Алгоритмы на графах

Лекция 2.

Обходы графов. Поиск в ширину.

Адигеев Михаил Георгиевич

2023

План лекции

1. Пути и достижимость на графах.
2. Обходы графов.
   - ✓ Обход в ширину
   - ✓ (Обход в глубину)
3. Применение обхода в ширину для решения задач на графах.
   - ✓ Поиск компонент связности
   - ✓ Поиск кратчайших путей на невзвешенных графах
   - ✓ Обнаружение циклов

Пути и достижимость на графах

Пути и достижимость

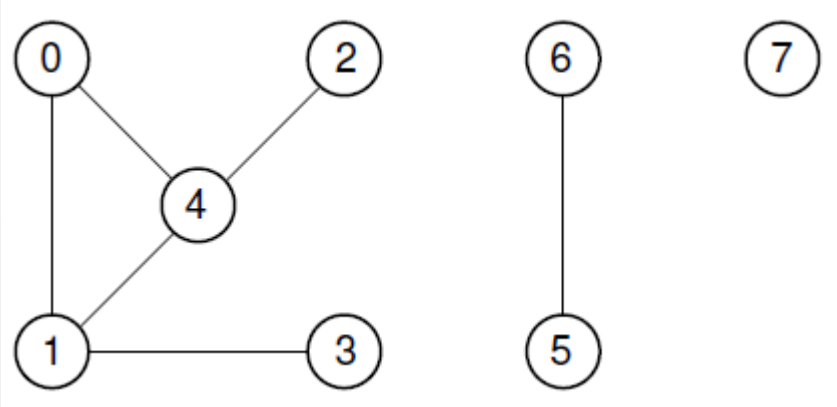
Граф $G=(V,E)$.

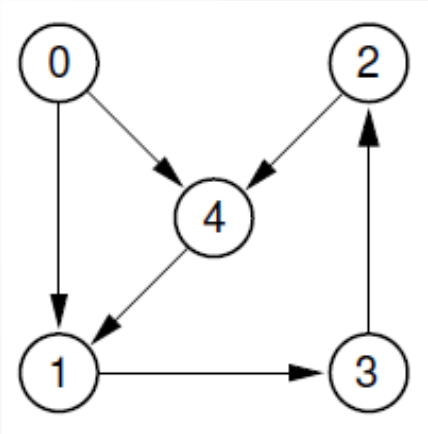
Путь на графе G – это последовательность дуг $\{e_1, e_2, \dots, e_l\}$, в которой для каждого i конец дуги e_i является началом дуги e_{i+1}.

Для неориентированных путей используется название «***цепь***».

Альтернативное представление – в виде последовательности вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_{l+1}\}$.

Длина пути/цепи = количество дуг/рёбер в пути.

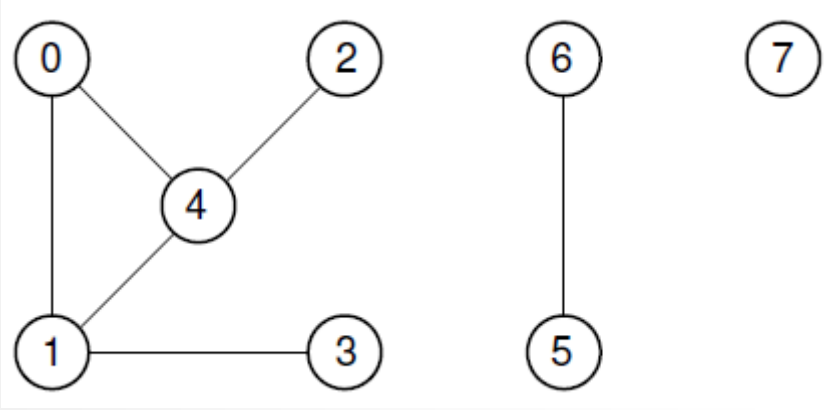


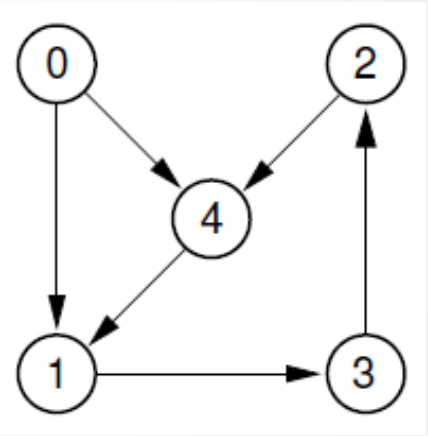


Пути и достижимость

Циклом называется замкнутая цепь, т.е. цепь, в которой конечная и начальная вершины совпадают.

Замкнутый ориентированный путь называется ***контуром***.

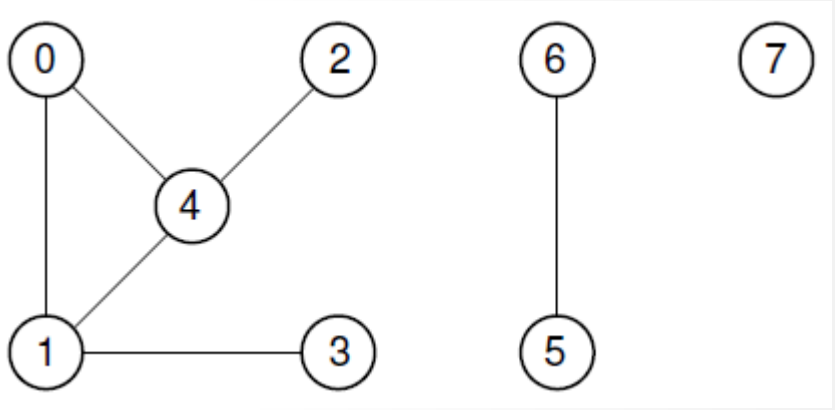




Пути и достижимость

Говорят, что вершина $v \in V$ ***достижима*** из вершины $u \in V$, если на графе существует путь/цепь из u в v.

Говорят, что вершина $v \in V$ ***достижима*** из вершины $u \in V$, если на графе существует путь/цепь из u в v.



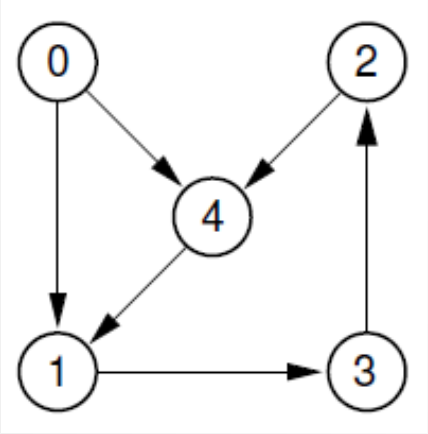
Граф называется ***связным***, если все пары вершин достижимы друг из друга.

Максимальный связный *подграф* на графе называется ***связной компонентой***.

Пути и достижимость

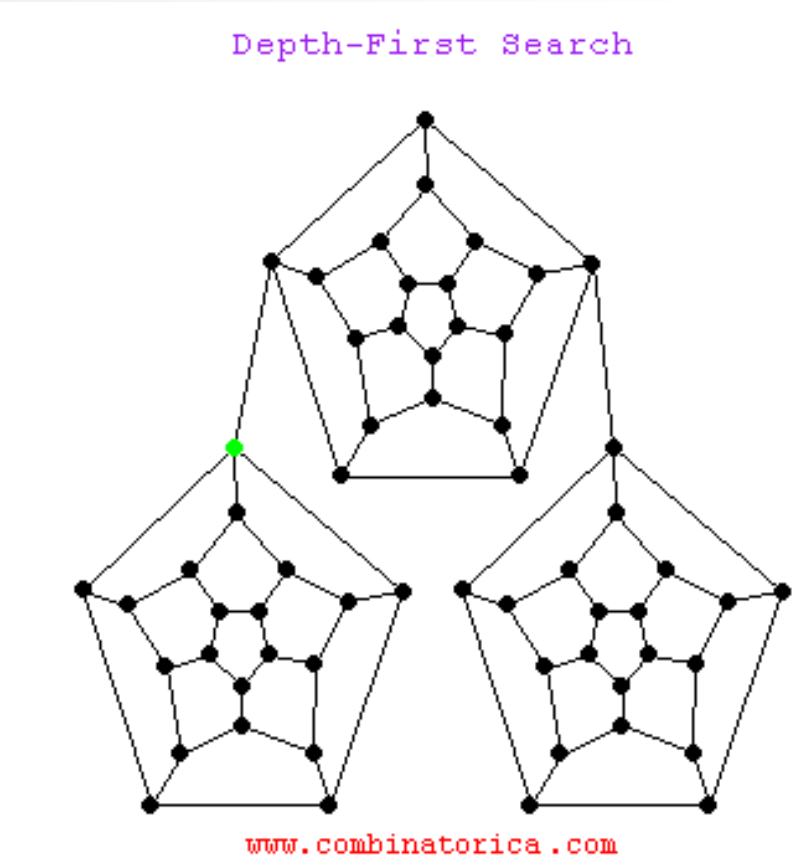
Для ориентированных графов также вводят понятие *сильной связности*: граф ***сильно связен***, если все пары вершин взаимно достижимы друг из друга.

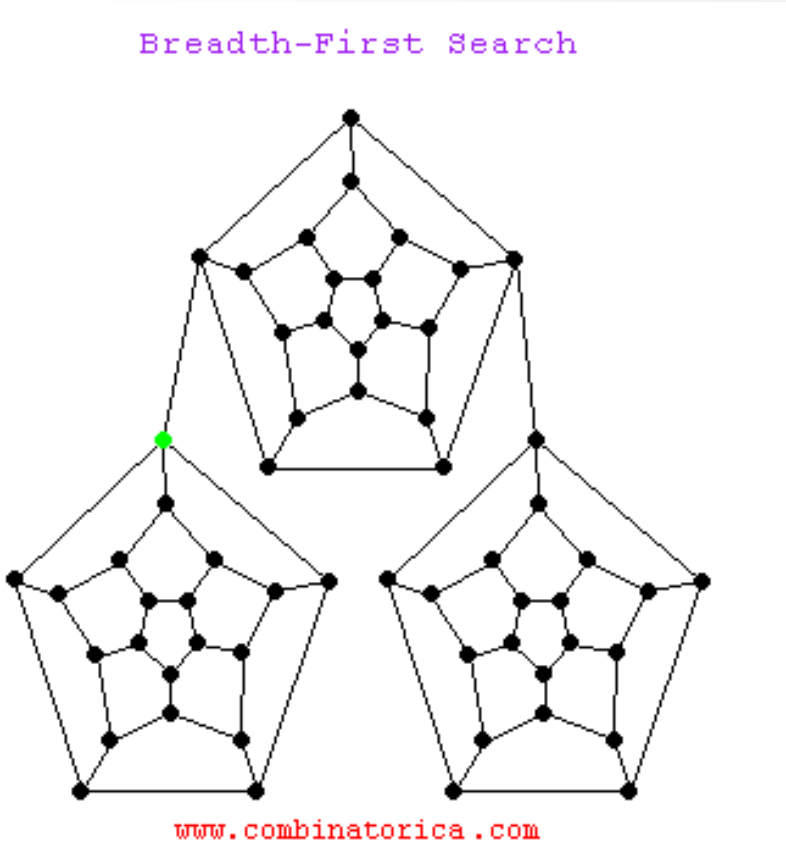
И аналогично: максимальный сильно связный *подграф* на графе называется ***сильной (сильно связной) компонентой***.



Обходы графов

Обходы графов





https://www3.cs.stonybrook.edu/~skiena/combinatorica/animations/search.html

Общие принципы обхода

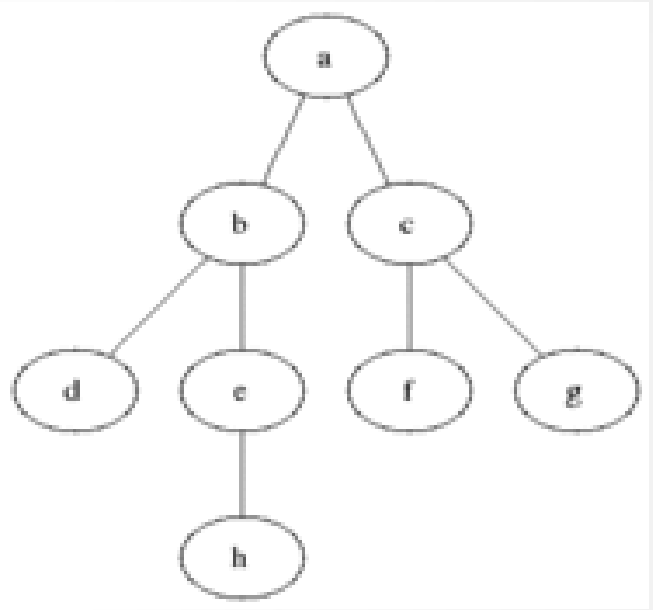
- Мы должны *обойти* все вершины графа в *определённом* порядке и *обработать* их.
- В процессе обхода для каждой вершины мы в какой-то момент посещаем её в первый раз, потом можем несколько раз возвращаться в неё, и в какой-то момент (обычно при первом или при последнем посещении) мы её обрабатываем.
- Для того чтобы корректно обработать вершину (а также инцидентные ей рёбра и смежные вершины), мы должны отслеживать *статус* вершины:
  1) Непосещённая
  2) Посещённая
  3) Обработанная.

Обход в ширину

Принцип обхода в ширину:

посетив вершину v, следует посетить каждую из ещё не посещённых соседних вершин.

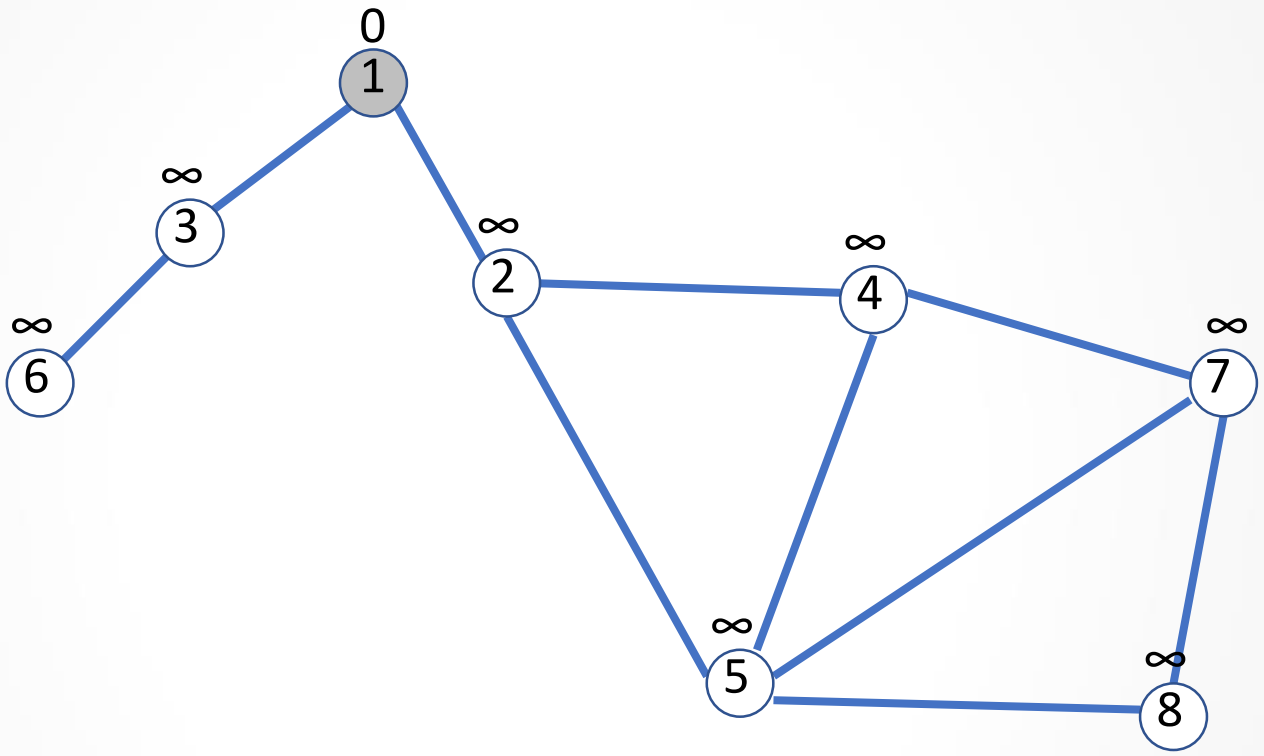
Потом соседей этих соседей, т.д.



https://en.wikipedia.org/wiki/Breadth-first_search

Для того чтобы запоминать вершины, которые надо посетить, и порядок посещения, нам понадобится структура данных «Очередь» (queue).

