Алгоритмы на графах

Модуль 2. Кратчайшие расстояния.

Лекция 9.

Кратчайшие пути (часть 1).

Адигеев Михаил Георгиевич

2023

План лекции

1. Задача о кратчайшем пути
   - ✓ Почему не подходят поиск в ширину и топологическая сортировка?
2. Алгоритм Дейкстры
   - ✓ Общая схема алгоритма
   - ✓ Обоснование корректности
   - ✓ Эффективная реализация
   - ✓ Как работает с отрицательными весами дуг?
3. Задача о кратчайшем пути при отрицательных весах.
4. Алгоритм Беллмана-Форда.

Задачи о кратчайшем пути

Задача о кратчайшем пути

Дан взвешенный граф $G(V, E)$, $w: E \to R$.

Вес пути определим как *сумму* весов входящих в него дуг.

Кратчайший путь = путь минимального веса.

Возможны три формулировки задачи:

1) Заданы вершины $s, t \in V$. Найти кратчайший путь из s в t.
2) Задана вершина $s \in V$. Найти кратчайшие пути из s во все остальные вершины графа.
3) Найти кратчайшие пути для всех пар вершин на графе.

Сейчас рассматриваем варианты (1) и (2).

Задачи о кратчайшем пути

Мы уже рассматривали 2 алгоритма для поиска кратчайших путей

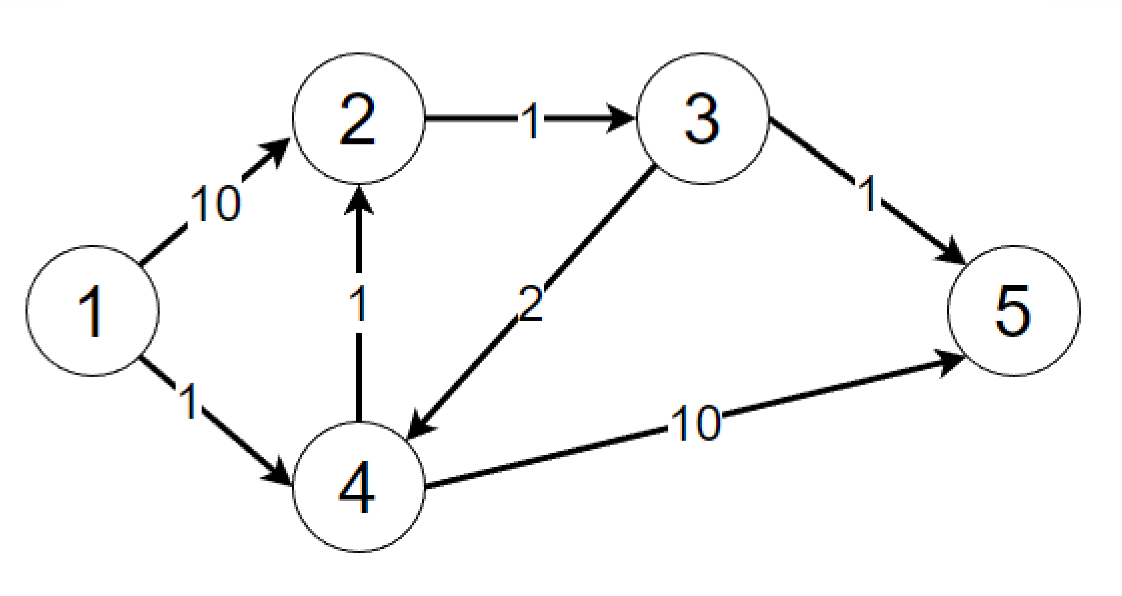
- Алгоритм на основе поиска в ширину.
- Алгоритм на основе топологической сортировки.

Почему их не достаточно?

