nvkurbatova@sfedu.ru

Пакеты научных вычислений

Лекция 6. Элементы дифференциального и интегрального исчислений

Курбатова Наталья Викторовна, к.ф.-м.н.,
доцент кафедры математического моделирования, мехмат, ЮФУ

nvkurbatova@sfedu.ru

Содержание:

1) **Интерполирование**
2) **Дифференцирование**
   a) Аналитическое дифференцирование
   b) Численное дифференцирование
   c) Ряды Тэйлора, Фурье
   d) Решение прикладных задач (маятник?)
3) **Интегрирование:**
   a) Аналитическое интегрирование
   b) Численное интегрирование. Методы Трапеций, Ньютона и т.д.
   c) Решение прикладных задач. Вычисление площадей под кривой, пересекающихся кривых
4) **Специальные операторы**

Интерполяция функций - interp1

1-D interpolation:

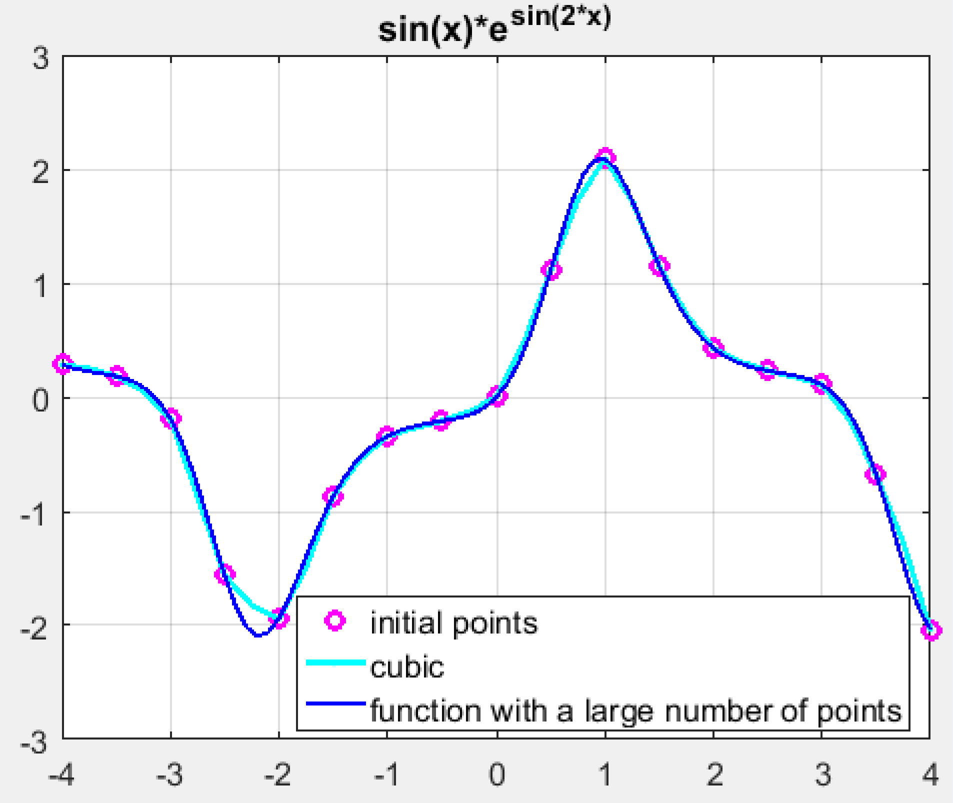
```
clear;  figure
x=-4:0.5:4;   y=sin(x).*exp(sin(2*x))
xc=-4:0.25:4; yc=interp1(x,y,xc,'cubic')
plot(x,y,'mo',xc,yc,'c.-','linewidth',2)
grid on,  hold on
```

A function with a large number of points:

```
x=-4:0.1:4; y=sin(x).*exp(sin(2*x))
plot(x,y,'b-','linewidth',1.5)
```