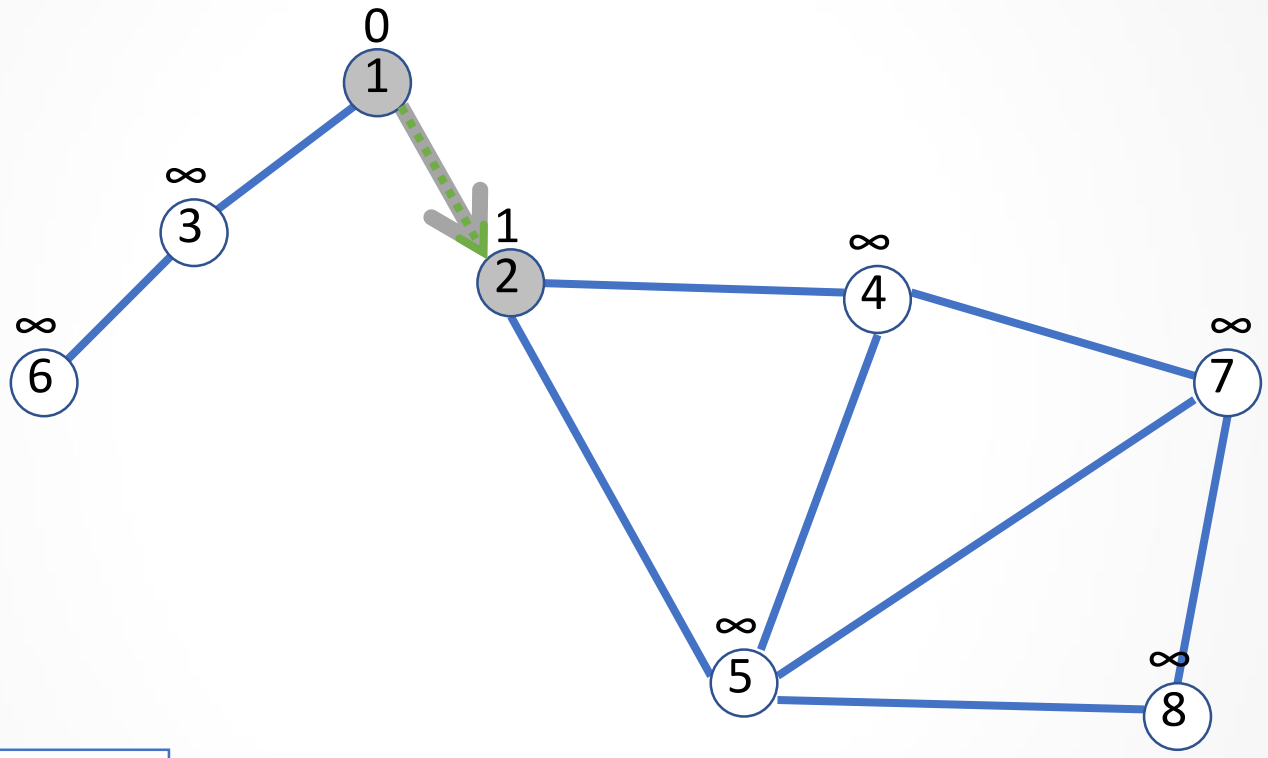
Обход в ширину: пример



Q: 1

Просматриваемая дуга: Ø

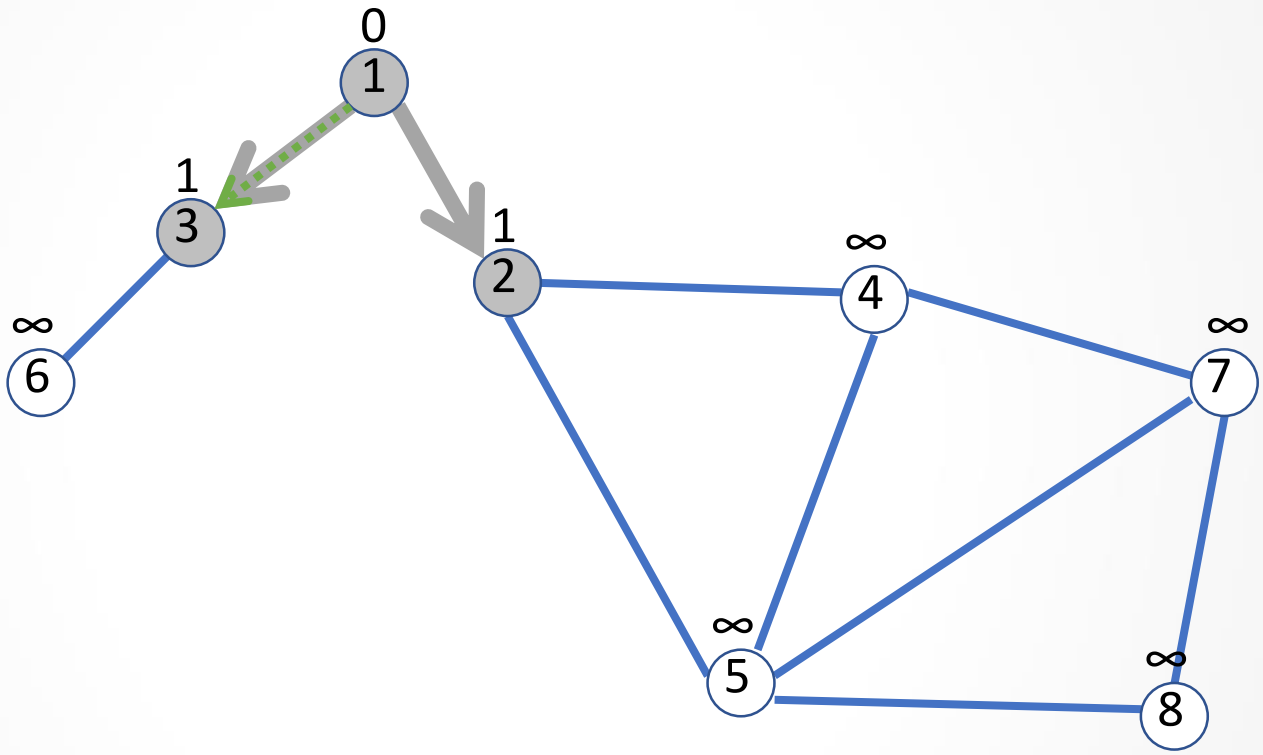
Обход в ширину: пример



Q: 2

Просматриваемая дуга: (1,2)

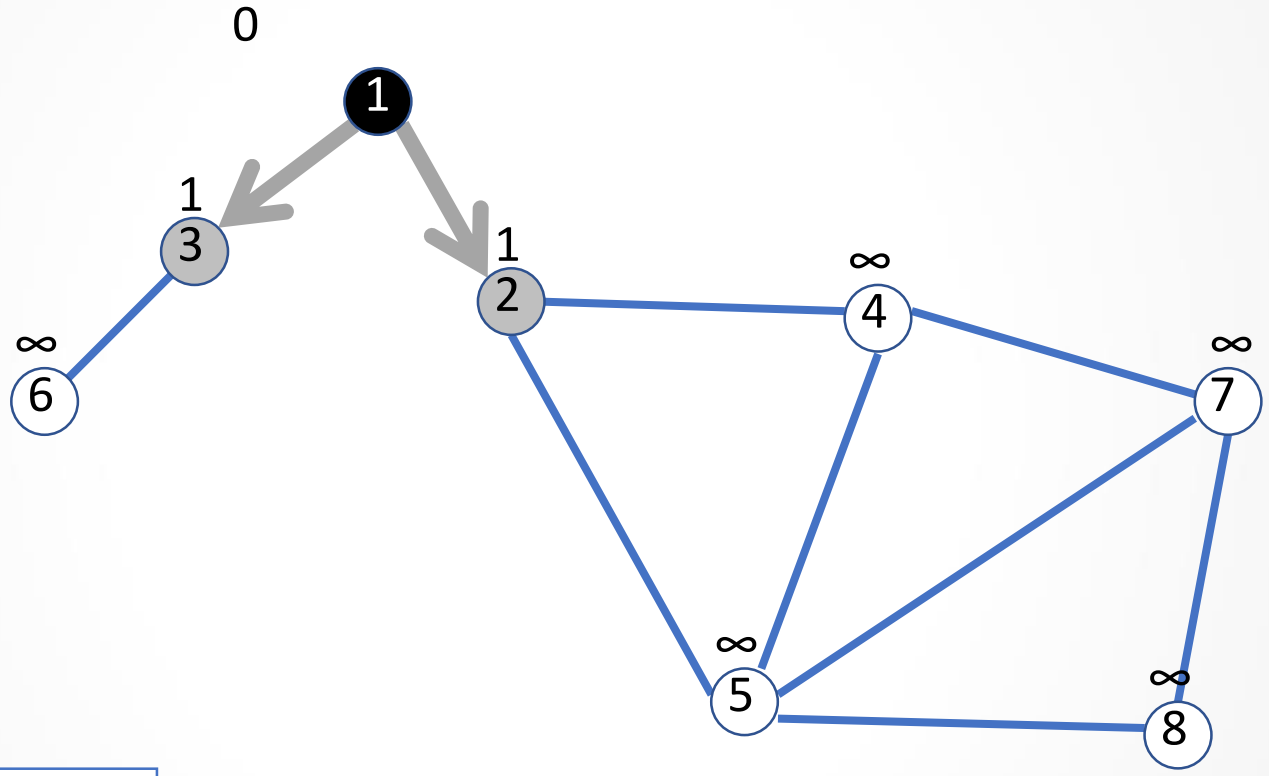
Обход в ширину: пример



Q: 2,3

Просматриваемая дуга: (1,3)

Обход в ширину: пример

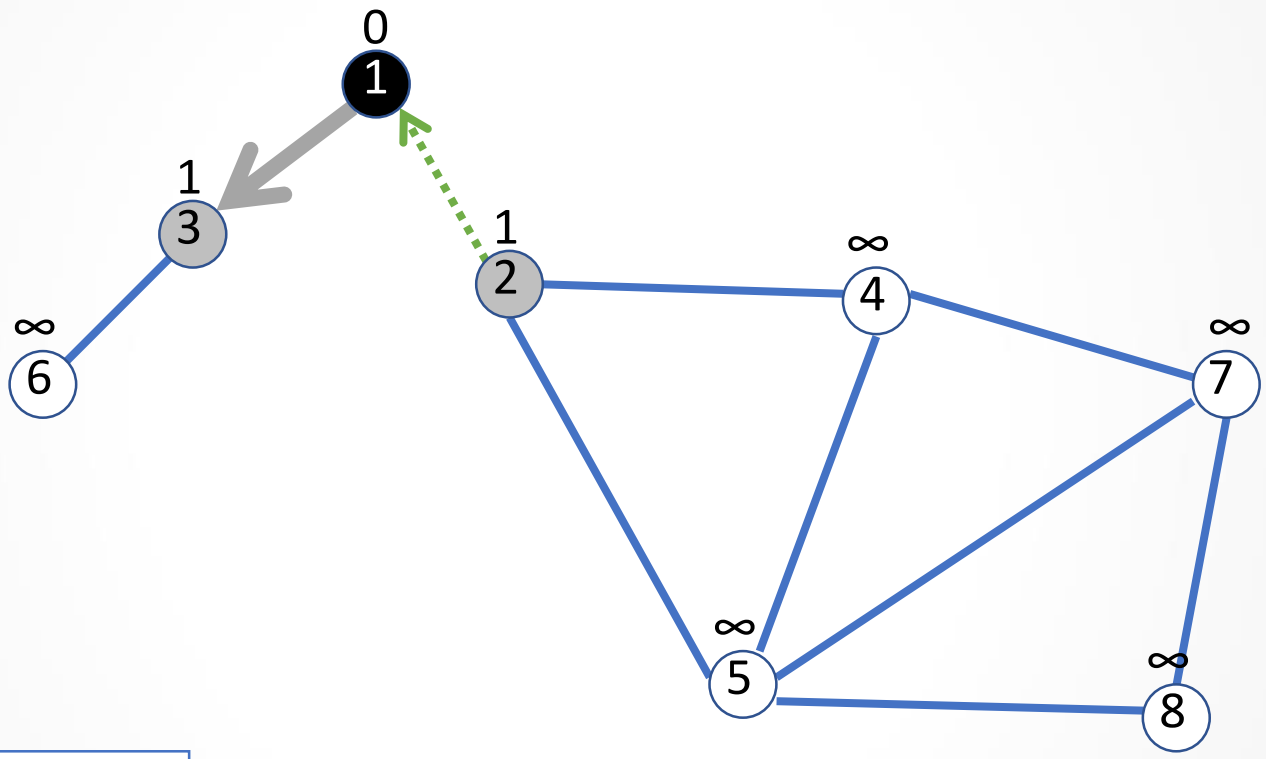


Q: 2,3

Просматриваемая дуга: ∅

Вершина 1 становится *обработанной*

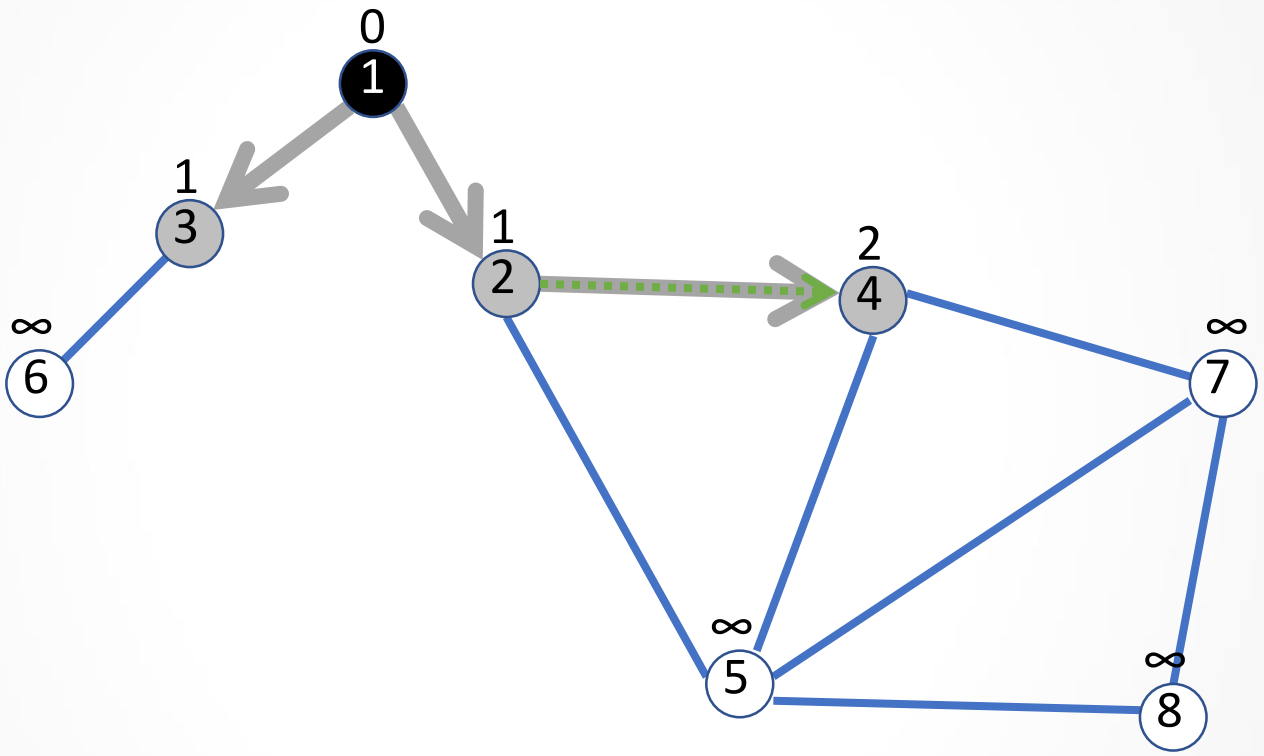
Обход в ширину: пример



Q: 3

Просматриваемая дуга: (2,1)

