1 Автоколебательные системы

1.1 Диссипативные системы

Системы, движение которых сопровождается потерями энергии, не относятся к диссипативным, если энергия, расходуемая на преодоление сопротивлений, автоматически компенсируется поступлениями из неколебательного источника.

При этом дозировка поступлений по времени подачи и по величине регулируется лишь самой колебательной силой. Вследствие этого в системе с трением могут возникнуть устойчивые периодические незатухающие колебания. Эти колебания называются автоколебаниями. Примером таких колебаний могут служить колебания маятника часов, в которых энергия падающего груза передаётся маятнику порциями, величина и время подачи которых определяется колебаниями самого маятника.

Автоколебательной системой называется неконсервативная система, способная совершать незатухающие периодические колебания.

На фазовой плоскости периодические движения автоколебательной системы с одной степенью свободы изображаются замкнутыми траекториями, которые называются предельными циклами.

Существуют критерии, позволяющие по некоторым свойствам коэффициентов дифференциального уравнения системы доказать возможность существования в этой системе незатухающих периодических колебаний.

1.2 Критерий Льенара

Система, уравнение движения которой имеет вид:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

будет иметь устойчивый предельный цикл при следующих условиях:

1. Функция $f(x)$ должна быть чётной, а $g(x)$ — нечётной функцией переменной x;

2. $f(0) < 0$;

3. $xg(x) > 0$ для всех $x \neq 0$;

4.
$$F(x) = \int\limits_0^x f(x)dx \to +\infty,$$
когда $x \to +\infty$;

5. Функция $F(x)$ имеет один нуль в точке $x = a > 0$ и монотонно возрастает для $x \geq a$;

Нечётность функции $g(x)$ и условие 3 означает, что востанавливающая сила $-g(x)$ всегда имеет знак, противоположный знаку x (знаку отклонения), то есть действует как восстанавливающая сила в линейной упругой системе, всегда направленная к среднему, нулевому положению.

Чётность функции $f(x)$ вместе с условием $f(x) < 0$ означает, что коэффициент сопротивления имеет отрицательный знак для малых значений x, то есть при малых отклонениях сопротивление раскачивает систему. График $f(x)$ при указанных условиях имеет вид параболической кривой вблизи начала координат. Для больших x сопротивлени становится положительным и вызывает затухание колебаний.

Условия 4 и 5 означают, означают, что система не является диссипативной вблизи нулевого положения, что подтверждает аналогичный вывод из 1 и 2.

Системы, в которых возбуждение возрастающих колебаний происходит после сколь угодно малых начальных возмущений состояния равновесия, называют автоколебательными системами с мягким самовозбуждением.

Если возрастающие колебания возникают лишь после достаточно больших начальных возмущений, то автоколебательная система называется системой с жёстким самовозбуждением.

Примером автоколебательной системы с мягким самовозбуждением будет система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - \mu \left(1 - x^2\right) \dot{x} + x = 0 \tag{2}$$

В самом деле, для уравнения (2) выполнены все условия критерия Льенара:

1. $f(x) = -\mu \left(1 - x^2\right)$ — функция чётная, а $g(x)$ — функция нечётная;

2. $f(0)<0$;

3. $xg(x) = x^2 > 0$ для всех $x \neq 0$;

4. $$F(x) = -\mu \int\limits_0^x \left(1 - x^2\right) dx = -\mu x + \mu \frac{x^3}{3} \to +\infty$$

   когда $x \to +\infty$;

5. Функция $F(x) = 0$ для $x = \pm\sqrt{3}$ и для $x > \sqrt{3}$ растёт вместе с x монотонно, оставаясь всё время положительной;

Поэтому механическая система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля, будет иметь один устойчивый предельный цикл.

Проследим за изменением энергии рассматриваемой системы в зависимости от величины отклонения x. Для этого умножим обе части уравнения (2) на $\dot{x}$ и результат запишем в виде:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + x \frac{dx}{dt} = \mu \left(1 - x^2\right) \dot{x}^2$$

или:

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x}^2 + x^2\right) = 2\mu \left(1 - x^2\right) \dot{x}^2$$

то есть:

$$\frac{dE}{dt} = \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x}^2;\ E = T + \Pi; = \frac{\dot{x}^2}{2};\ \Pi = \frac{x^2}{2}$$

Здесь T, Π и E — кинетическая, потенциальная и полная энергии системы.

Из последнего равенства видно, что при сколь угодно малых начальных возмущениях (пока $|x| < 1$) производная по времени о полной энергии положительна, то есть энергия системы возрастает, что проявится в увеличении отклонений x — силы сопротивления оказывают дестабилизирующее воздействие при $|x| < 1$.

Однако с увеличением амплитуды колебаний при $|x| > 1$ производная по времени от полной механической энергии будет отрицательной в тех интервалах времени, в которых $\dot{x} > 1$. В этих интервалах времени полная энергия убывает и система ведёт себя как дисипативная, что проявляется в уменьшении отклонений x.

Силы сопротивления оказывают демпфирующее действие при $|x| > 1$. В результате колебания системы будут приближаться к режиму установившихся колебаний. Этому режиму соответствует компенсация дестабилизирующих и демпфирующих влияний.

Уравнения весьма многих нелинейных систем могут быть приведены к виду (1). Например, уравнение

$$\ddot{y} + F(\dot{y}) + y = 0$$

В самом деле, продифференцировав это уравнение по t и положив $\dot{y} = x$, получим:

$$\ddot{x} + F'(x)\dot{x} + x = 0,$$

то есть уравнение (1), в котором $f(x) = F'(x)$ и $g(x) = x$.