Design:

```
leg=legend('initial points','cubic',...
'function with a large number of points')
set(leg,'fontsize',12); set(gca,'fontsize',12)
title('sin(x)*e^{sin(2*x)}')
```

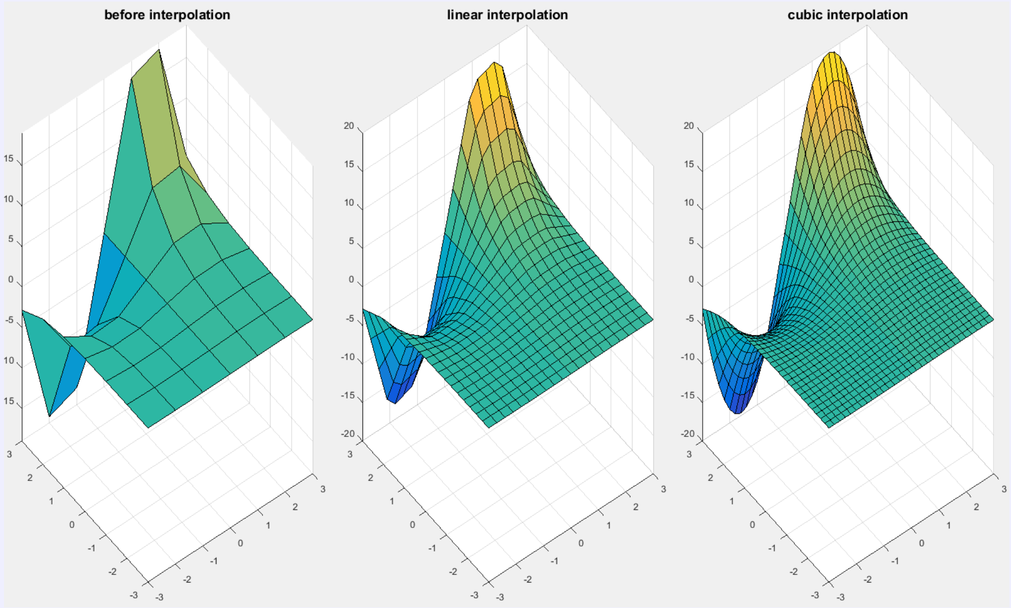


Интерполяция поверхностей – interp2

2-D interpolation:

```
[x,y]=deal(-3:1:3);  [X,Y]=meshgrid(x,y)
Z=sin(X).*exp(Y)
            subplot(1,3,1)
            sz=surf(X,Y,Z)
xlim([-3 3]), ylim([-3 3]),
zlim([floor(min(min(Z))),ceil(max(max(Z)))])
 title('before interpolation', 'fontsize',14)
            subplot(1,3,2)
            [Xl,Yl] = meshgrid(-3:0.3:3);
            Vl = interp2(X,Y,Z,Xl,Yl,'linear');
            sl=surf(Xl,Yl,Vl)
 title('linear interpolation', 'fontsize',14)
           subplot(1,3,3)
           [Xc,Yc] = meshgrid(-3:0.2:3);
            Vc = interp2(X,Y,Z,Xc,Yc,'cubic');
            sc=surf(Xc,Yc,Vc)
title('cubic interpolation', 'fontsize',14)
```

before **linear** **cubic**



Zc=interp2(X,Y,Z,Xc,Yc, 'method')

X,Y- исходная сетка; Z – 2D функция на сетке
Xc,Yc - густая сетка для интерполяции Zc;
method = {'linear', 'spline', 'cubic'}

nvkurbatova@sfedu.ru

Численное дифференцирование, diff(f)/h

Пусть задана функция $y=f(x)$, $f(x_i)$ – её значения в точках $\boldsymbol{x}=\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $x_{i+1}=x_i+h$, h – постоянный шаг;
тогда в нотации MatLab **diff(f)** – приращение функции, заданной численно, поточечно.