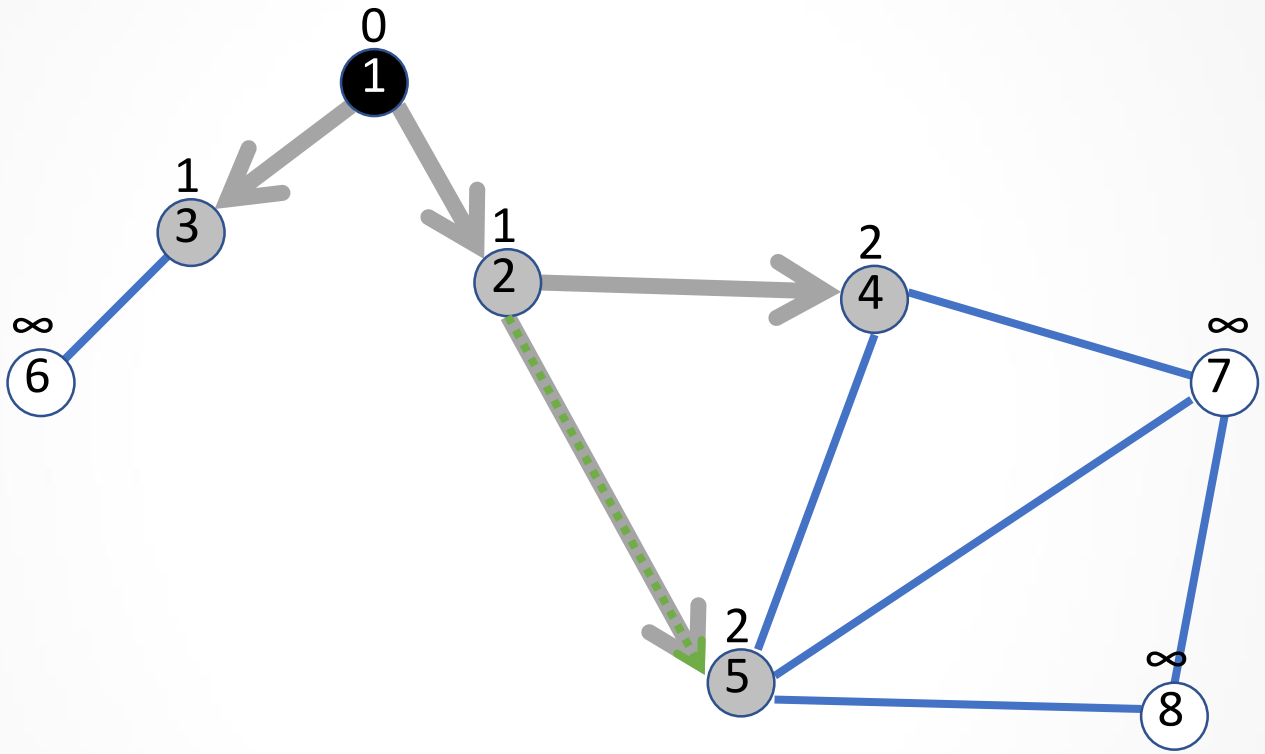
Обход в ширину: пример



Q: 3,4

Просматриваемая дуга: (2,4)

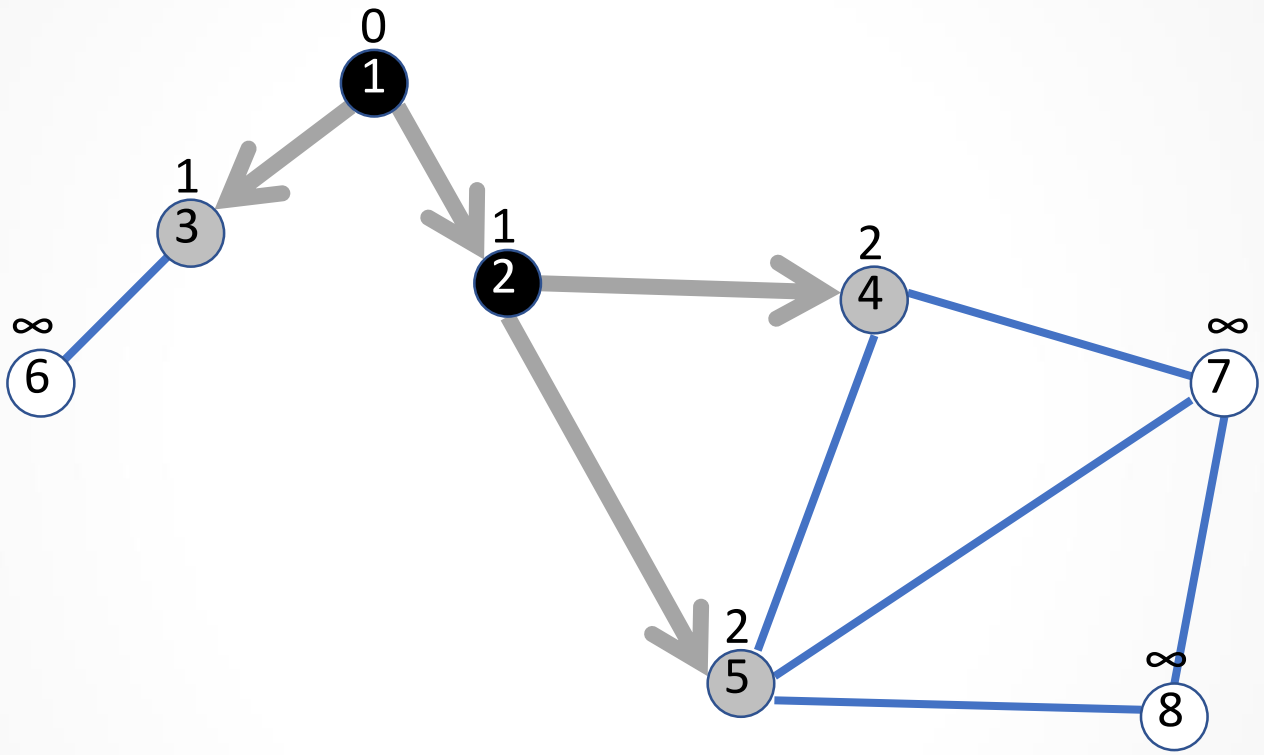
Обход в ширину: пример



Q: 3,4,5

Просматриваемая дуга: (2,5)

Обход в ширину: пример

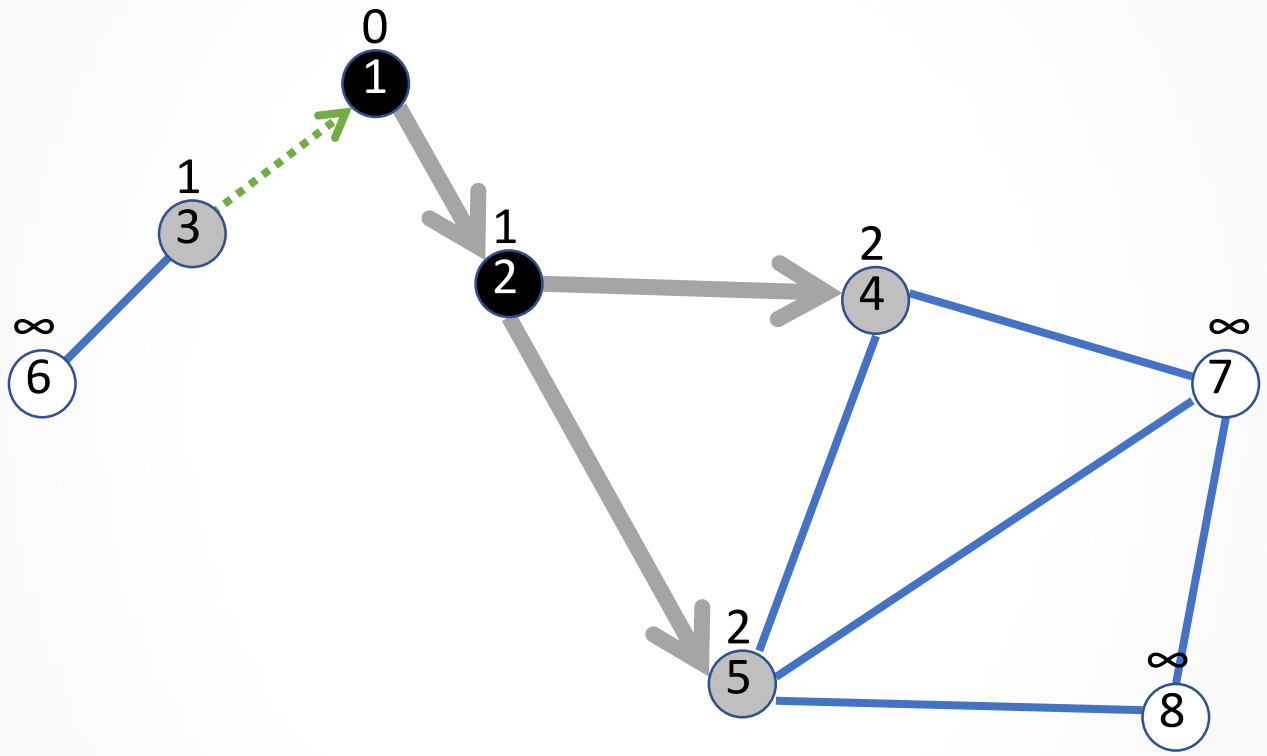


Q: 3,4,5

Просматриваемая дуга: Ø

Вершина 2 становится *обработанной*

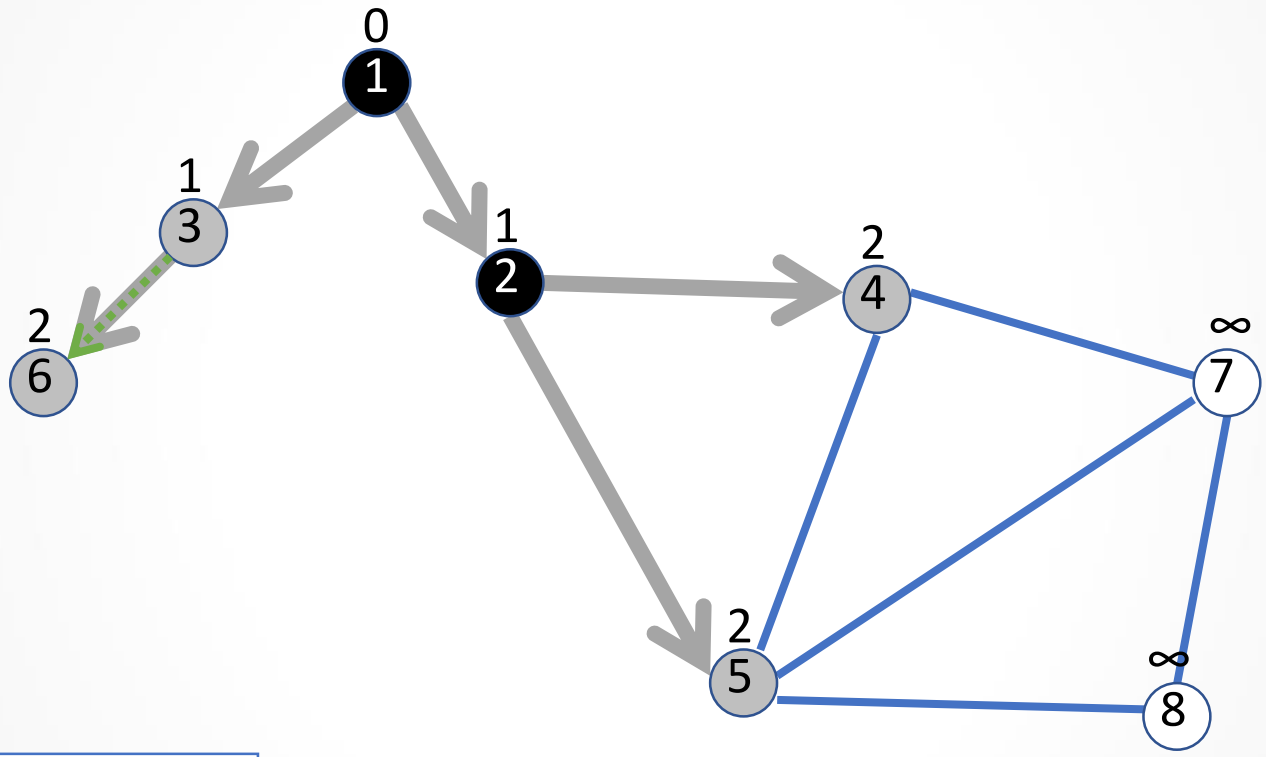
Обход в ширину: пример



Q: 4,5

Просматриваемая дуга: (3,1)