Задачи о кратчайшем пути

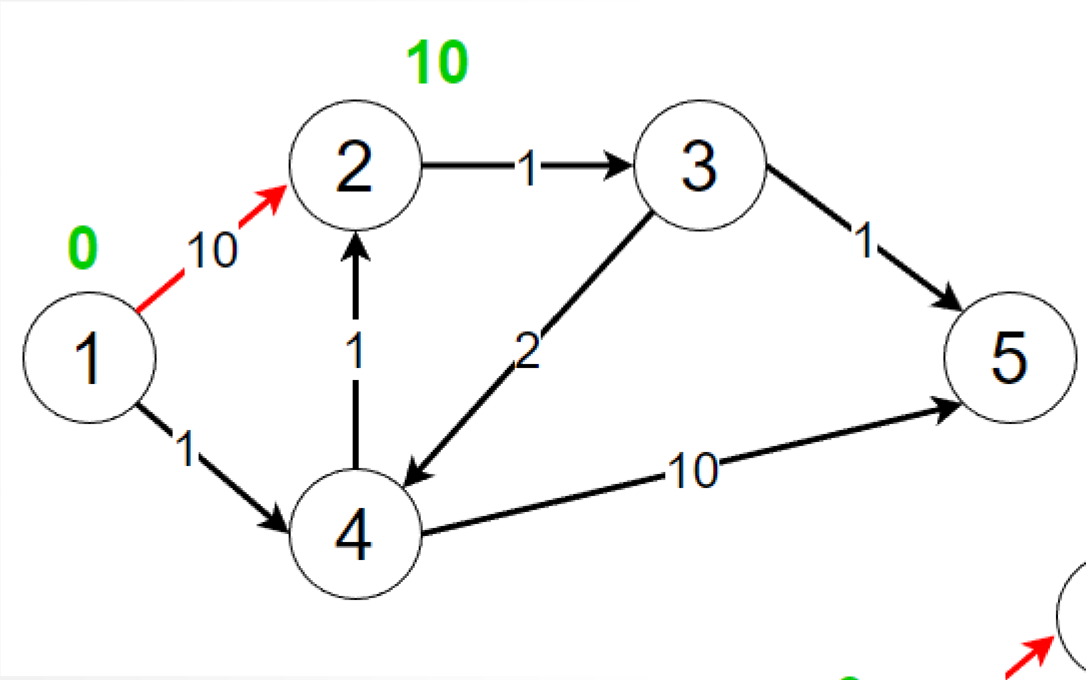
<u>Топологическая сортировка</u>

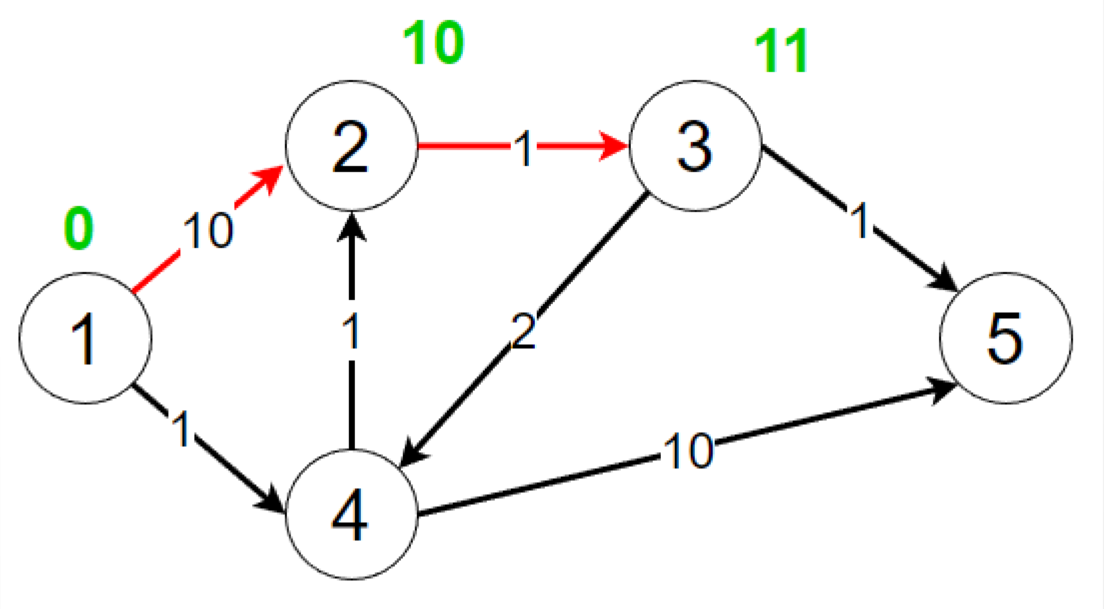
Рассмотрим случай, когда на графе есть контур.