y – вектор, который получен на основе определения первой производной

$f'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ и численного её аналога

$\boldsymbol{y}=\left\{\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}\right\}_{i=1}^{n}$, при малом h;

В обозначениях MatLab: *length(x)= length(f)= n;*

y=diff(f)/h, Какая длина
g=diff(y)/h, векторов
p=diff(g)/h y, g, p?

nvkurbatova@sfedu.ru

Приращение diff(Y), случай Y - матрица

Если **[m,n]=size(Y), то size(diff(Y))** равно **[m-1,n]**,
т. е. операция выполняется вдоль строк, по колонкам!

Замечание.

Расположив в каждой колонке значения функций, f.e., $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, *получим матрицу*

Y=[f(x_i), g(x_i), p(x_i)]; X=[x_1; x_2; … ; x_n], *которая позволяет приращения функций вычислить одномоментно:*

diff(Y)

Производная высокого порядка

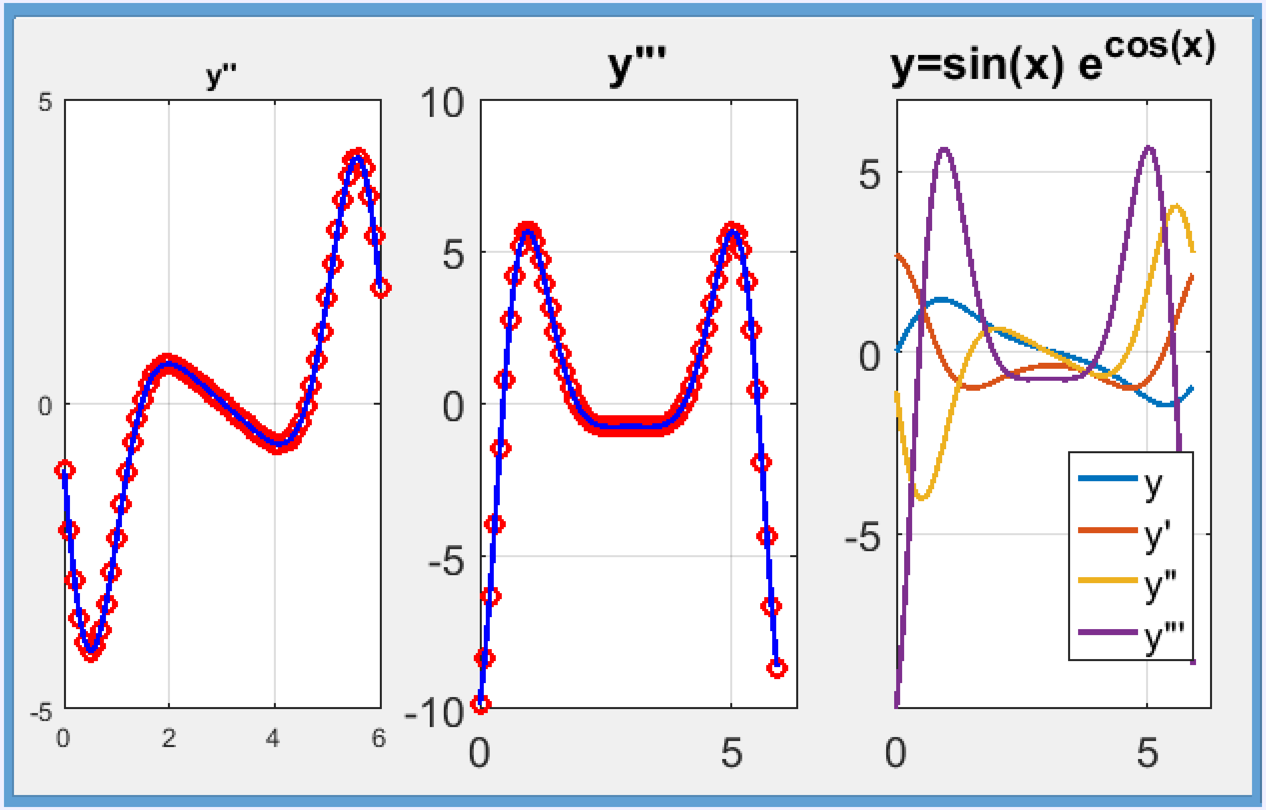
diff(Y,n) – *приращение порядка n, dim>n определяется численно вдоль первой неединичной размерности; здесь первая неединичная размерность имеет длину dim.*