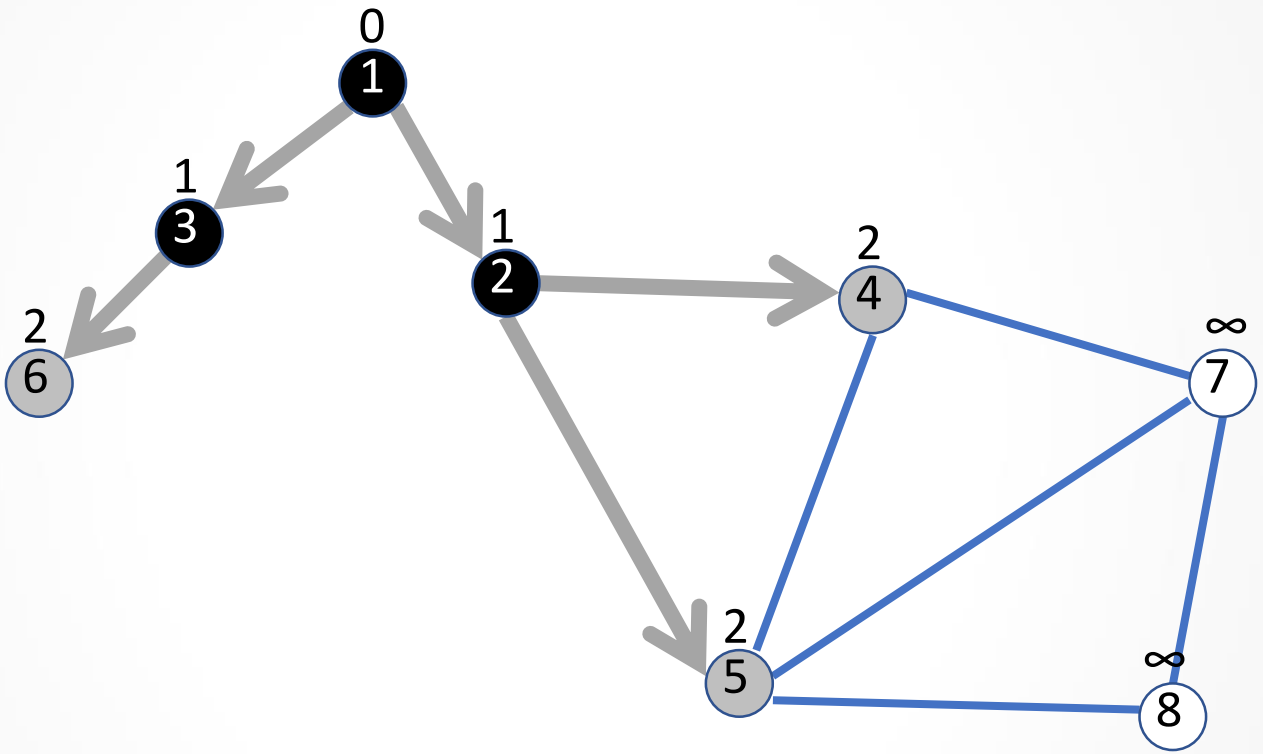
Обход в ширину: пример



Q: 4,5,6

Просматриваемая дуга: (3,6)

Обход в ширину: пример

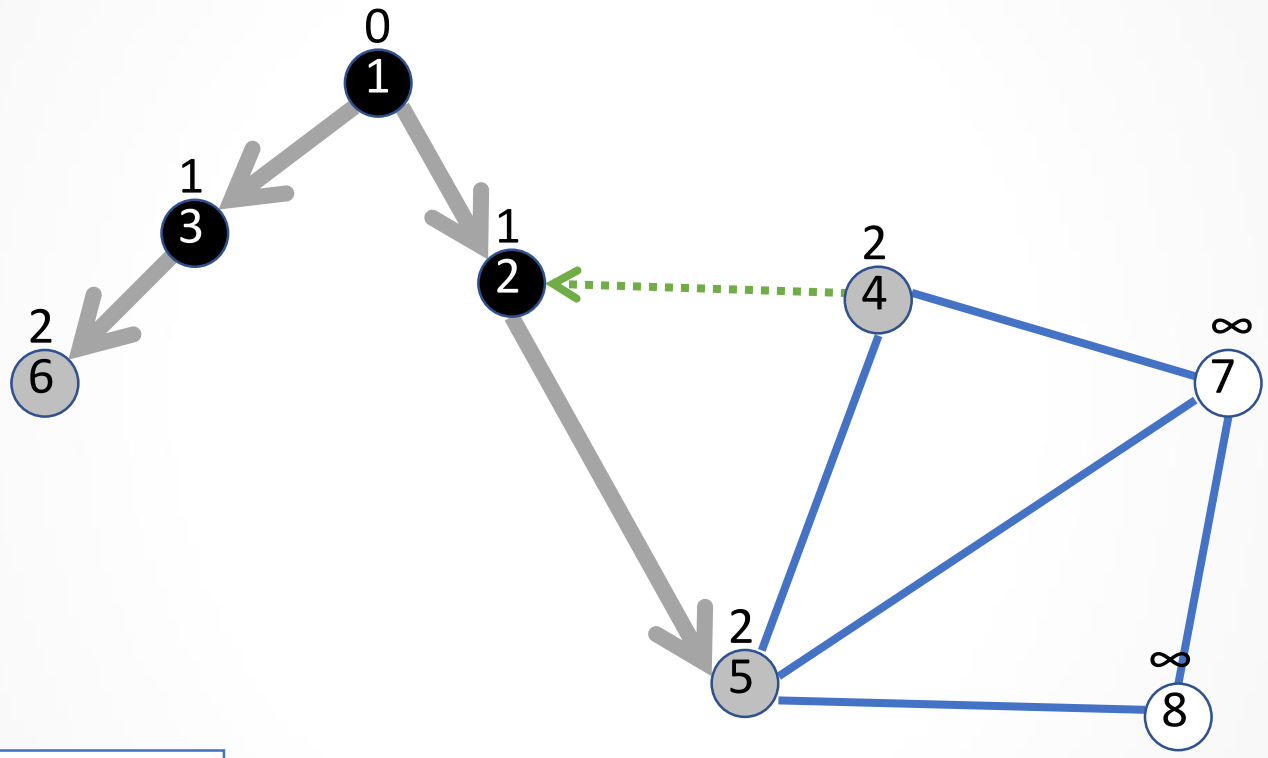


Q: 4,5,6

Просматриваемая дуга: ∅

Вершина 3 становится *обработанной*

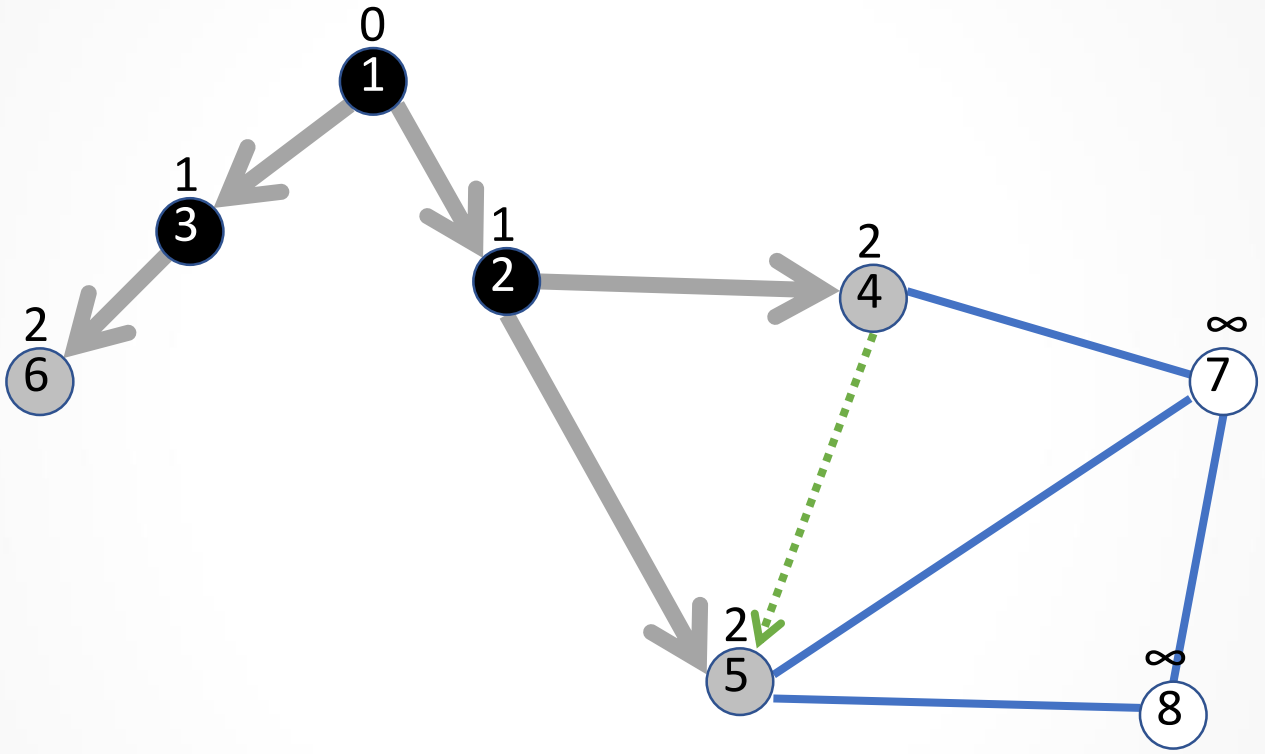
Обход в ширину: пример



Q: 5,6

Просматриваемая дуга: (4,2)

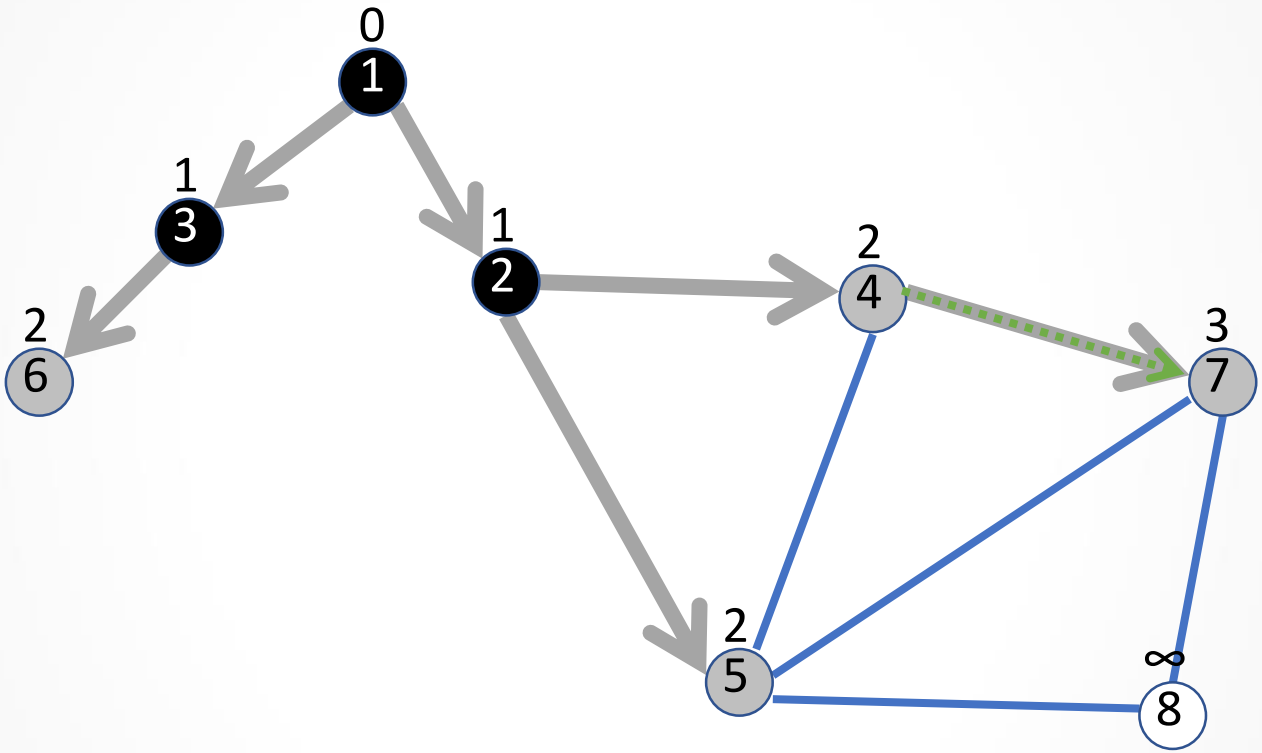
Обход в ширину: пример



Q: 5,6

Просматриваемая дуга: (4,5)

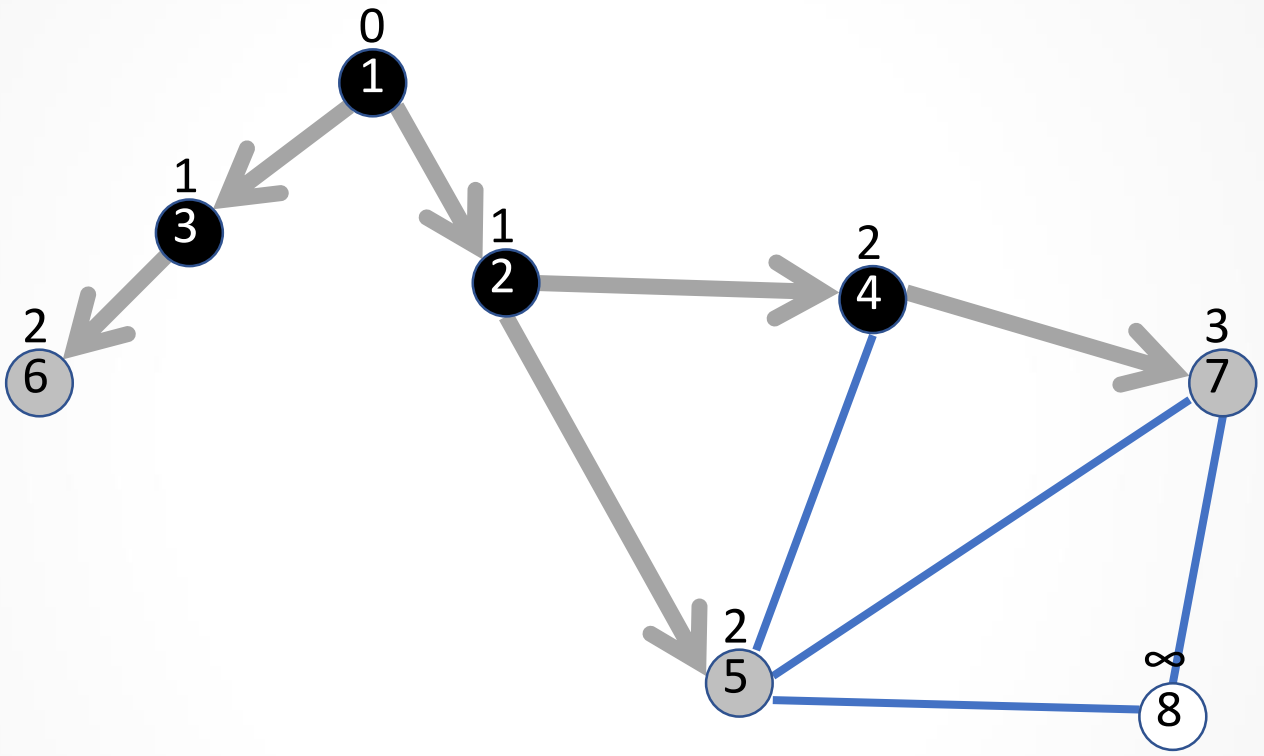
Обход в ширину: пример



Q: 5,6,7

Просматриваемая дуга: (4,7)

