1 Лекция 1. Фазовая плоскость.

Механическая система с одной степенью свободы описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Состояние такой системы в текущий момент времени однозначно определяется значением обобщенной координаты x и скоростью изменения значения этой координаты y. Плоскость переменных x и y называется фазовой плоскостью системы. Данному состоянию системы, то есть, каждой паре значений x и y соответствует точка на фазовой плоскости. И наоборот, каждой точке фазовой плоскости соответствует одно и только одно состояние фазовой системы. Изменению состояния системы во времени можно сопоставить движение некоторой точки на фазовой плоскости. Такая точка получила название изображающей. Траектории движения изображающей точки по фазовой плоскости называются фазовыми траекториями. Скорость движения изображающей точки вдоль фазовой траектории называется фазовой скоростью. Вектор фазовой скорости имеет координат

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = P(x, y), \\ V_y = \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

В тех точках, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно не обращаются в ноль, фазовая скорость отлична от нуля.

Точки, в которых $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно равны нулю, назывются особыми точками. В особых точках фазовая скорость равна нулю, то есть изображающая точка не может выйти из особой точки без каких-либо внешних возмущений. Особые точки на фазовой плоскости соответствуют состояниям равновесия системы. Состояние равновесия и, соответственно, особые точки могут быть устойчивыми и неучтойчивыми. Если малое возмущение от состояния равновесия всегда остается малым, то такое состояние равновесия устойчиво. Наоборот, если малое возмущение с временем будет нарастать, то такое состояние неустойчиво.

Чтобы определить устойчивость особых состояний равновесия системы, достаточно рассмотреть поведение системы вблизи особых точек. В этой области уравнения (1) можно линеаризовать. Введём новые переменные ξ и η, представляющие собой отклонения переменных x и y от координат особой точки x_0, y_0.

$$\begin{aligned} \xi &= x - x_0, \\ \eta &= y - y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Линеаризованные уравнения в переменных ξ и η имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta. \end{cases} \tag{3}$$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}, \; a_{12} = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},$$
$$a_{21} = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}, \; a_{22} = \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},$$

Решение системы уравнений (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \eta &= C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda_{1,2}$ — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

и

$$K_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_{1,2} - a_{22}}. \tag{6}$$

Уравнение (5) называется характеристическим уравнением, а коэффициенты $K_{1,2}$ называются коэффициентами распределения.

В зависимости от характера корней уравнения (5) различают следующие четыре типа особых точек:

- Узел (λ_1 и λ_2 действительны и одного знака). Если λ_1 и λ_2 положительны, то узел является неустойчивым, если отрицательны — устойчивым.
- Седло (λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков). Седло всегда является неустойчивой особой точкой.
- Фокус (λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены). Если действительная часть $\lambda_{1,2}$ отрицательна, то фокус является неустойчивым, если положительна — устойчивым.
- Центр (λ_1 и λ_2 — мнимые). Для определения устойчивости особых точек типа центра требуется учёт членов более высокого порядка малости, чем в уравнениях (3). Если эти члены не влияют на характер особой точки, то особая точка типа центра считается устойчивой особой точкой.

Дифференциальное уравнение фазовой траектории можно получить из (1). Оно имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{7}$$

Решение уравнения (7) зависит от одной произвольной постоянной и описывает интегральные кривые. Через любую точку фазовой плоскости, кроме особых точек, проходит одна и только одна фазовая кривая. Через особую точку могут проходить либо две интегральные кривые, либо бесконечное число интегральных кривых. Кроме того, особая точка сама может представлять собой вырожденную интегральную кривую. Через особые точки типа узла и фокуса проходит бесконечное множество интегральных кривых, а через особую точку типа седла — две интегральные кривые. Особая точка типа центра представляет собой вырожденную интегральную кривую.

Движение системы вблизи состояния равновесия, соответствующую особой точке типа узла или седла, называют апериодическим движением, а типа фокуса или центра — колебательным движением. При этом, если состояние равновесия соответствует особой точке типа центра, то движение вблизи этого состояния будет чисто периодическим. Периодическим движениям системы соответствуют на фазовой плоскости замкнутые интегральные кривые. И наоборот, каждой замкнутой интегральной кривой на фазовой плоскости соответствует периодическое движение.