Задачи о кратчайшем пути

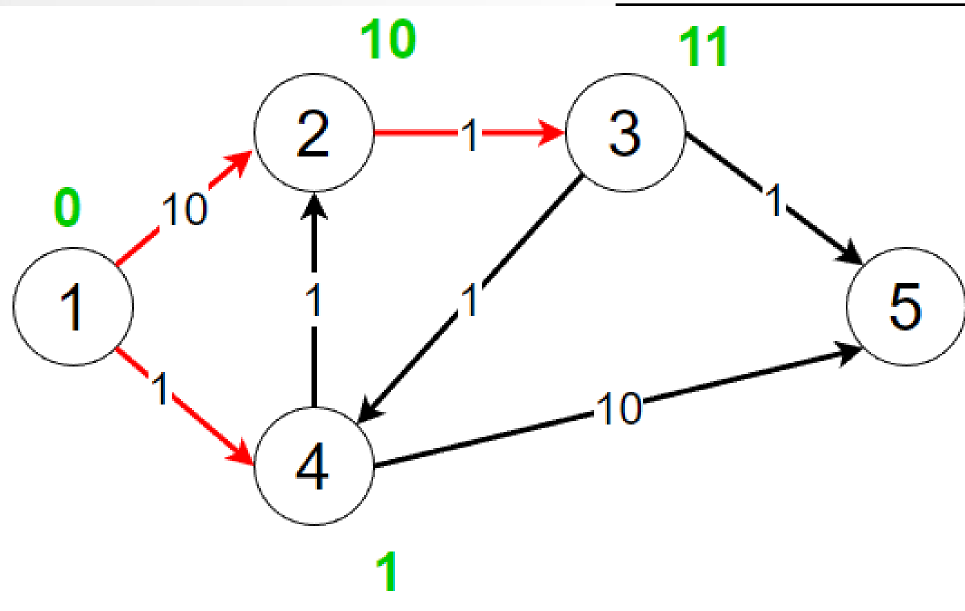
<u>Топологическая сортировка</u>

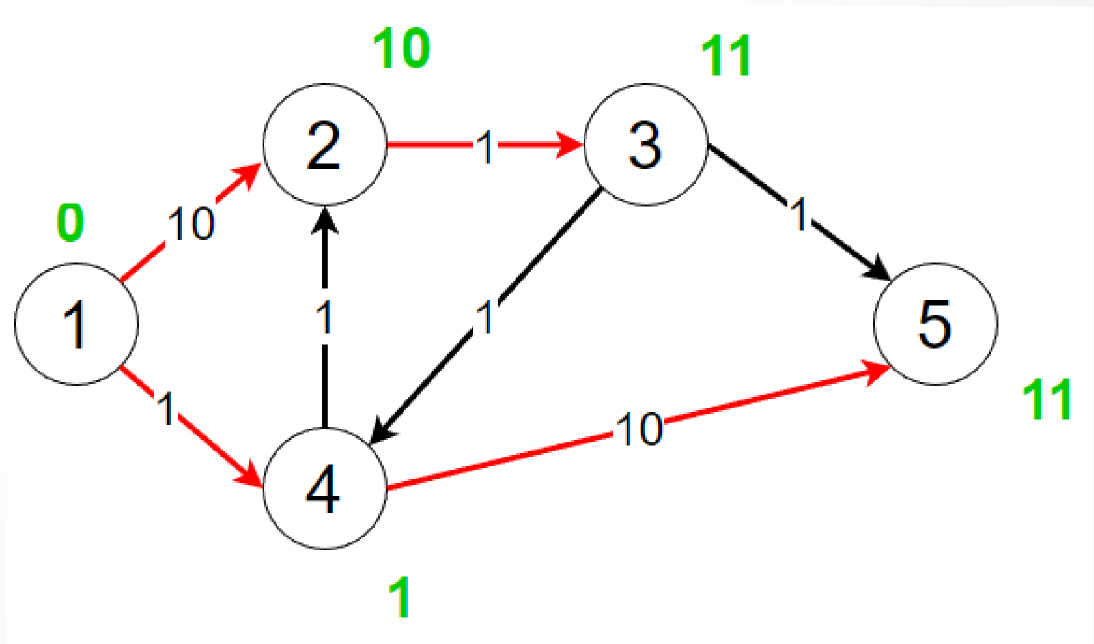




Задачи о кратчайшем пути

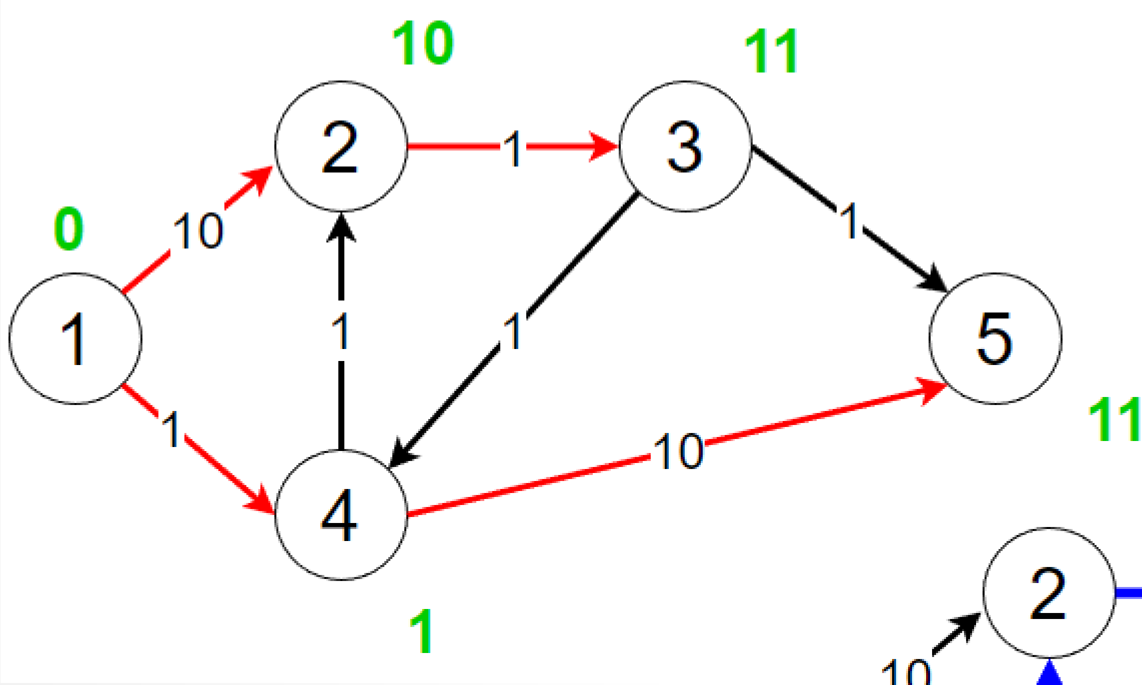
<u>Топологическая сортировка</u>

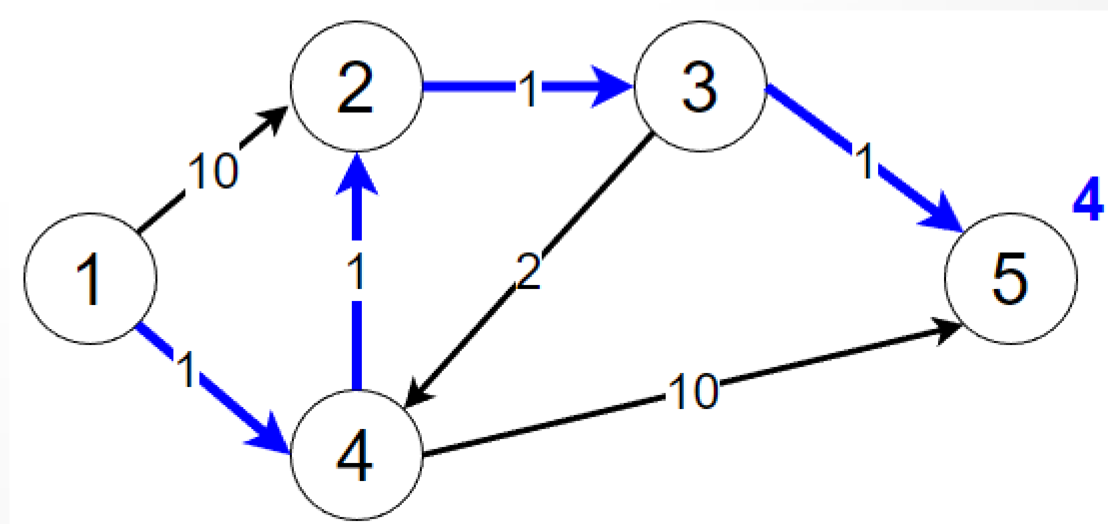




Задачи о кратчайшем пути

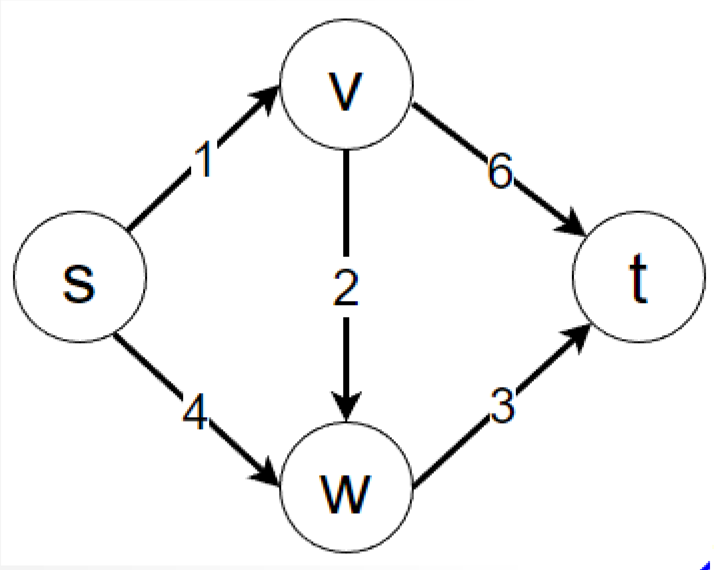
Топологическая сортировка

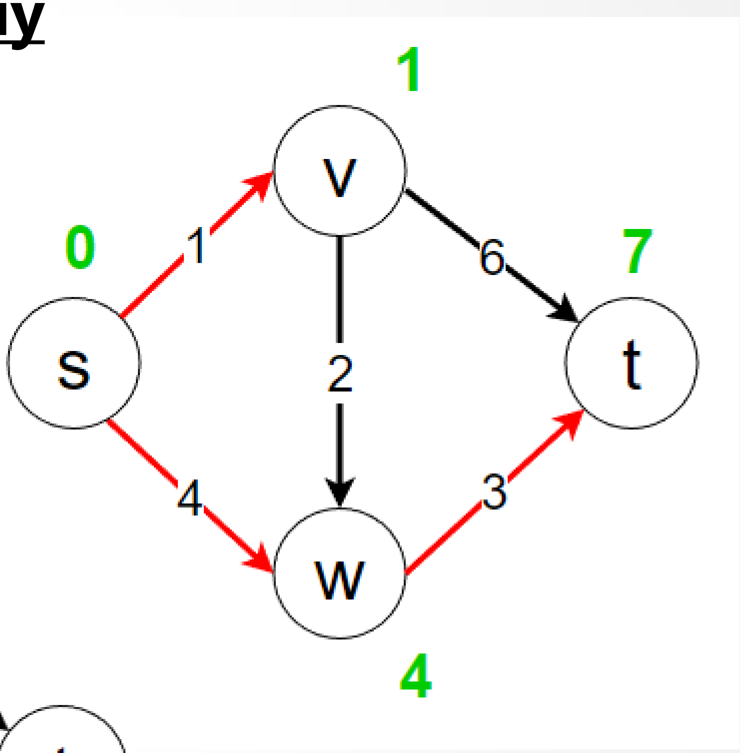


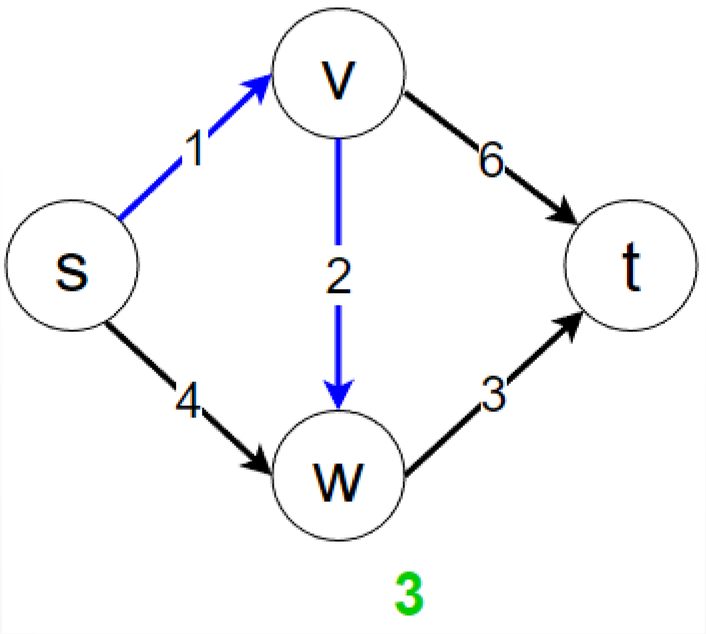


Задачи о кратчайшем пути

Поиск в ширину



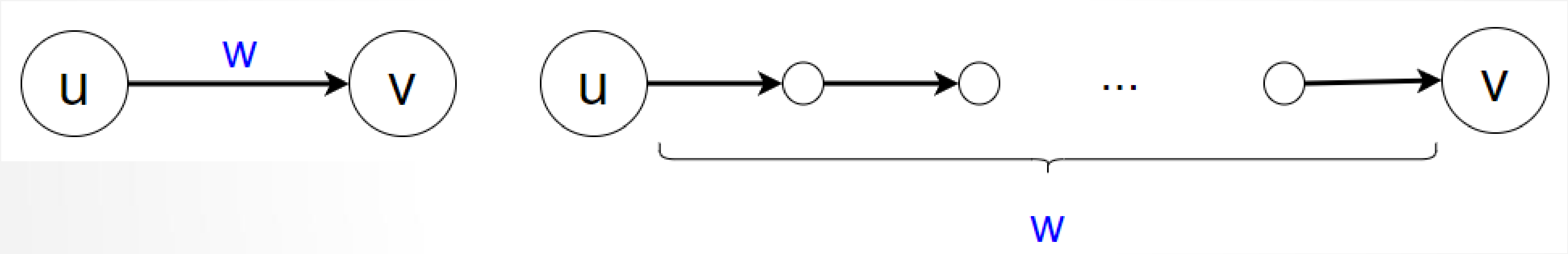




Задачи о кратчайшем пути

Поиск в ширину

Но можно изменить граф – заменить ребро веса w путём из w дуг.



В этом случае алгоритм отработает корректно.

Но сложность такого алгоритма: $O(n' + m') = O(\sum w_i)$ – эта величина при больших значениях весов оказывается слишком большой.

Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры

Дан взвешенный ориентированный граф $G(V, E)$, $w: E \to R_+$.

Вес пути определим как *сумму* весов входящих в него дуг.

Кратчайший путь = путь минимального веса.

Задана вершина $s \in V$. Найти кратчайшие пути из s во все остальные вершины графа.

Алгоритм Дейкстры по структуре похож на обход в ширину и особенно на алгоритм Прима:

1) Создаём подмножество вершин V', инициализируем вершиной s.
2) Итерационно добавляем в V' *самую лучшую* вершину.
3) Завершаем алгоритм, когда $V' = V$.

Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры

```
V' := {s}
For each v ∈ V:
      d[i] := +∞;
      p[i] := NULL;
d[s] := 0;
Пока существует дуга (u,v): u ∈ V',v ∉ V':
      Выбрать дугу (u*,v*): d[u*]+w[u*,v*] минимально;
      V' := V' ∪ {v*};
      d[v*] := d[u*]+w[u*,v*];
      p[v*] := u*;
      Update_C&P(v*);

Update_C&P(v)
For each (v,u)∈E:
      if u∈V\V'  &  d[u] > d[v]+w[v,u]: d[u] := d[v]+w[v,u];
```

Алгоритм Дейкстры

Теорема Алгоритм Дейкстры корректно находит расстояния от s до вершин графа, при условии, что веса всех дуг неотрицательны.

Доказательство

Доказательство проведём с помощью полной математической индукции.

Параметр индукции: порядковый номер k, в порядке добавления вершин в V'.

Утверждение: для всех $v \in V'$ величина $d[v]$ равна расстоянию от s до v.

1. Базис индукции: $k = 1$.

Это значит, что $v = s$. Для s выполнено: $d[s] = 0$= расстоянию от s до s.

2. Индуктивное предположение: для вершин с номерами $\leq k$ выполнено доказываемое утверждение.