Обход в ширину: пример

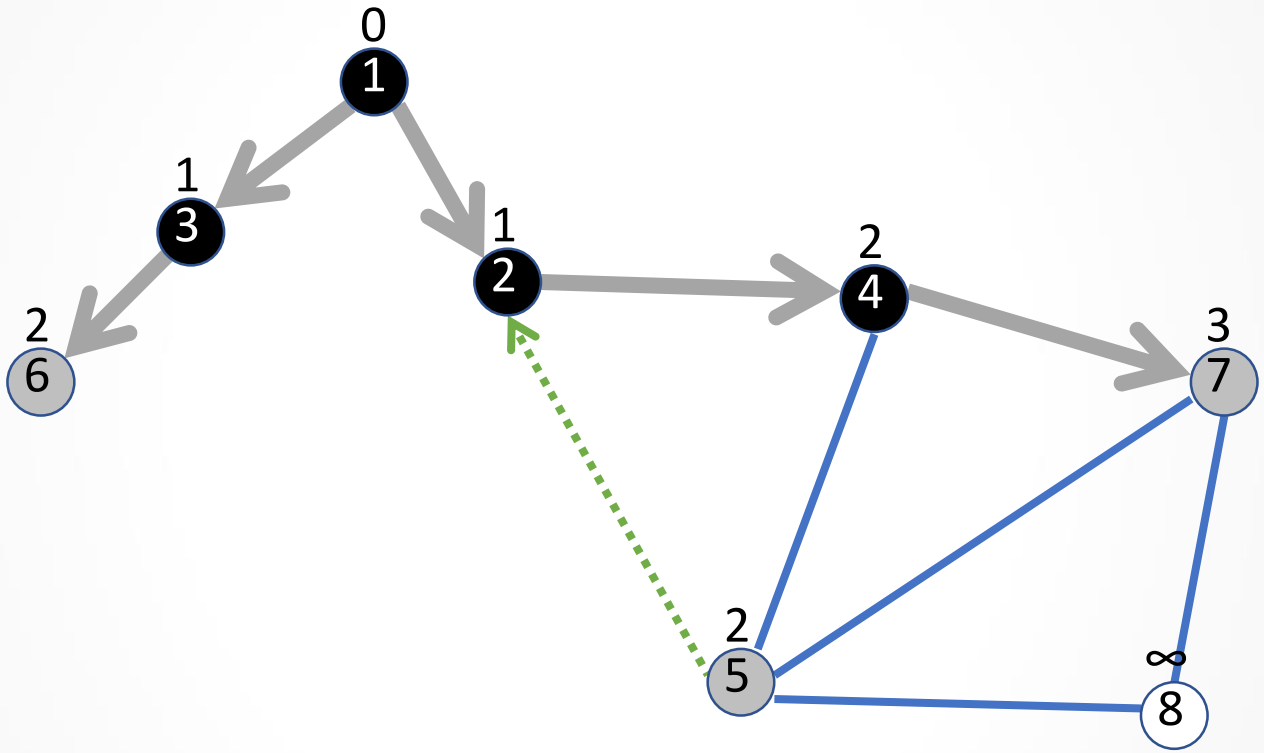


Q: 5,6,7

Просматриваемая дуга: Ø

Вершина 4 становится обработанной

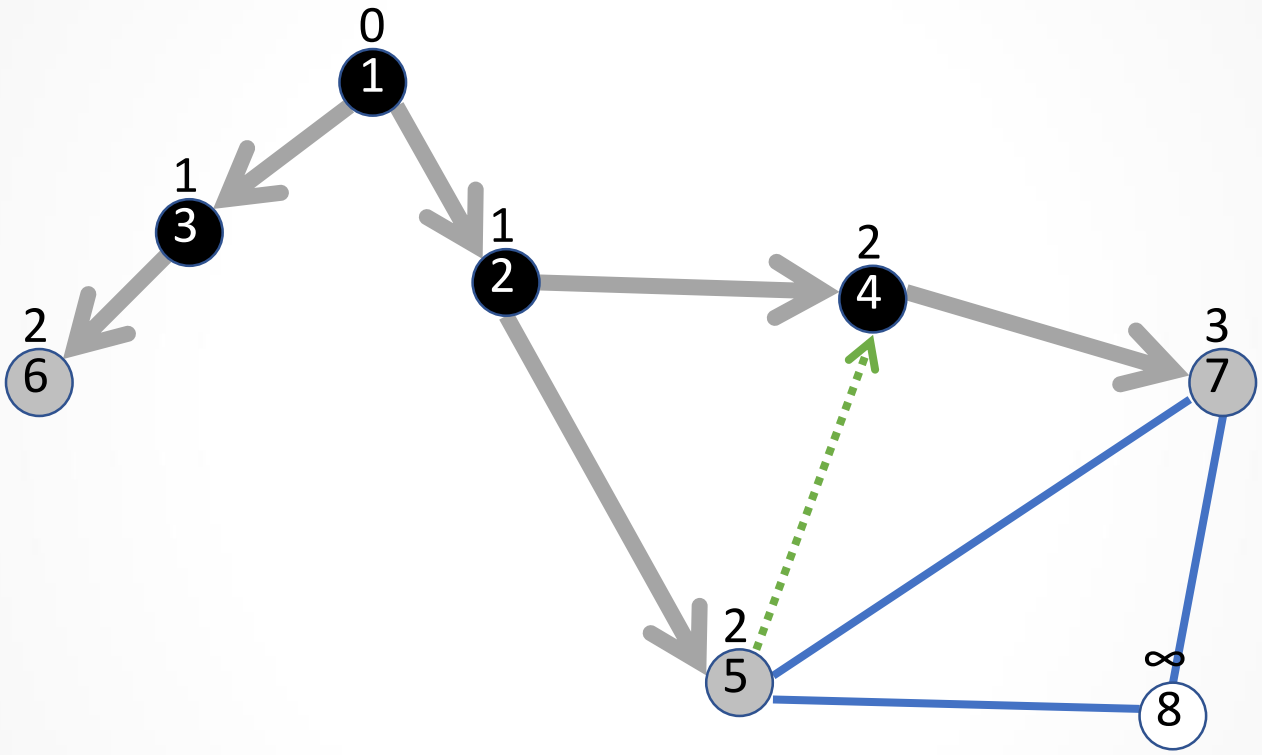
Обход в ширину: пример



Q: 6,7

Просматриваемая дуга: (5,2)

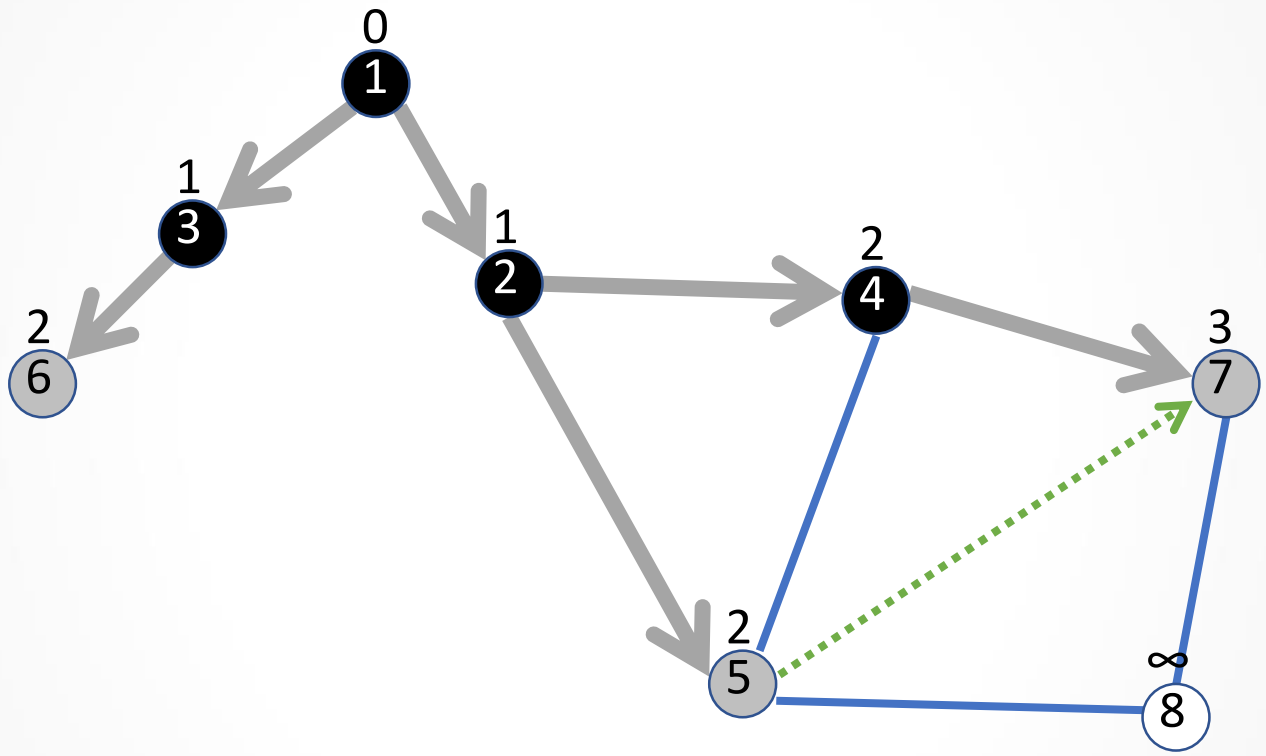
Обход в ширину: пример



Q: 6,7

Просматриваемая дуга: (5,4)

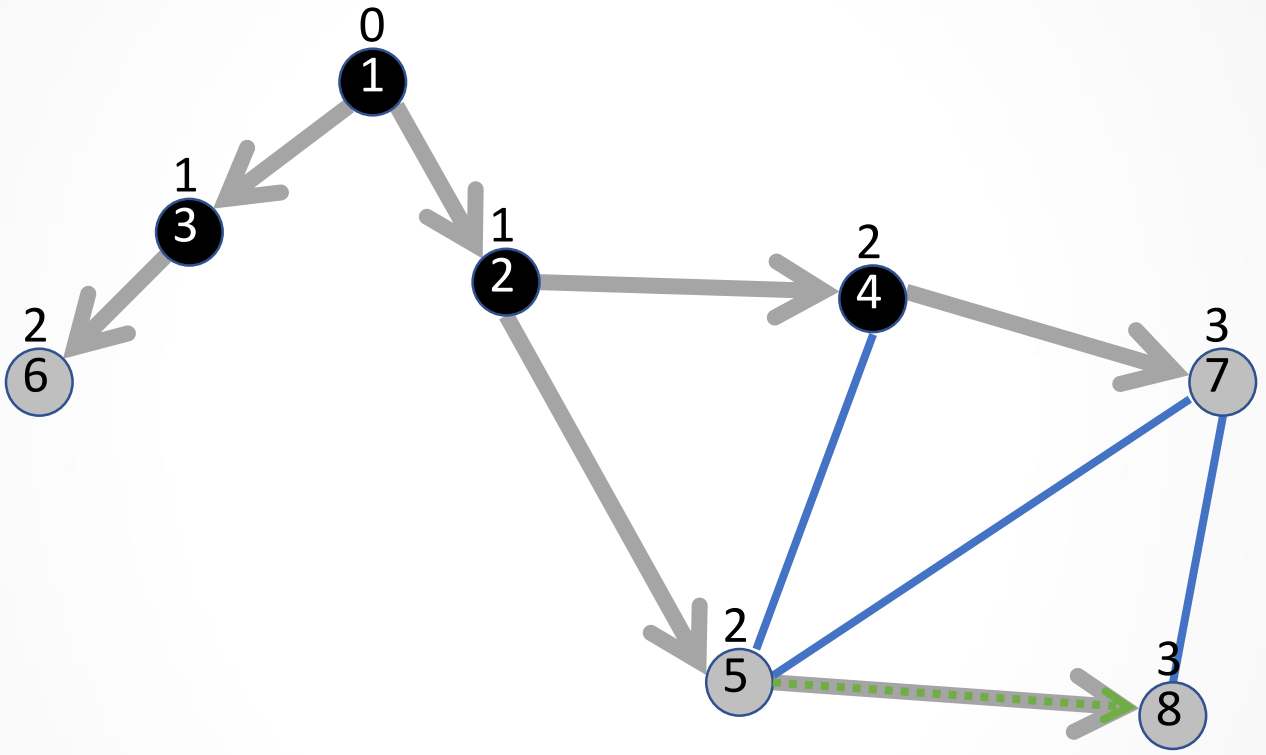
Обход в ширину: пример



Q: 6,7

Просматриваемая дуга: (5,7)

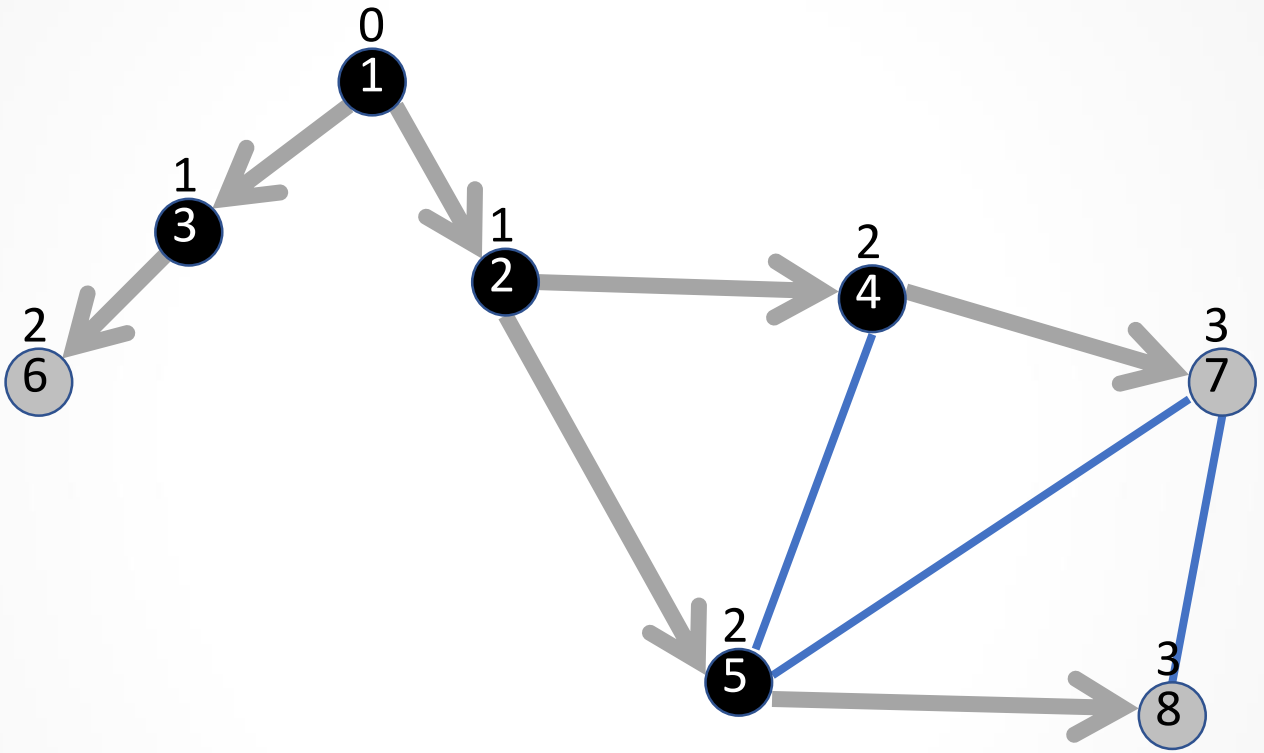
Обход в ширину: пример



Q: 6,7,8

Просматриваемая дуга: (5,8)