- Если dim<n, то выбирается следующая размерность (dim_{new}>n) и уже вдоль неё «работает» diff.
- Если n > dim_{new}, то массив истощится раньше, чем вычислится n-е приращение, поэтому на выходе будет пустой массив.

Проверьте случай dim<n!

result= diff(Y,n), isempty(result)

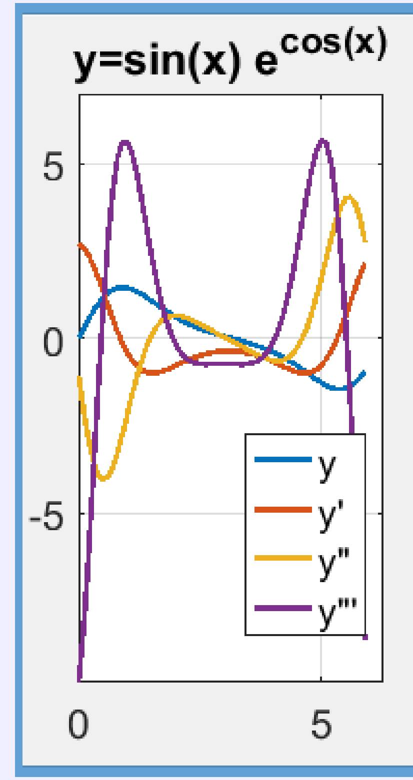
Численное дифференцирования в картинках



- ➢Объясните, каким образом получены изменения в оформлении содержимого окон, а также осей?
- ➢Как построить все графики одновременно, окно 3?
- ➢Какой относительный размер векторов y, y’,y’’,y’’’ и какой следует выбрать при одновременном построении y, y’,y’’,y’’’ ? Пусть вектор x длины n.

Пример численного дифференцирования

```
1)   x=0:0.1:2*pi; n=length(x); h=0.1;
2)   f=sin(x).*exp(cos(x))
3)   fprime=diff(f,1)/h; fprime2=diff(f,2)/h^2;
4)   fprime3=diff(f,3)/h^3;
5)   subplot(1,3,3)
6)   xnew=x(end-3:-1:1)'  % строка или колонка?
7)   fNew=f(end-3:-1:1)' % объясните индексацию!
8)   fprimeNew=fprime(end-2:-1:1)'
9)   fprime2New=fprime2(end-1:-1:1)'  % почему так?
10)  fprime3New=fprime3(end:-1:1)'
11)  YY=[fNew,fprimeNew,fprime2New,fprime3New]
12)  pl=plot(xnew,YY)
13)  set(pl,'linewidth',2)
14)  set(gca,'fontsize',16,'xlim',[0, 2*pi],...
     'ylim',[min(min(YY)), 7])
15)  leg=legend('y','y''','y''''','y''''''')
16)  set(leg,'fontsize',14,'location','best')
17)  title('y=sin(x) e^{cos(x)}'), grid on
```



Объясните стр. 12 и plot(YY)!
Чтобы задать ' в CHAR, нужно …?

Аналитическое дифференцирование

- Аналитическое дифференцирование выполняется в классе **SYMBOL**
- Все переменные декларируются, f.e.

  syms var1 var2 var3;
- При декларировании переменные отделяются пробелами (не запятыми)!
- Функция конструируется в соответствии с синтаксисом **MatLab** (внешняя, подфункция, аноним)
- Функция может быть задана по аналогии с Maple.