Алгоритм Дейкстры

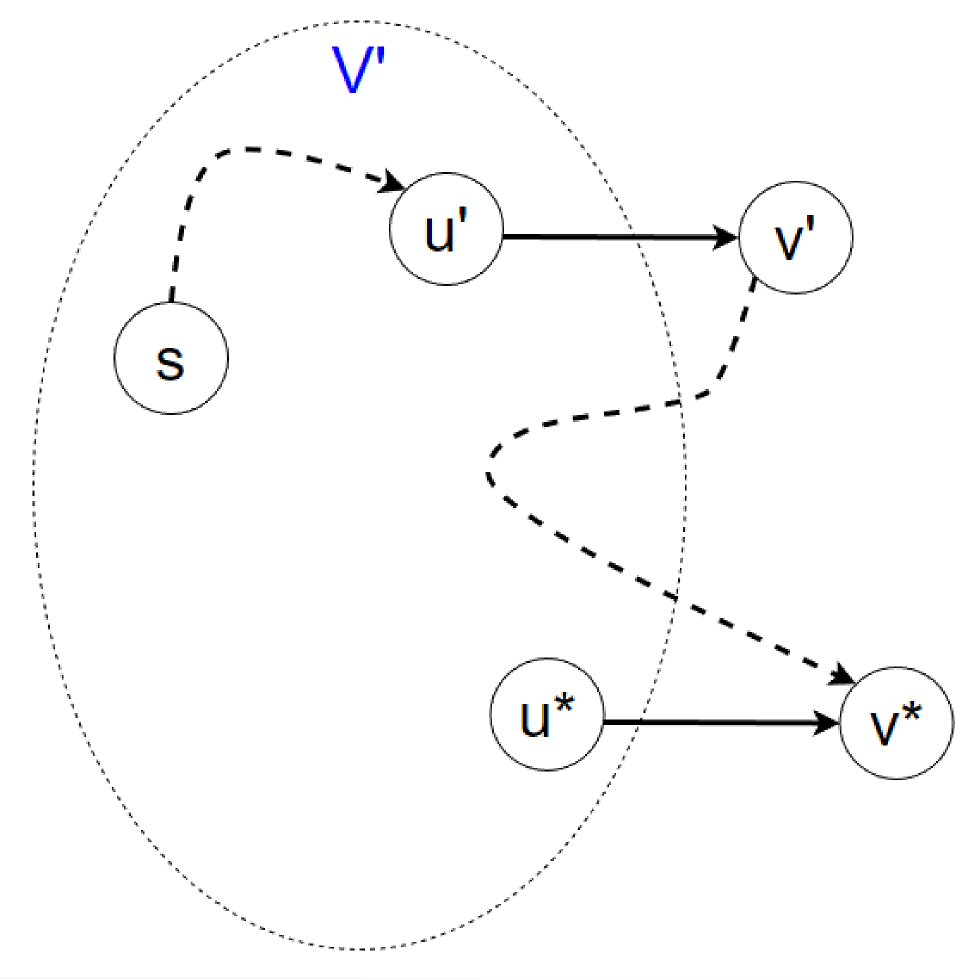
3. Индуктивный переход: выберем вершину v^*, добавленную $(k+1)$-й.

Пусть (u^*, v^*) – дуга, выбранная в алгоритме перед добавлением v^*.

Вершина u^* добавлена в V' раньше. По предположению индукции, $d[u^*]$= расстоянию от s до u^*. Тогда $d[v^*] = d[u^*] + w[u^*, v^*]$ – вес пути из s в v^* через u^*. Предположим, что есть более короткий путь (путь меньшего веса) π'.

Путь π' начинается в вершине $s \in V'$ и оканчивается в $v^* \notin V'$. Пусть (u', v') – первая на π' дуга, такая, что $u' \in V', v' \notin V'$.

Алгоритм Дейкстры



Пусть (u', v') – первая на π' дуга, такая, что $u' \in V', v' \notin V'$.

Рассмотрим ситуацию, которая была перед добавлением v^*. В рассматриваемом случае, $d[u'] + w[u', v'] < d[u^*] + w[u^*, v^*]$.

Поэтому должна было быть выбрана дуга (u', v') вместо (u^*, v^*). Получили противоречие.

Отдельно следует рассмотреть вершины v, которые по окончании алгоритма так и не вошли в V'. Но каждая из таких вершин не достижима из s, поэтому $d[v] = +\infty$ - корректное значение.

Алгоритм Дейкстры

Реально алгоритмы Дейкстры строит дерево кратчайших путей. Дерево определяется ссылками $p[v]$.

Какова сложность алгоритма? Она зависит от реализации операций

```
Выбрать дугу (u*,v*): d[u*]+w[u*,v*] минимально;
```

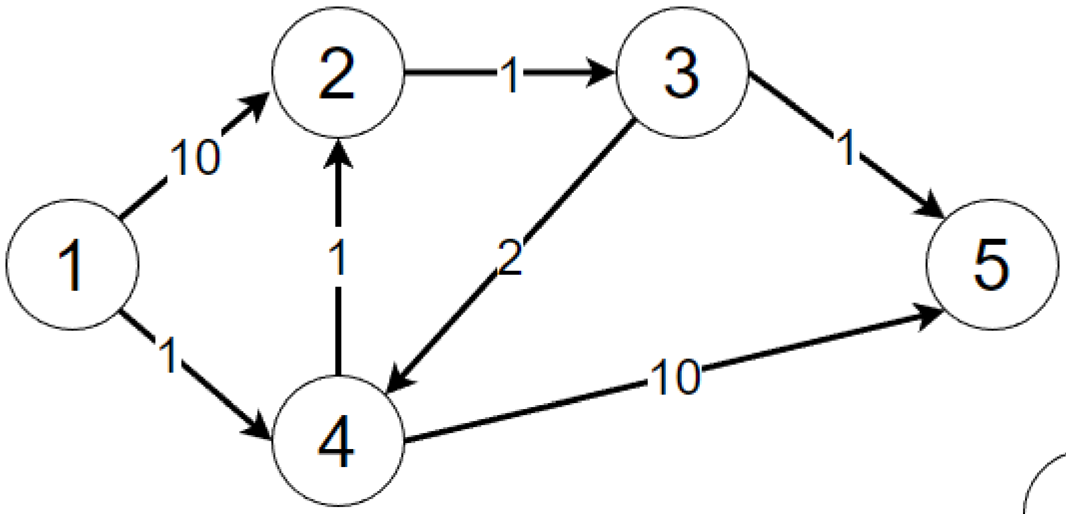
Наивная реализация: на каждой итерации ($(n-1)$ итераций) перебираем все дуги и для каждой проверяем условие `(u,v):` $u \in V', v \notin V'$ и выбираем оптимальную дугу. Сложность: $O(nm)$.