Обход в ширину: пример

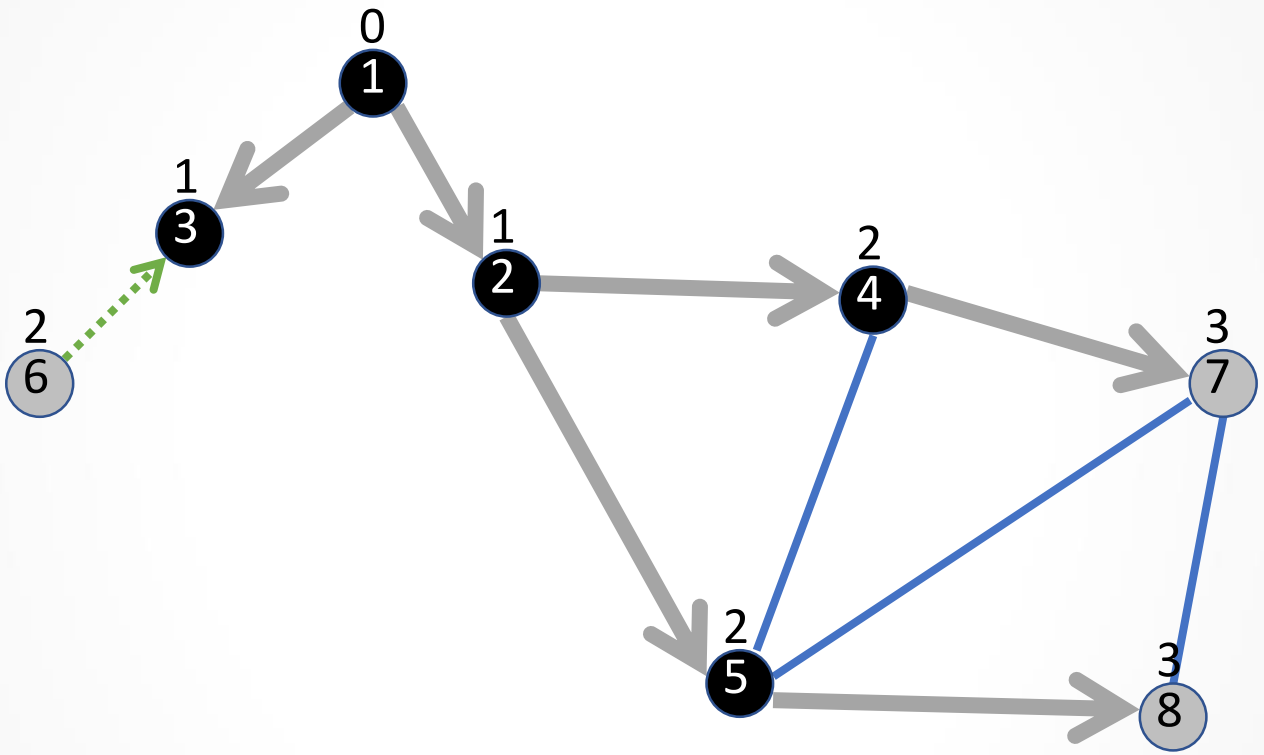


Q: 6,7,8

Просматриваемая дуга: ∅

Вершина 5 становится *обработанной*

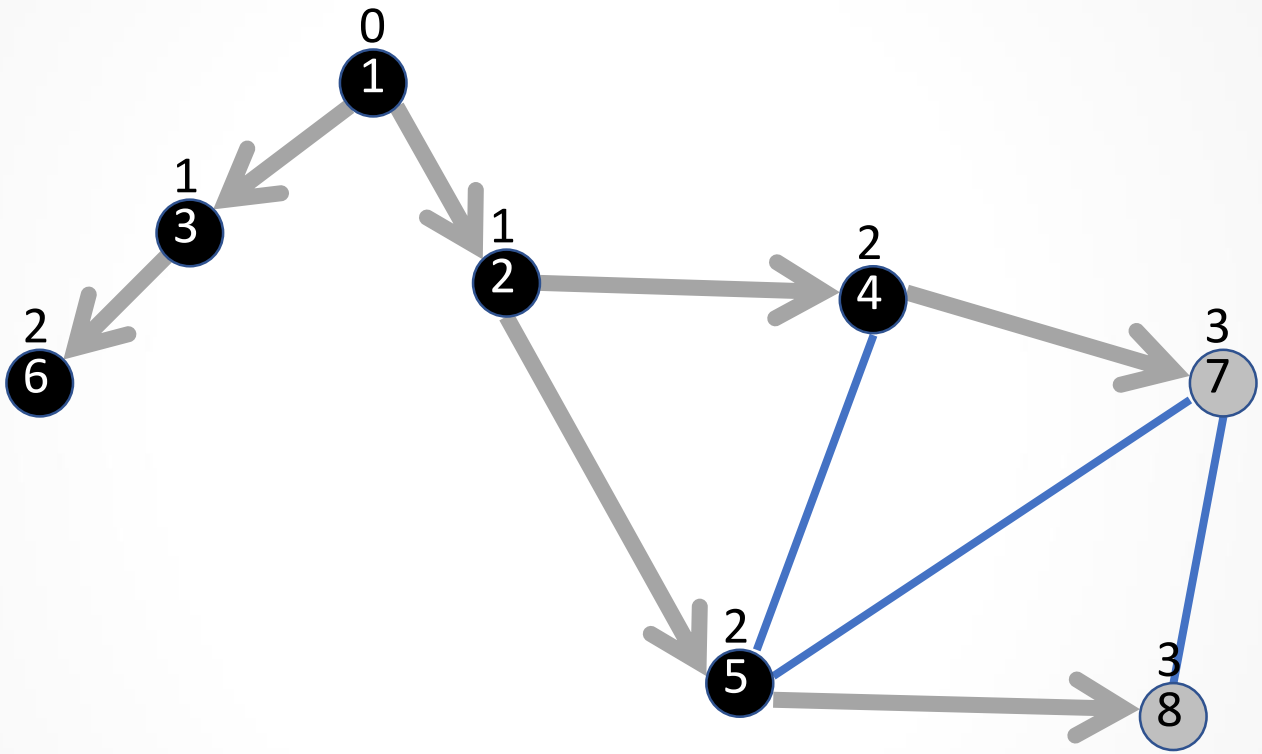
Обход в ширину: пример



Q: 7,8

Просматриваемая дуга: (6,3)

Обход в ширину: пример

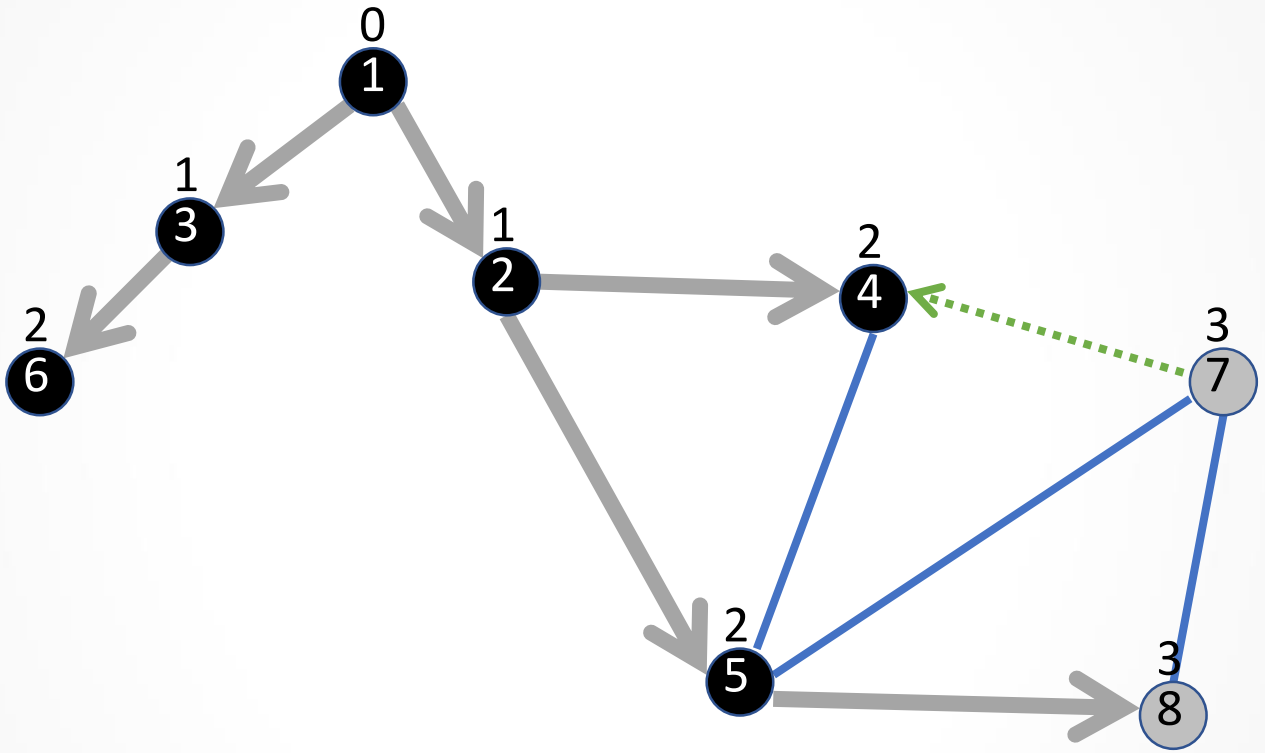


Q: 7,8

Просматриваемая дуга: ∅

Вершина 6 становится *обработанной*

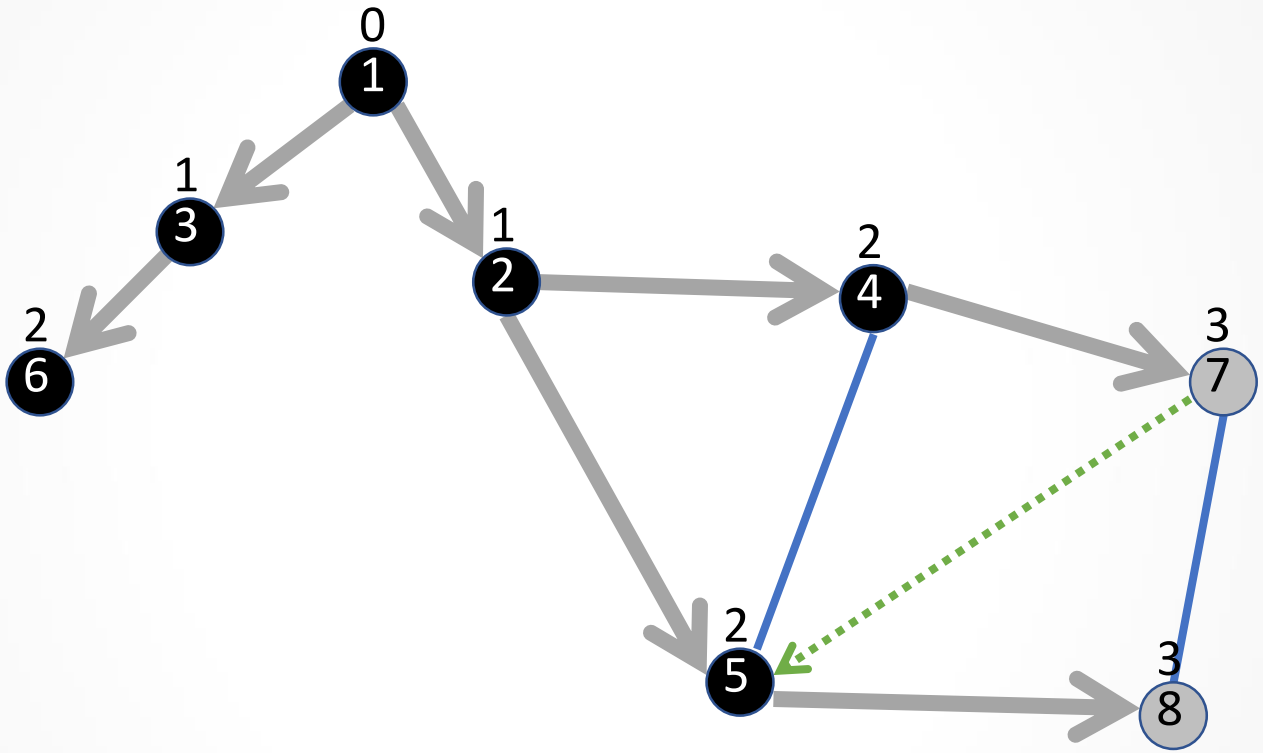
Обход в ширину: пример



Q: 7,8

Просматриваемая дуга: (7,4)

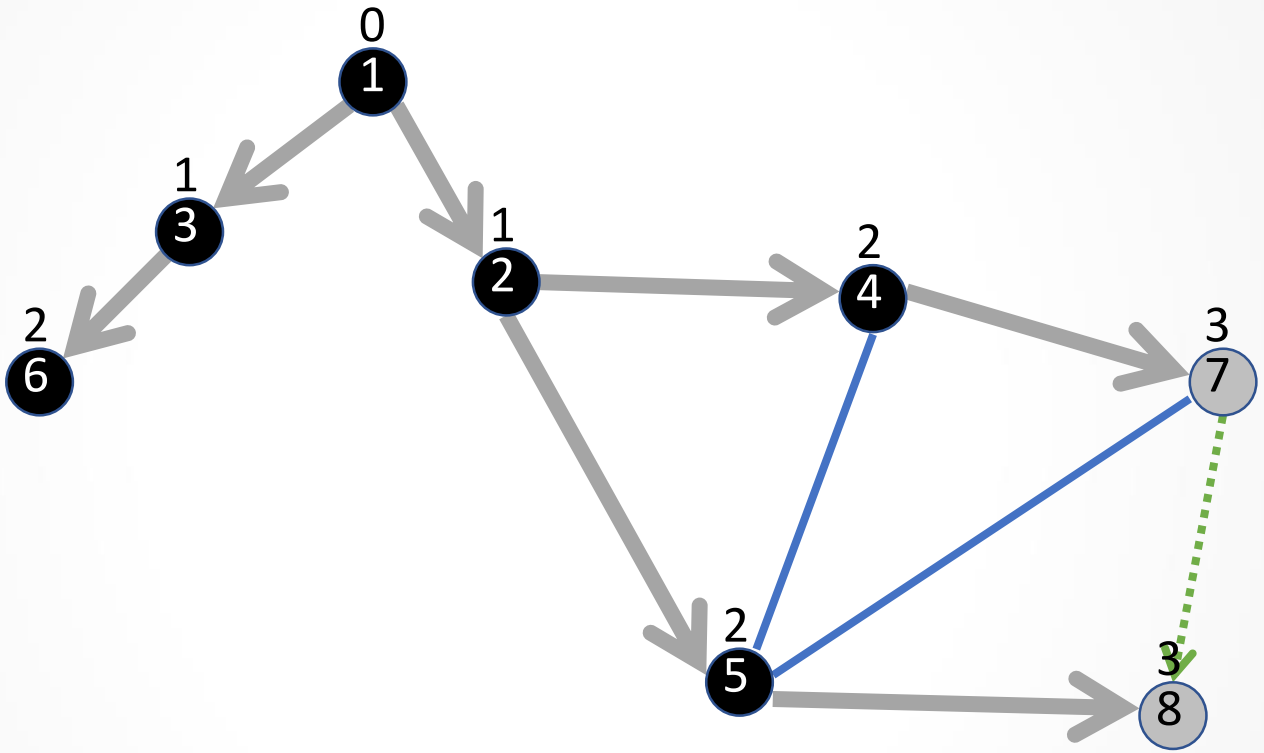
Обход в ширину: пример



Q: 8

Просматриваемая дуга: (7,5)