Интегральные кривые, проходящие через особые точки типа седла, называются сепаратрисами. Она разделяют фазовую плоскость на области с принципиально разным характером фазовых траекторий. Это хорошо видно на примере колебаний математического маятника, описываемых уравнением

$$\ddot{\varphi} + b \sin \varphi = 0.$$

Состояния равновесия такого маятника:

$$\varphi = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi, ...$$

Из них устойчивыми являются

$$\varphi = 0,\ \pm 2\pi, ...$$

Особые точки, соответствующие устойчивым состояниям равновесия, являются особые точки типа центра. Неустойчивым состояниям равновесия

$$\varphi = \pm\pi,\ \pm 3\pi, ...$$

соответствуют особые точки типа седла. Из выражений (4) и (5) видно, что в случае особой точки типа седла существуют интегральные кривые, имеющие вблизи особых точек вид прямых, проходящих через эту точку. Уравнения этих прямых в координатах (2) следующие:

$$\eta = K_1\xi,$$

$$\eta = K_2\xi,$$

где $K_{1,2}$ — определяются выражением (6). Таким образом, в случае математического маятника через особые точки

$$\varphi = \pm\pi,\ \pm3\pi, ...$$

под углами $\pm arctg\sqrt{b}$ проходят интегральные кривые — сепаратрисы, разделяющие фазовую плоскость на различные области.

Если запас энергии маятника не очень велик, то маятник совершает периодические колебания относительно устойчивого положения равновесия. Это соответствует движению изображающей точки по одной из замкнутых интегральных кривых, окружающих особую точку. Если предположить, что запас энергии маятника в точности таков, что маятник должен достигнуть верхнего положения с нулевой скоростью, то такое движение будет соответствовать на фазовой плоскости движению изображающей точки на сепаратрисе. Этот вид движения получил название лимитационного. Если энергия маятника ещё хотя бы чуть-чуть увеличится, то он достигнет верхнего положения равновесия и перейдёт через него. При этом характер его движения существенно изменится: вместо колебаний маятник теперь будет двигаться в одну сторону, совершая вращательные движения.

Кроме особых точек и сепаратрис очень важными на фазовой плоскости являются предельные циклы — изолированные замкнутые траектории (соответствующие периодическим движениям системы), к которым с внутренней и с внешней стороны приближаются соседние траектории по спиралям. Пример устойчивого предельного цикла приведён на рисунке 2, на котором изображён фазовый портрет системы, описываемой системой уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x\left(x^2 + y^2 - 1\right), \\ \dot{y} = -x - y\left(x^2 + y^2 - 1\right) \end{cases}$$

Поскольку основными характеристиками системы на фазовой плоскости являются особые точки, сепаратрисы и предельные циклы, то качественное изменение характера фазовых траекторий (а значит, и движений механической системы) может произойти только тогда, когда изменится число и характер либо особых точек, либо сепаратрис, либо предельных циклов значения параметров, при которых происходят такие изменения, называют бифуркационными.