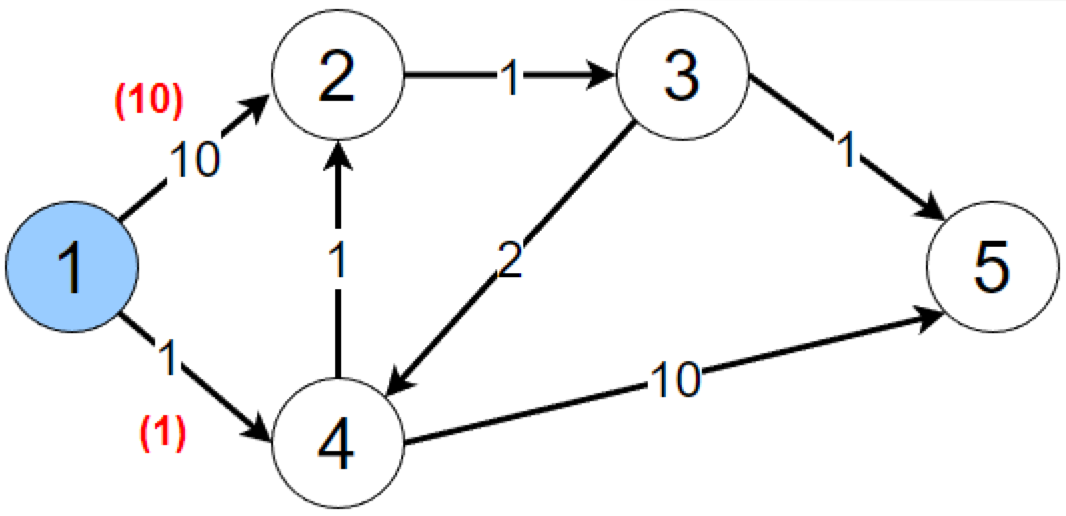
Оптимальная реализация: дуги хранить в очереди с приоритетами.

Сложность: $O((n+m)\log n)$.

Алгоритм Дейкстры

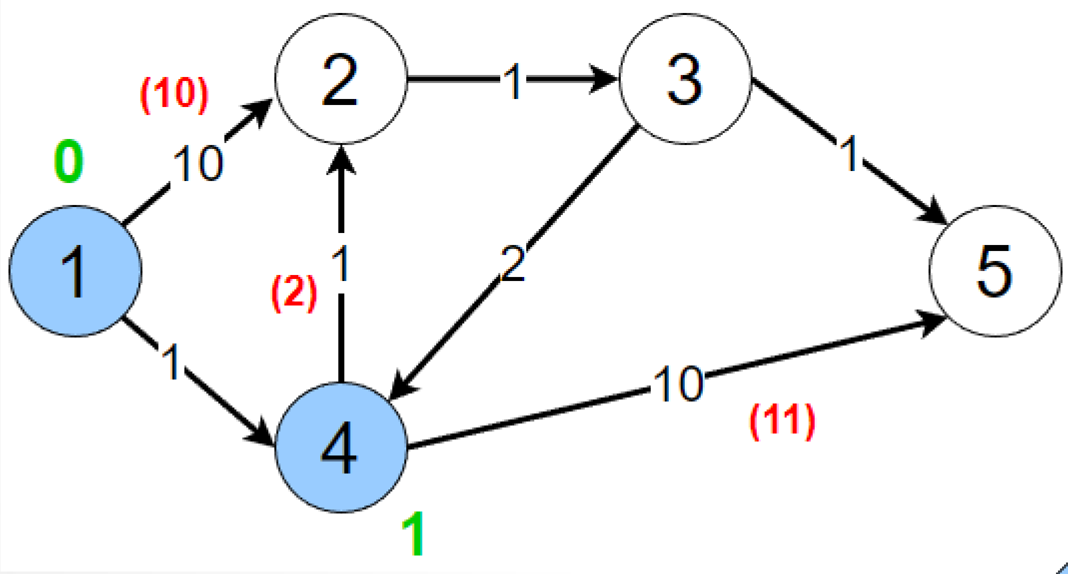
Посмотрим, как алгоритм Дейкстры обрабатывает граф с контуром.

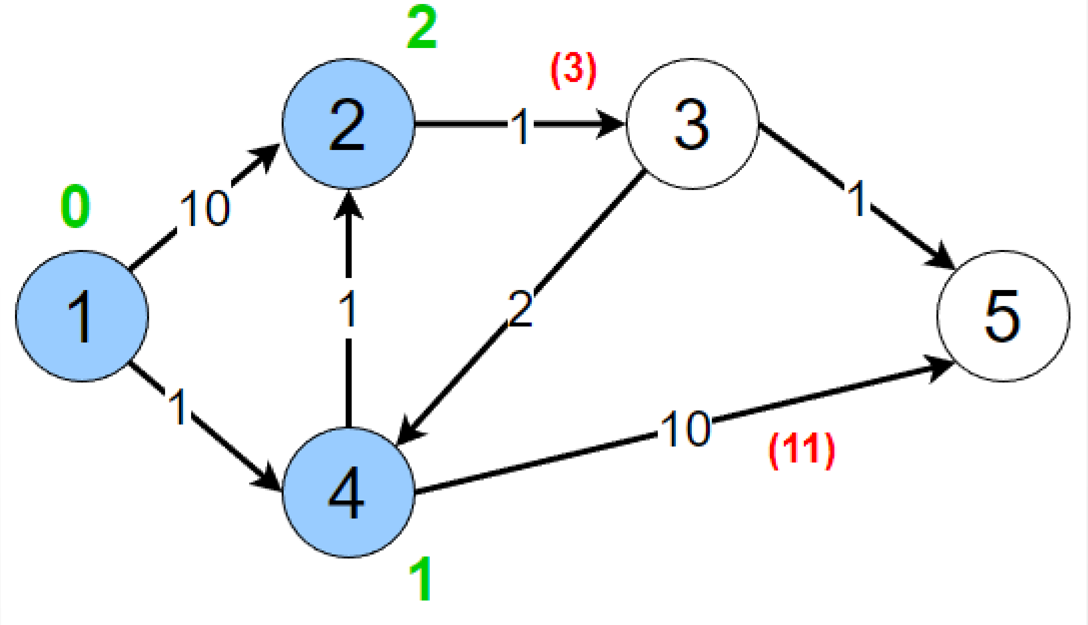




Алгоритм Дейкстры

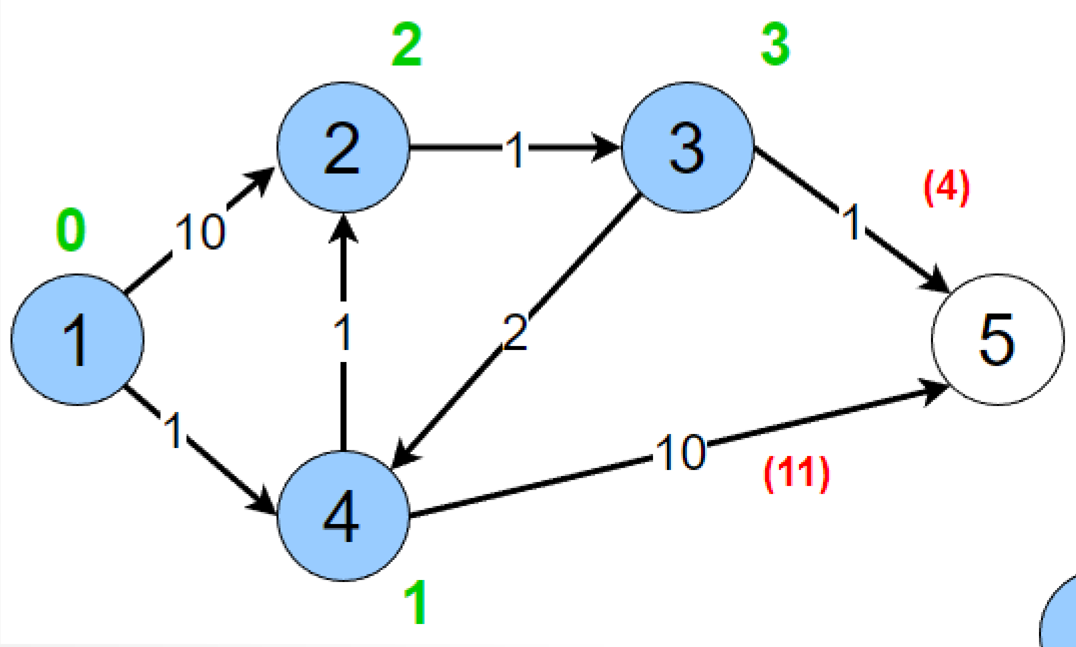
Посмотрим, как алгоритм Дейкстры обрабатывает граф с контуром.