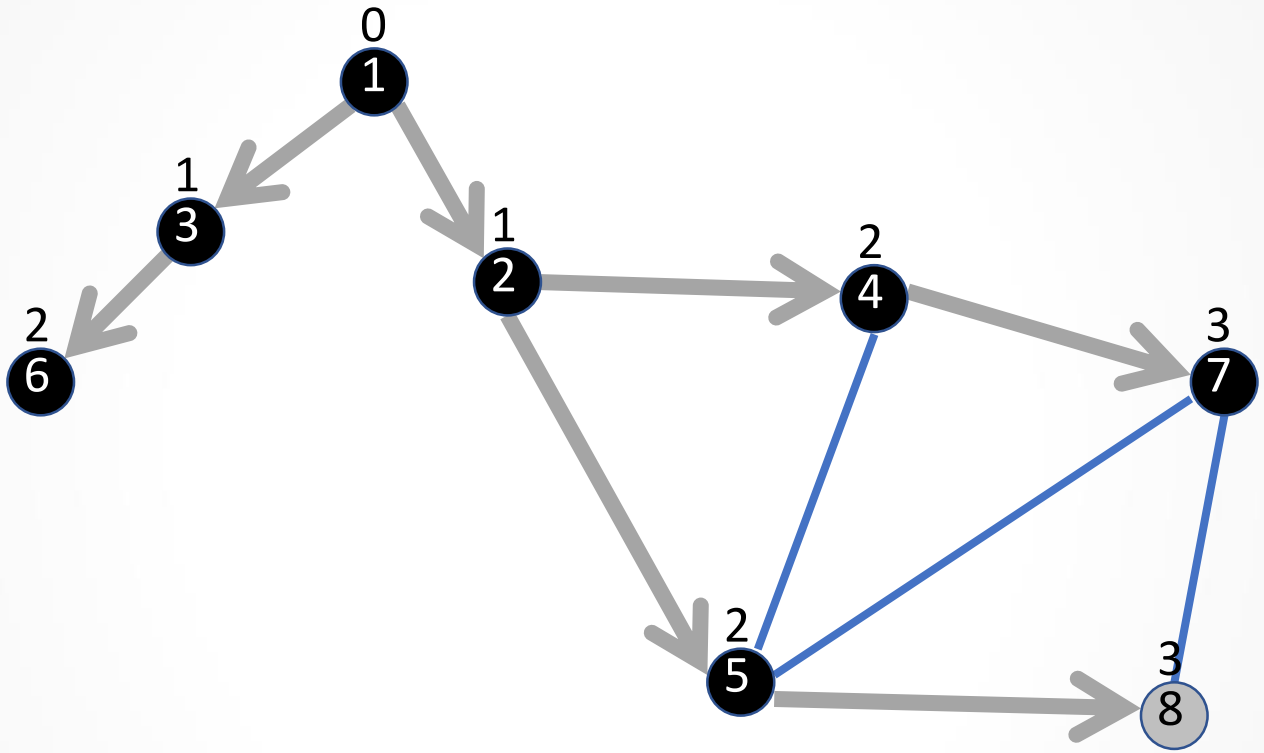
Обход в ширину: пример



Q: 8

Просматриваемая дуга: (7,8)

Обход в ширину: пример

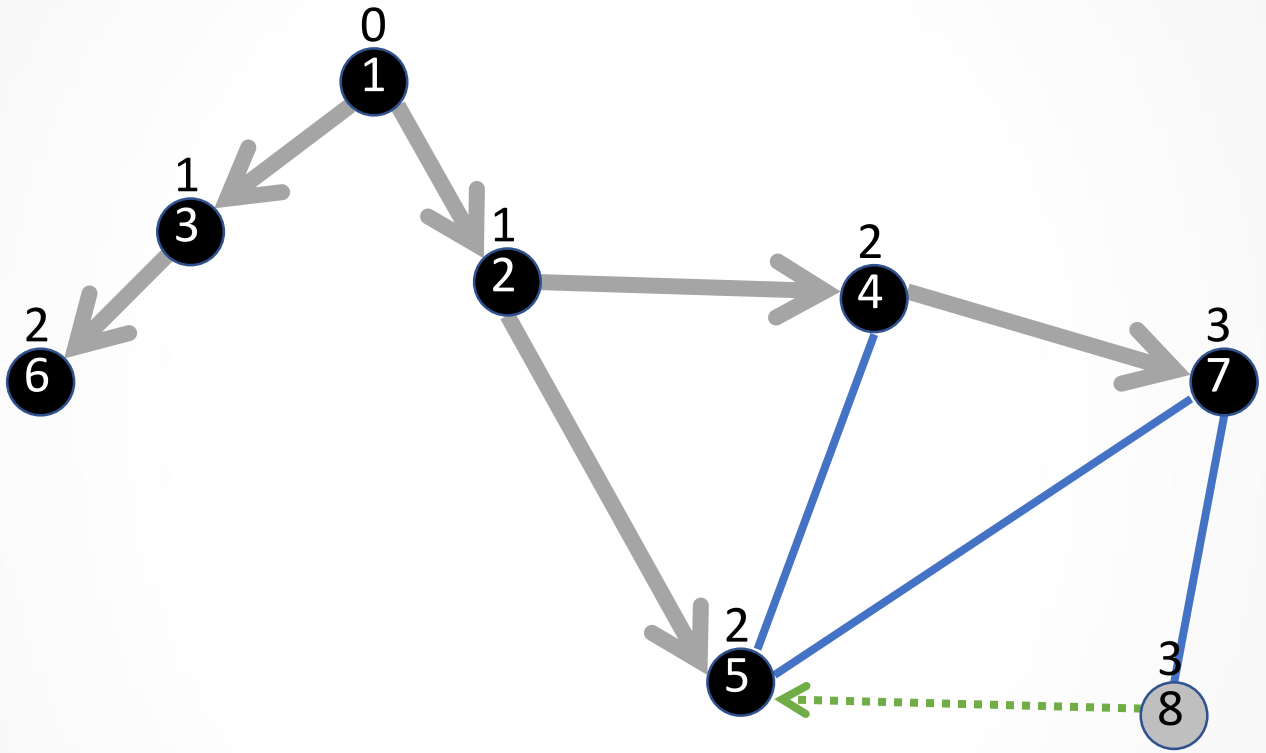


Q: 8

Просматриваемая дуга: ∅

Вершина 7 становится *обработанной*

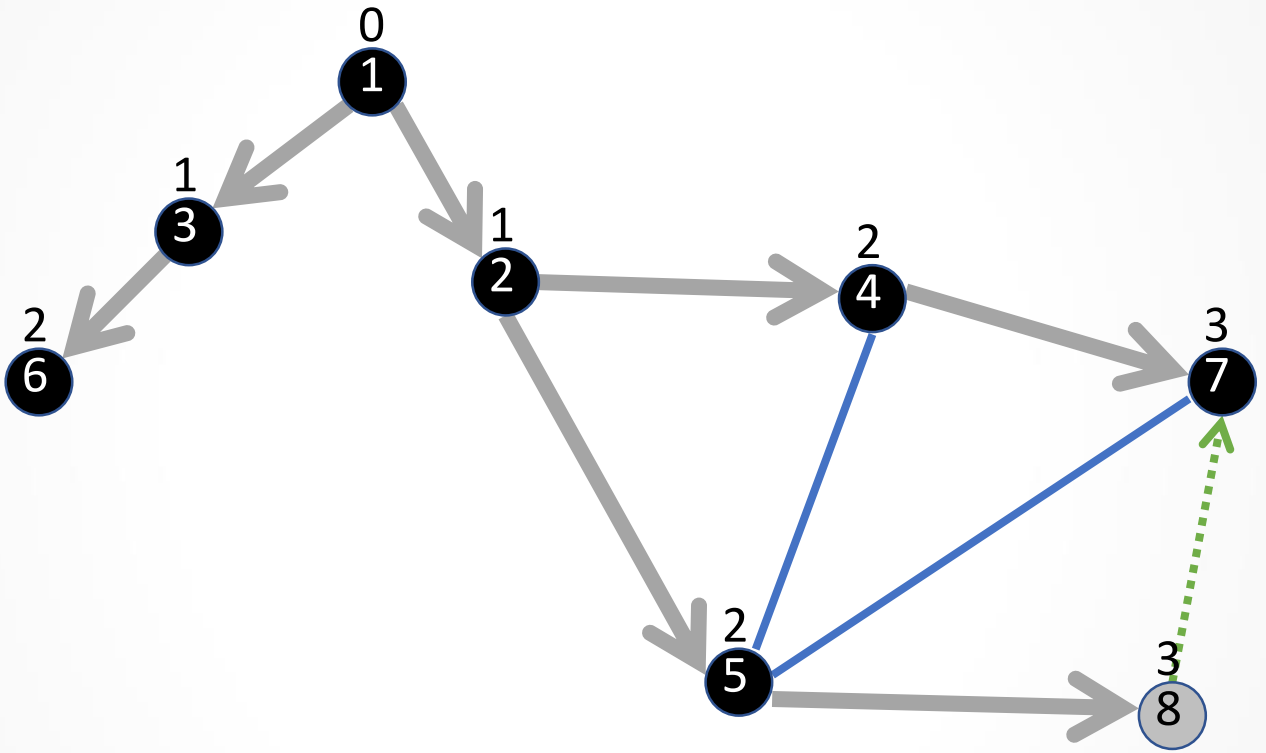
Обход в ширину: пример



Q:

Просматриваемая дуга: (8,5)

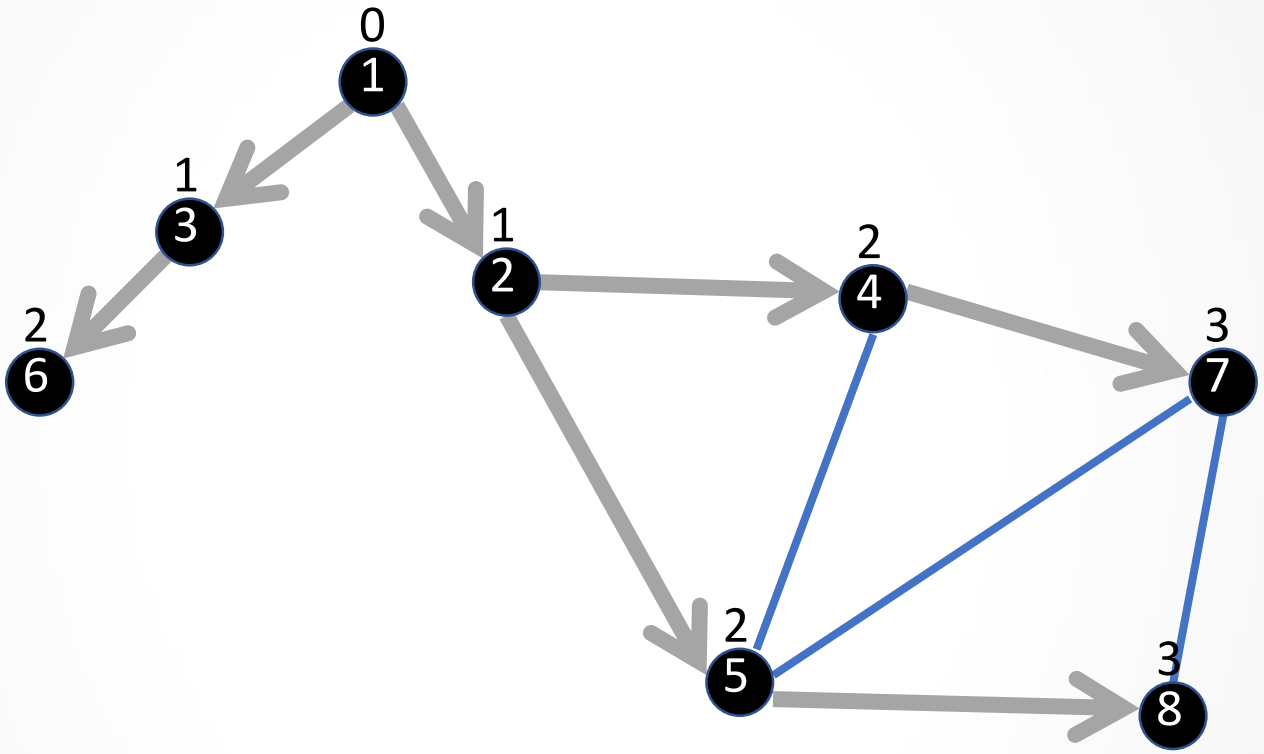
Обход в ширину: пример



Q:

Просматриваемая дуга: (8,7)

Обход в ширину: пример



Q:

Просматриваемая дуга: Ø

Вершина 8 становится *обработанной*

Алгоритм обхода в ширину

- Для обхода графа в ширину нужны две базовых структуры данных:
  - ✓ Для учёта статуса вершины – массив `State[]`.
  - ✓ Для учёта порядка вершин, которые уже отобраны для посещения, но ещё не посещены – очередь `Queue`.
- Для сохранения дополнительной информации, необходимой для решения некоторых задач: сохранение предков вершин в массиве `Pred[]`.

Алгоритм обхода в ширину

```
BFS(G)
For each v ∈ V:
   State[v] := 'unvisited';
   Pred[v] := NULL;
Queue.Empty();

For each v ∈ V:
   If State[v] = 'unvisited'
       BFS_Visit(v);
```

Алгоритм обхода в ширину

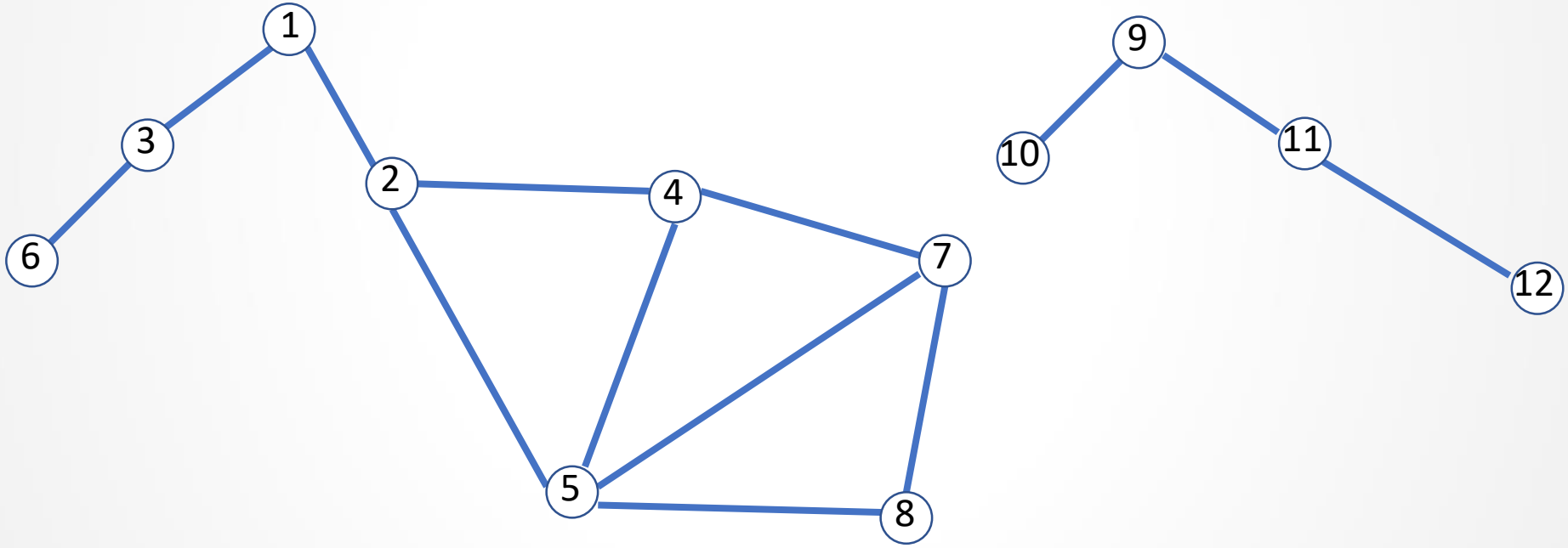
```
BFS Visit(s)
Queue.Enqueue(s);
While (!Queue.IsEmpty())
   v = Queue.Dequeue();
   For each u in Adj(v)
       If State[u] = 'unvisited'
           State[u] := 'visited';
           Pred[u] := v;
           Queue.Enqueue(u);
   State[v] := 'processed';
```

Применение обхода в ширину

- ✓ Поиск компонент связности
- ✓ Поиск кратчайших путей на невзвешенных графах
- ✓ Обнаружение циклов

Поиск компонент связности

Идея алгоритма: все вершины, которые алгоритм проходит в рамках одного вызова BFS_Visit, относятся к одной компоненте связности.



Если граф *связен*, то в рамках одного вызова мы обойдём *все* вершины графа.

