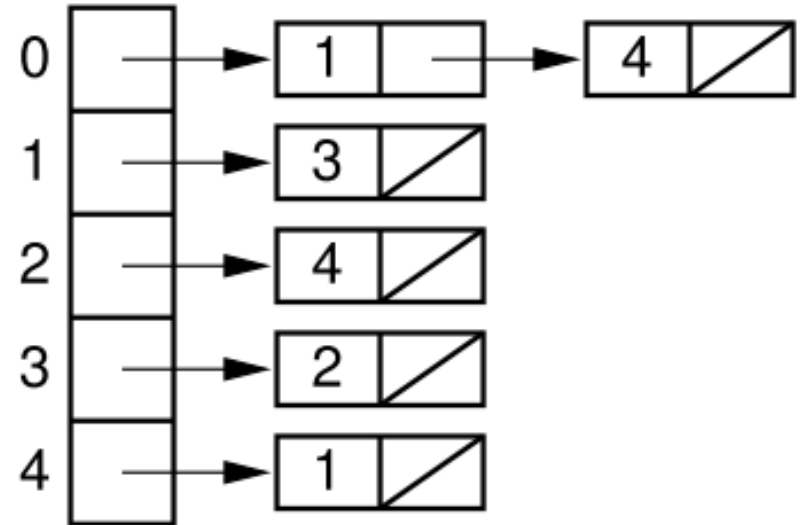
Ёмкостная сложность: $O(n + m)$



Список смежности

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(\max deg) = O(n)$
in-deg(v)	$O(n + m) = O(m)$
deg(v)	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(\max deg) = O(n)$
is_source(v)	$O(m)$
is_sink(v)	$O(1)$



Ёмкостная сложность: $O(n + m)$

Сравнение представлений

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Список дуг	Матрица смежности	Список смежности
out-deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(\max deg) = O(n)$
in-deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(n + m) = O(m)$
deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(m)$	$O(1)$	$O(\max deg) = O(n)$
is_source(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(m)$
is_sink(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(1)$
Память	$O(m)$	$O(n^2)$	$O(n + m)$