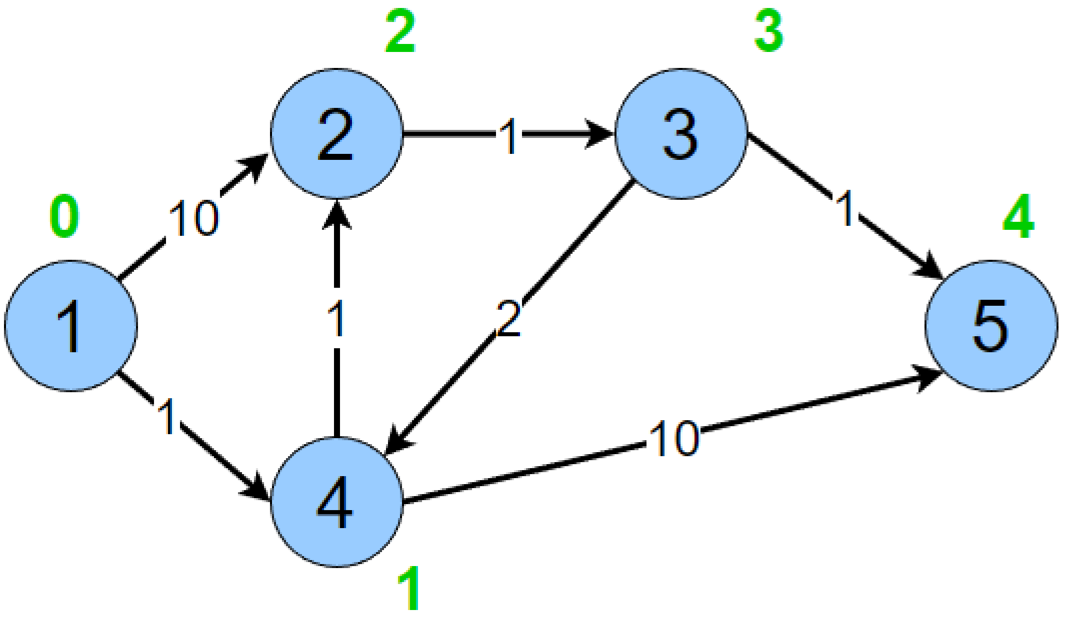




Алгоритм Дейкстры

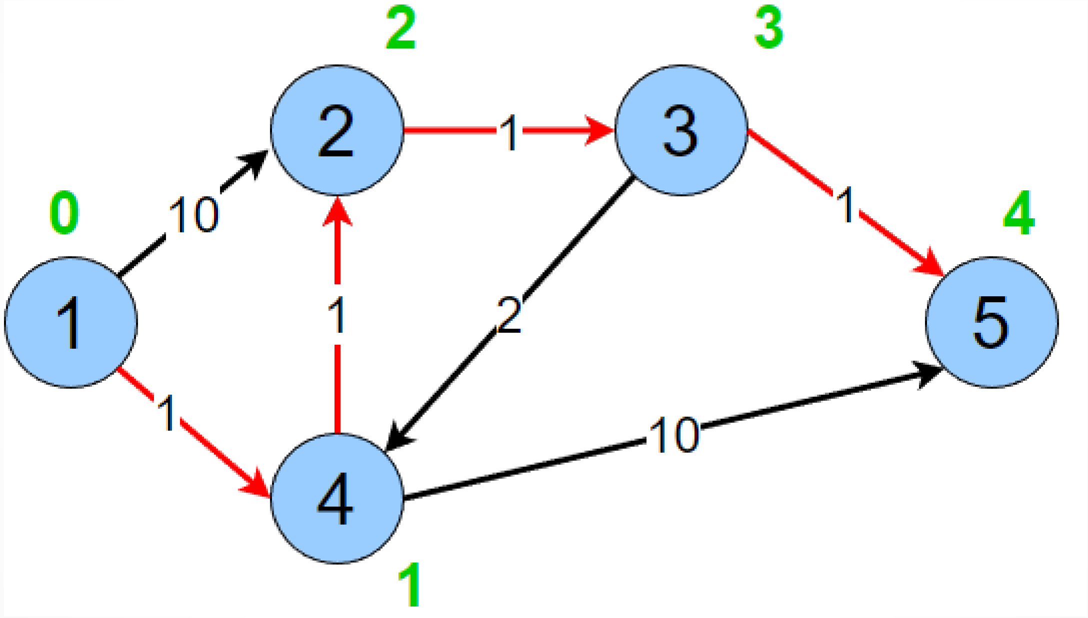
Посмотрим, как алгоритм Дейкстры обрабатывает граф с контуром.





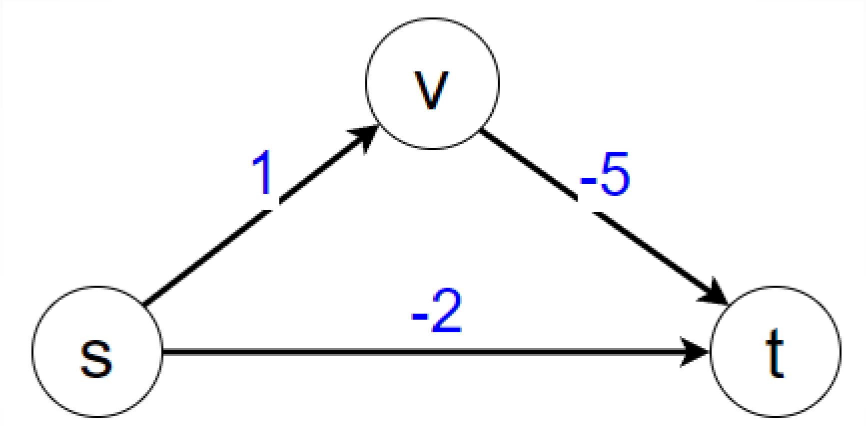
Алгоритм Дейкстры

Посмотрим, как алгоритм Дейкстры обрабатывает граф с контуром.