Поиск компонент связности

```
BFS(G)
For each v ∈ V:
    State[v] := 'unvisited';
    Pred[v] := NULL;
    Component[v] := 0;
Queue.Empty();
CurComp = 0;
For each v ∈ V:
    If State[v] = 'unvisited'
        CurComp ++;
        BFS_Visit(v, CurComp);
```

Поиск компонент связности

```
BFS Visit(s, CurComp)
Queue.Enqueue(s);
While (!Queue.IsEmpty())
   v = Queue.Dequeue();
   For each u in Adj(v)
        If State[u] = 'unvisited'
             State[u] := 'visited';
             Pred[u] := v;
             Queue.Enqueue(u);
   State[v] := 'processed';
   Component[v] := CurComp;
```

Поиск кратчайших путей

Обход в ширину можно использовать для расчёта расстояний и поиска кратчайших путей на невзвешенном графе.
Кратчайший путь из вершины *u* в вершину *v* – путь (цепь), состоящий из наименьшего количества рёбер.

Идея алгоритма: пусть s – вершина, с которой начался обход при вызове BFS_Visit. Алгоритм BFS_Visit обходит граф G «волнами», каждая волна формируется в рамках одного цикла

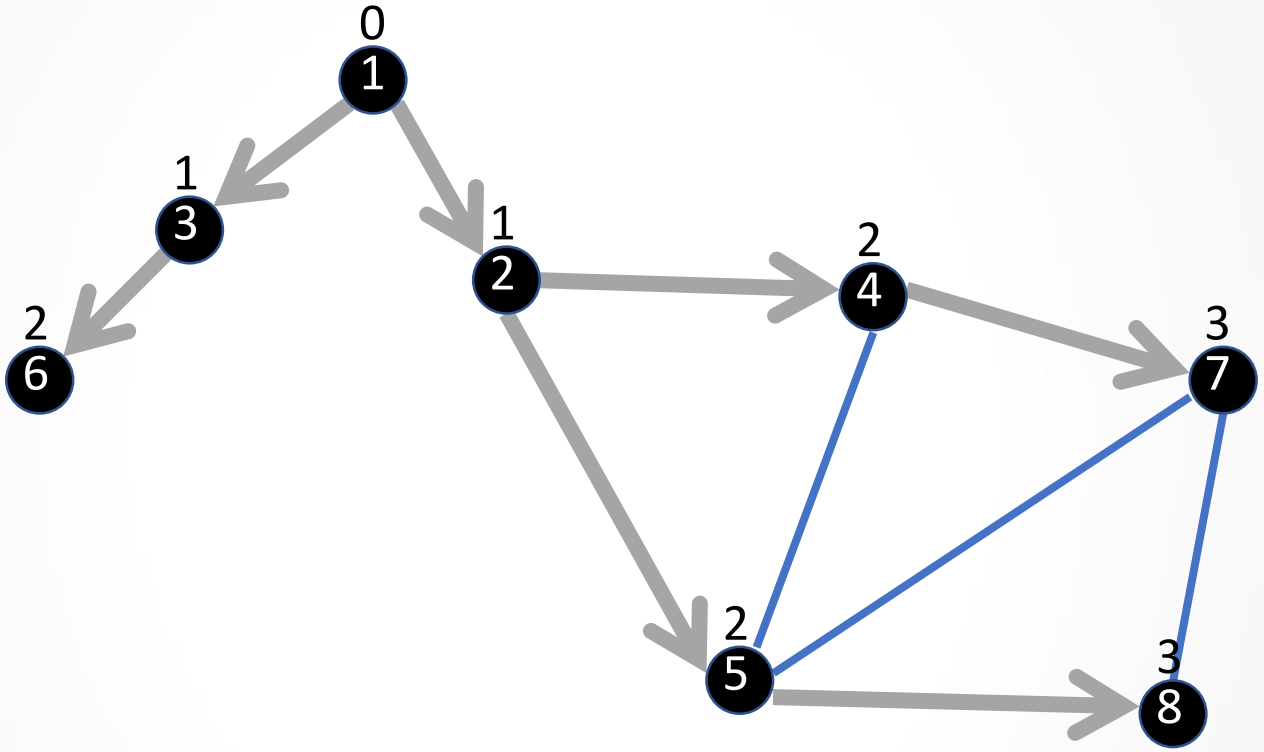
```
For each u in Adj(v)
```

Номер волны = расстоянию от s до заданной вершины.
Сами пути можно восстановить по `Pred`.

Поиск кратчайших путей

```
BFS Visit(s)
For each v ∈ V\{s}: Dist[v] := +∞;
Dist[s] := 0;
Queue.Enqueue(s);
While (!Queue.IsEmpty())
    v = Queue.Dequeue();
    For each u in Adj(v)
        If State[u] = 'unvisited'
            State[u] := 'visited';
            Pred[u] := v;
            Dist[u] := Dist[v]+1;
            Queue.Enqueue(u);
    State[v] := 'processed';
```

Поиск кратчайших путей



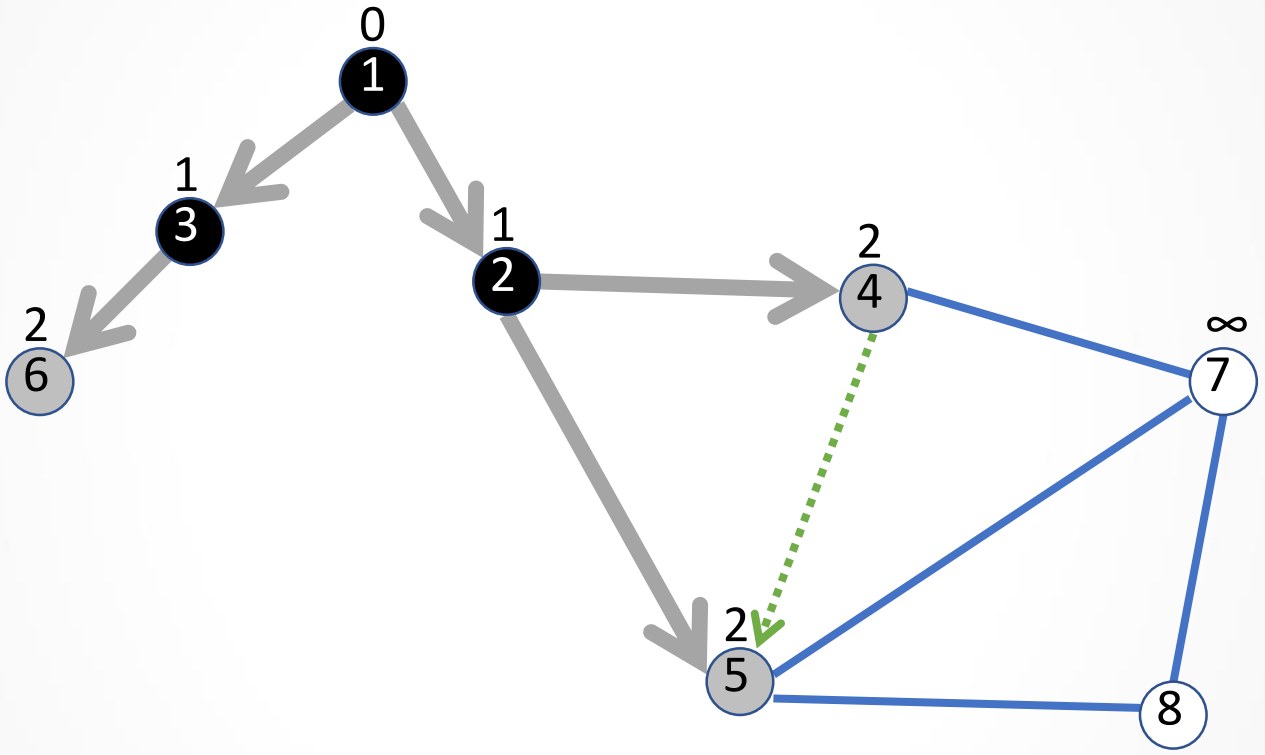
Обнаружение циклов

Идея алгоритма: если при анализе вершин, смежных с текущей вершиной

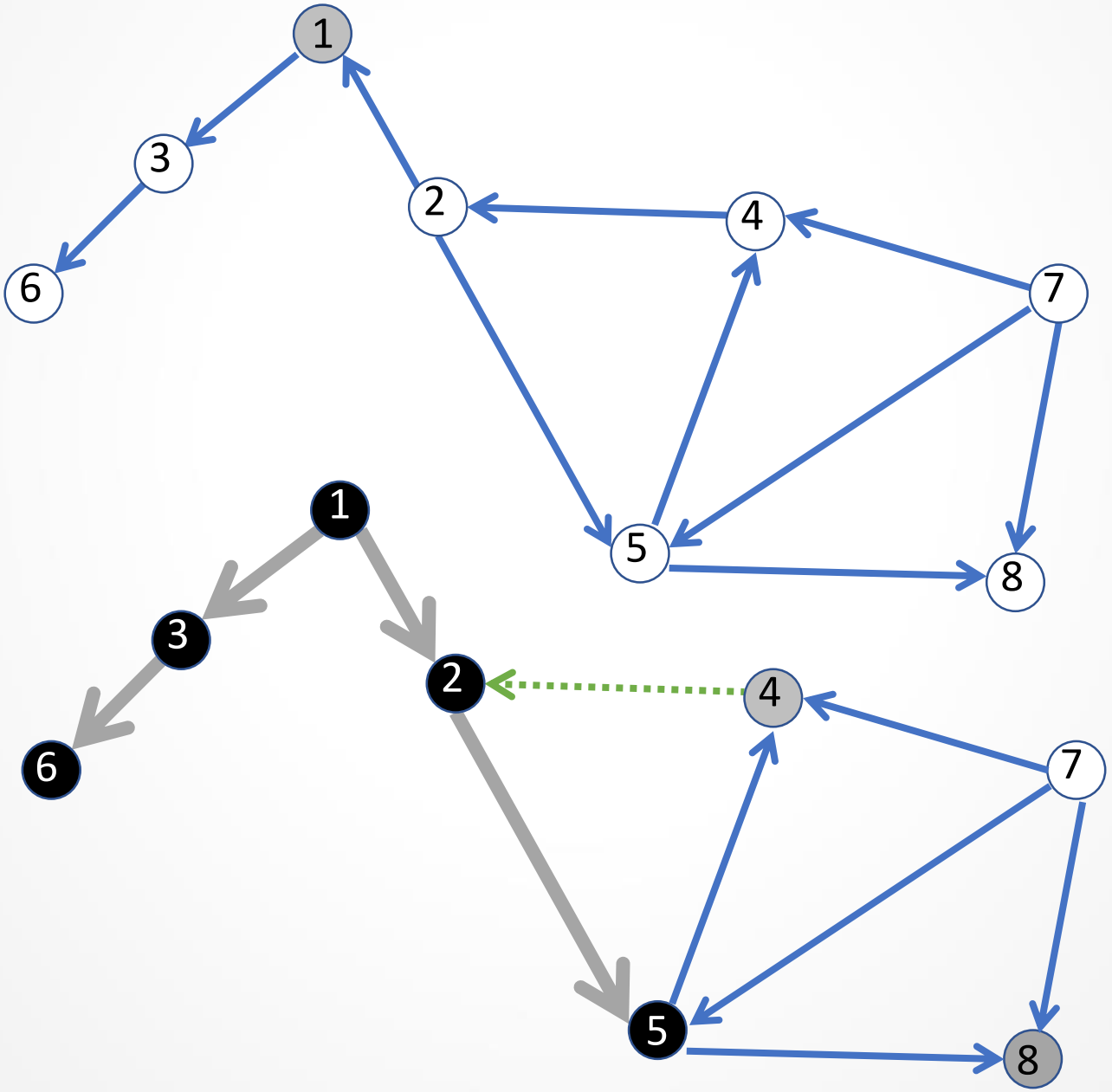
```
For each u in Adj(v)
```

Мы обнаруживаем, что смежная вершина (*u*) уже посещена или обработана и, в случае неориентированных графов, не является непосредственным предком, то мы обнаружили цикл.

Обход в ширину: пример



Обход в ширину: пример

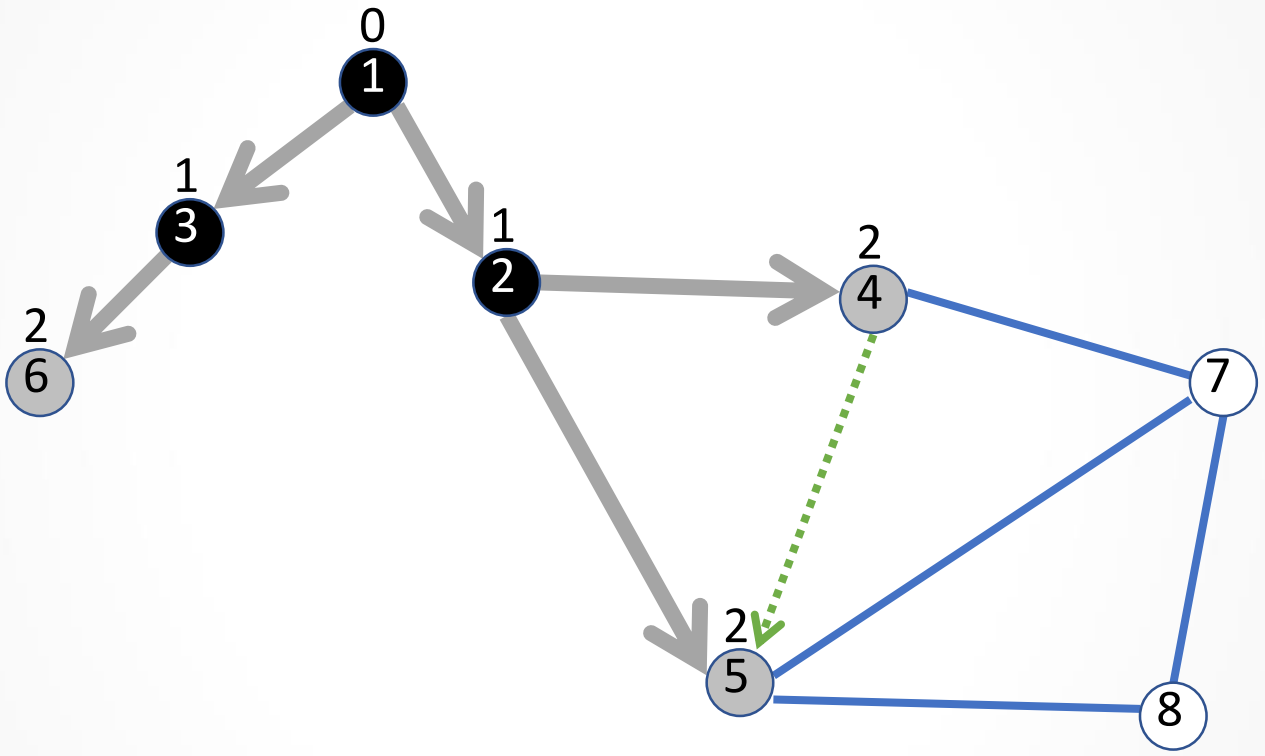


Обнаружение циклов

Описанная идея позволяет обнаружить факт наличия цикла.
Как найти сам цикл?
Идея алгоритма определения самого цикла в виде последовательности рёбер:

- Для каждой вершины ведём список всех предшественников (через `Pred[]`).
- При обнаружении цикла – сравниваем списки предшественников для вершин-концов просматриваемого ребра:
  - Находим ближайшего (к концам списков, т.е. к текущим вершинам) общего предшественника.
  - Цикл включает объединение трёх путей: двух путей от ближайшего общего предшественника до двух текущих вершин и текущего просматриваемого ребра.

Обнаружение циклов




```
PredList[4] = [2]
PredList[5] = [2]
Цикл = {(4,2), (2,5), (5,4)}
```