1.3 Критерий Бендиксона

Предположим, что уравнение движения изображающей систему точки на фазовой плоскости приведены к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \tag{3}$$

Критерий Бендиксона формулируется так: Если в некоторой односвязной области S на фазовой плоскости выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

сохраняет знак и не обращается тождественно в нуль, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий.

Таким образом, критерий Бендиксона представляет достаточное условия отсутствия предельных циклов в некоторых областях фазовой плоскости.

Доказательство приведём от противного. Предположим, что в области S существует периодическое решение уравнения (3). Обозначим замкнутую траекторию, соответствующую этому решению, через L, и ограничиваемую этой траекторией облать, лежащую в области S, через D.

Тогда

$$\int\limits_L (Pdy - Qdx) = \int\limits_0^T \left(P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt} \right) dt = \int\limits_0^T (PQ - QP)\, dt \tag{4}$$

По формуле Грина:

$$\int\limits_L (Pdy - Qdx) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy \tag{5}$$

Согласно (4) из (5) следует:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Последнее равенство возможно, когда:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

меняет знак в области D, что противоречит условиям теоремы.

2 Метод Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{6}$$

Уравнение вида (6), содержащее малый множитель ε при нелинейном слагаемом, называется квазилинейным. Уравнение, полученное из (6) при $\varepsilon \to 0$, называется порождающим

Будем искать решение (6) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{7}$$

В представлении (7) две неизвестные функции, в уравнении (6) — только одна. Для определенности замены свяжем функции A и B дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{8}$$

Продифференцируем (7):

$$\dot{x} = \dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t + \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

С учетом (8) получаем:

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

Продифференцируем (7) ещё раз:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = \omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] - \\ -\omega^2\left[A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t\right]\end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), имеем:

$$\begin{aligned}\omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] = \\ = \varepsilon f\left\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t,\right. \\ \left.\omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

Соотношения (8) и (11) образуют систему уравнений вида

$$\begin{cases}\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0, \\ -\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\end{cases} \tag{11}$$

где

$$F(t) = f\left\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\right\}$$

Решаем систему (11):

$$\begin{cases}\dot{A}(t) = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t\end{cases} \tag{12}$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t)\sin\theta(t) \end{aligned} \tag{13}$$

Найдем выражения для x и $\dot{x}$:

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t = R(t)\left[\cos\omega t\cos\theta(t) + \sin\omega t\sin\theta(t)\right]$$

или

$$x = R(t)\cos\left[\omega t - \theta(t)\right] \tag{14}$$

Аналогично

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right] = -\omega R(t)\left[\sin\omega t\cos\theta(t) - \cos\omega t\sin\theta(t)\right]$$

или

$$\dot{x} = -\omega R(t)\sin\left[\omega t - \theta(t)\right]$$

Подставим (13) в (12):

$$\begin{cases} \dot{R}\cos\theta - R\sin\theta\dot{\theta} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{R}\sin\theta + R\cos\theta\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{15}$$

Решим систему (15) относительно $\dot{R}$ и $\dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ R\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{16}$$

или

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega R}f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{17}$$

Все выкладки до настоящего момента — точные. Теперь приближенно заменим правые части (17) из средними значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] \sin\left(\omega t - \theta\right) dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] \cos\left(\omega t - \theta\right) \dfrac{dt}{R} \end{cases}$$

При вычислении интегралов в правых частях последних выражениях будем считать $R(t)$ и $\theta(t)$ постоянными. Произведём в интегралах замену переменных

$$\psi = \omega t - \theta$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right) \sin\psi dt = \varepsilon\Phi(R), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right) \cos\psi \dfrac{dt}{R} = \varepsilon\Psi(R) \end{cases} \tag{18}$$

Уравнения (18) называется уравнениями установления. В первое уравнение входит только $R(t)$ и оно может быть проинтегрировано независимо от второго.

Особые точки определяются уравнениями

$$\Phi(R) = 0,\ \Psi(R) = 0 \tag{19}$$

В случае $\Psi(R) = 0$ из второго уравнения (18) находим

$$\theta = \theta_0 = const,$$

что означает, что особые точки лежат на радиальных прямых и их положение на радиальных лучах определяется корнями уравнения

$$\Phi(R) = 0.$$

Уравнение может иметь несколько корней

$$R = R_j.$$

Об устойчивости равновесного состояния $R = R_j$ можно судить по характеру изменения вариации амплитуды колебаний R_j. Согласно (18) имеем:

$$\dot{R} = \varepsilon\Phi(R) = 0, \tag{20}$$

Рассмотрим возмущённое движение $R_j + \delta R_j$. Для амплитуды возмущённого движения получаем:

$$\frac{d(R_j + \delta R_j)}{dt} = \varepsilon\Phi(R_j + \delta R_j), \tag{21}$$

Разлагаем правую часть (20) и ограничиваясь линейным приближением, получаем:

$$\frac{d(\delta R_j)}{dt} = \varepsilon\Phi'(R_j)\delta R_j, \tag{22}$$

Если

$$\Phi'(R_j) < 0,$$

то возмущения амплитуды δR будут стремиться к нулю и режим колебаний, соответствующий $R = R_j$, является устойчивым

После отыскания R и θ для отыскания решения и построения скелетной кривой пользуемся выражением (14).