Алгоритм Дейкстры

Как алгоритм Дейкстры работает с графами при наличии отрицательных весов дуг?



Инициализация: $V' = \{s\}, d[s] = 0$

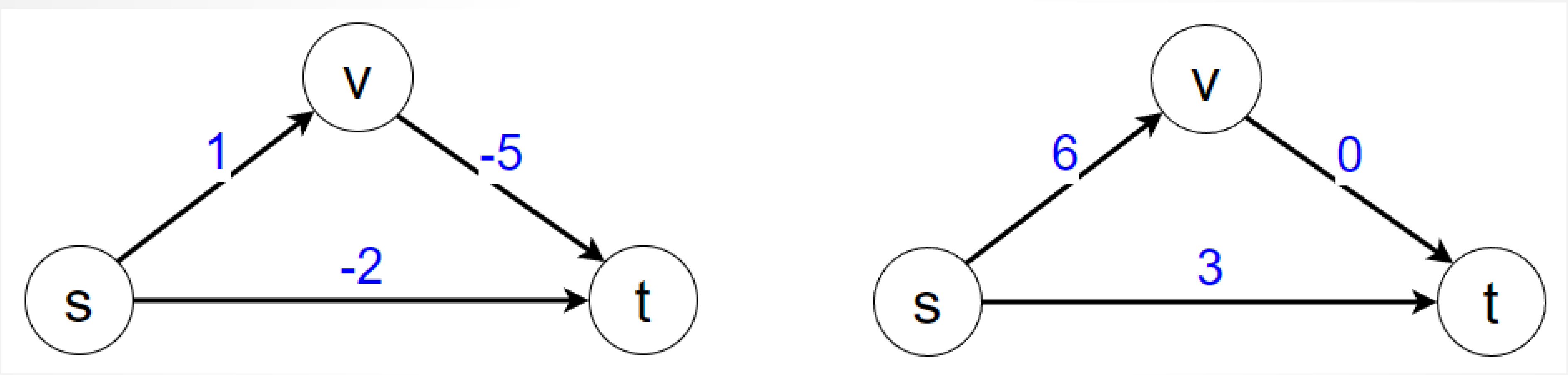
Итерация 1: $V' = \{s, t\}, d[t] = -2.$

Итерация 2: $V' = \{s, t, v\}, d[t] = -2,\ d[v] = 1.$

Правильное значение: $d[t] = -4.$

Задачи о кратчайшем пути

Можно ли заменить веса, чтобы они стали неотрицательными?



На изменённом графе оптимальный путь из s в t: $s \to t$.

На исходном графе оптимальный путь из s в t: $s \to v \to t$.

Вывод: для случай отрицательных весов нужно разрабатывать другой алгоритм ☹

Задачи о кратчайшем пути

Итак, рассмотрим общий вариант задачи: граф $G(V, E)$, $w: E \to R$.

То есть, допускаются отрицательные веса дуг.

Но тогда возникает проблема с *контурами* отрицательного веса.

Каков вес кратчайшего пути из s в v?

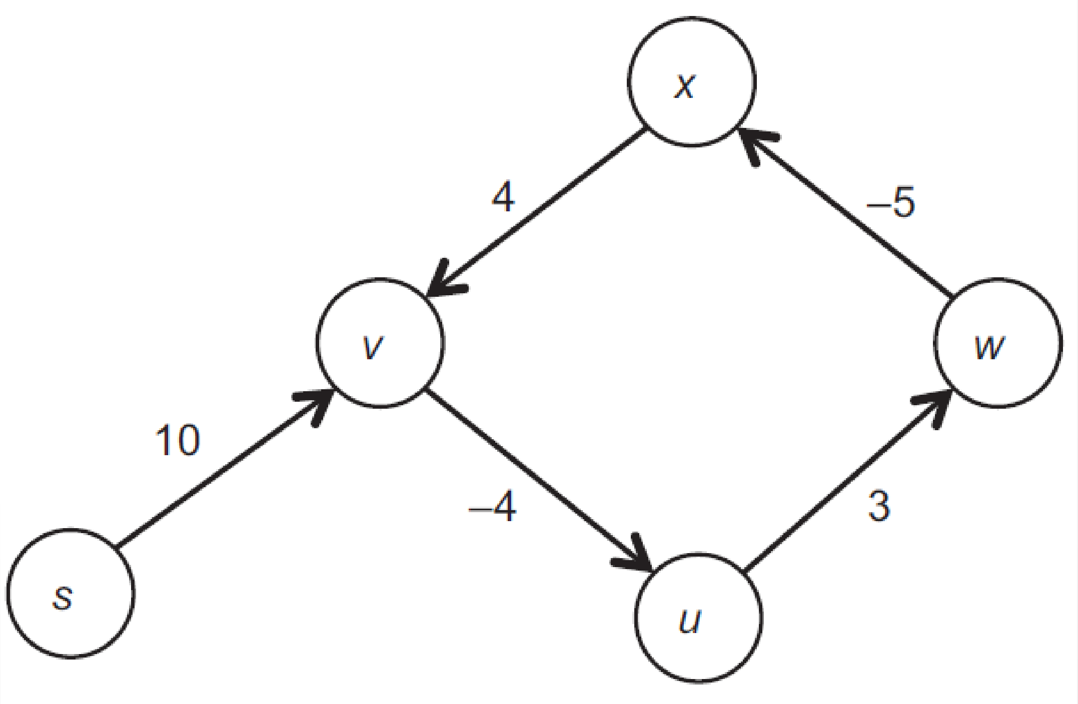
a) 10

b) 8

c) 6

d) 4

e) ?



Задачи о кратчайшем пути

Возможный вариант: искать только пути, не содержащие контуров.

К сожалению, такая постановка задачи является NP-трудной (к ней можно свести незамкнутую ориентированную задачу коммивояжёра).

Поэтому поставим себе задачу в таком виде: для заданного графа $G(V, E)$, $w: E \to R$, с отрицательными весами дуг, и выбранной вершины $s \in V$ выдать один из ответов:

a) «В графе есть контур отрицательного веса» (достижимый из s).

b) Если контуров отрицательного веса нет, то построить кратчайшие пути из s во все вершины графа.

Эту задачу эффективно решает **алгоритм Беллмана-Форда**.