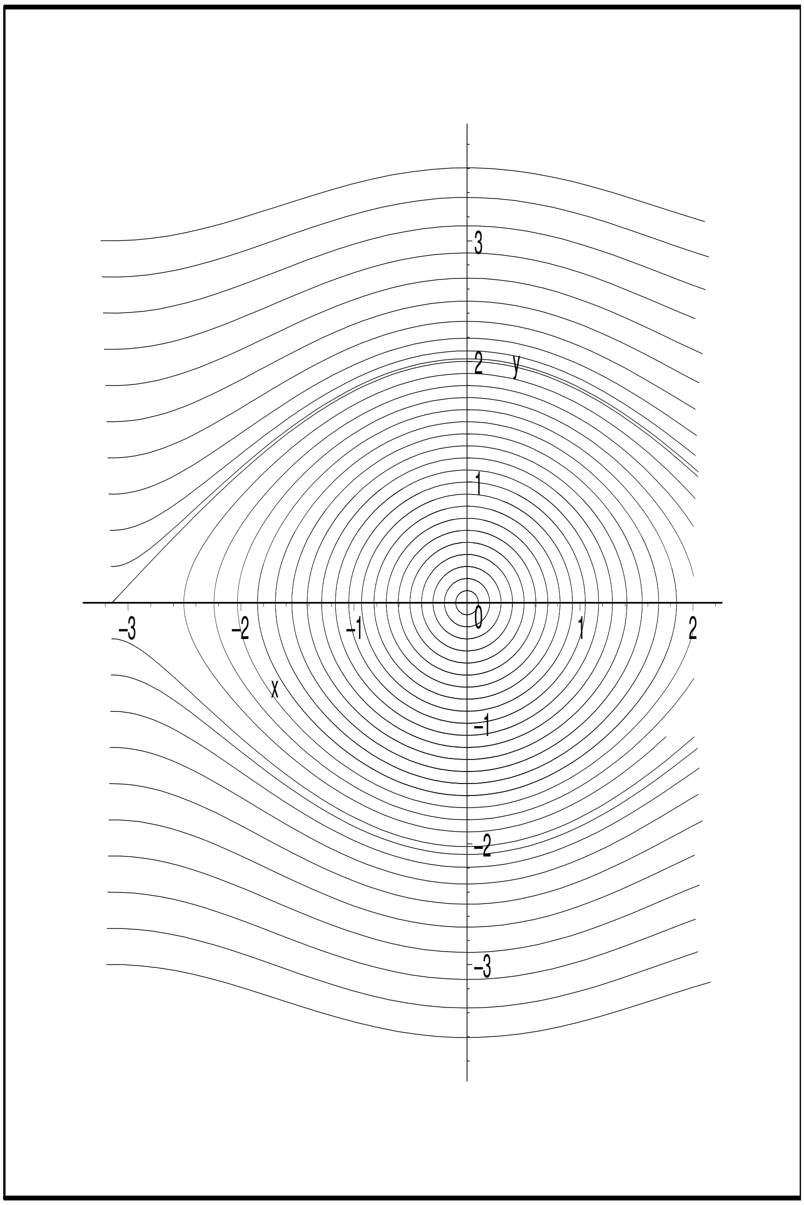

Рис. 1: Фазовый портрет математического маятника в случае $b = 1$. Горизонтальная ось соответствует параметру φ, вертикальная — $\dot{\varphi}$

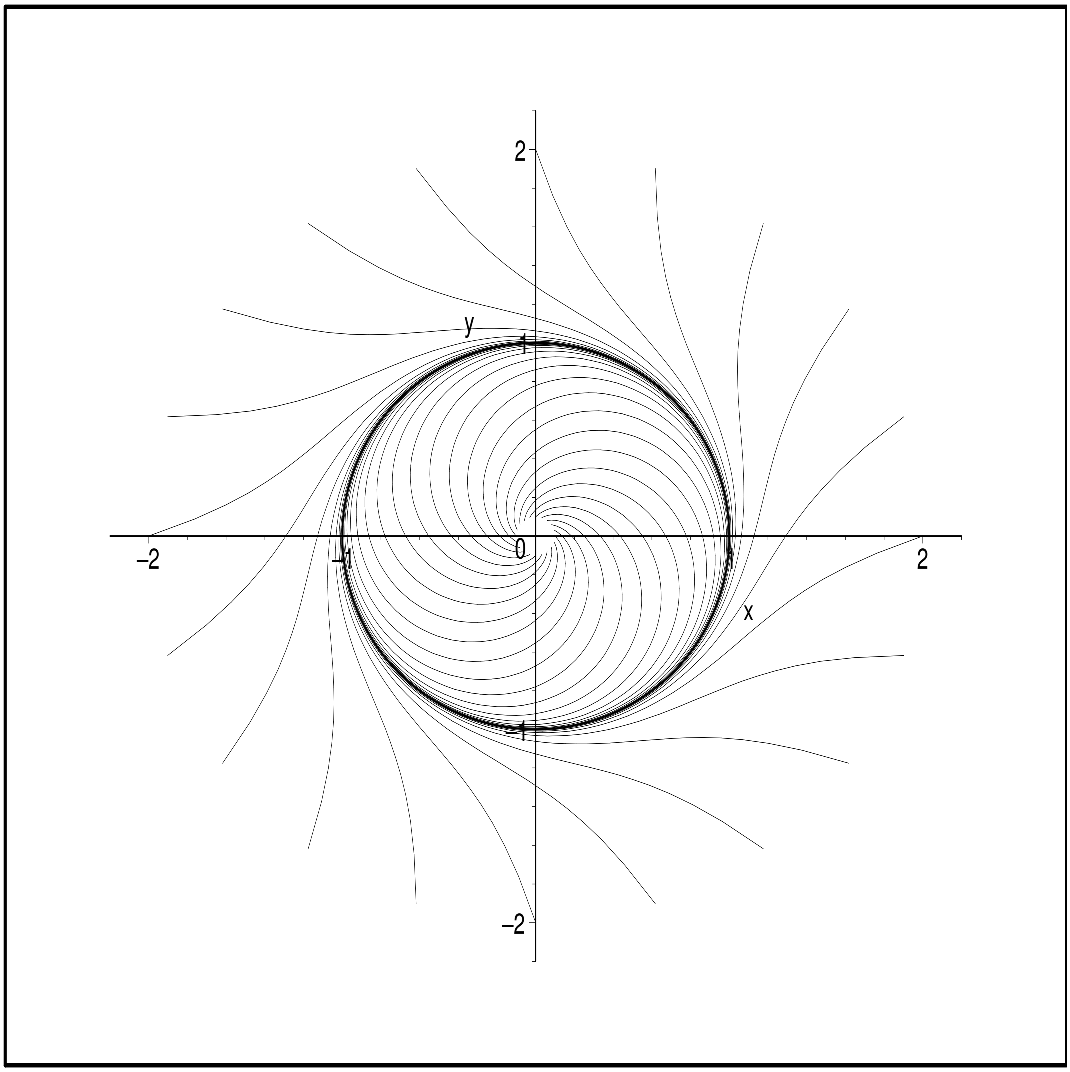

Рис. 2: Устойчивый предельный цикл. Горизонтальная ось соответствует параметру x, вертикальная — y