Maple:

Namefunction(args)= expression(args)

syms x y, z; % Чему равно r
f=cos(x)*y^2*exp(z), r=diff(f,z,2)

Класс SYMBOL. Пример дифференцирования

nvkurbatova@sfedu.ru

clear; syms x y

I. f задана по правилам Maple:

%f=sin(x)*y*exp(cos(x))

G=diff(f,x,3)

fn=subs(G,y,2) % аналог subs Maple

figure

% **указан диапазон аргумента**:

fplot(fn, **[0,2*pi]**)

lg=legend('f'''''''); set(lg,'fontsize',14)

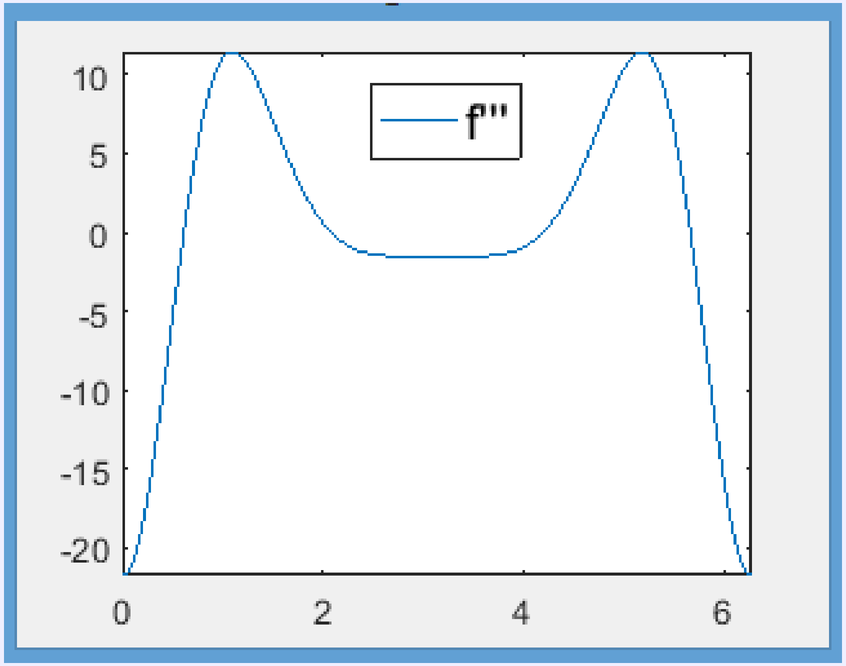
II. Или f задана как подфункция:

function g=f(x,y)

syms x y

g=sin(x)*y*exp(cos(x))

end



Синтаксис:

NewFunc=diff(Func,Args,order)

Func – символьная фукция

Args – переменная дифференцирования

order – порядок дифференцирования

Разложение в ряд. TAYLOR

nvkurbatova@sfedu.ru

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x)$$

- В 1715 г. опять получена **Бруком Тейлором (уже!!!** использовали ещё в XIV веке в Индии, а также в XVII веке в т.ч. Ньютон.
- В период (1698 — 1746) **Колин Маклорен** — шотландский математик применил и популяризировал случай x_0=0.
- Джозеф Луи Лагранж — французский математик (1736 –1813) предложил представление остаточного члена.

Зачем нам разложение в ряд?

В MatLab по умолчанию реализовано разложение функции в ряд Маклорена (x_0=0), при задании x_0=*a* – в ряд Тейлора

Синтаксис функции taylor в MatLab

nvkurbatova@sfedu.ru

taylor(fun,var,Name,Value)

fun = symbolic function | symbolic expression

var= (default) если вами не задана переменная, система сама найдет первую из них symvar(fun,1) и разложит по ней в точке, иначе задаём явно

Name может иметь три имени спецификаторов:

1) 'ExpansionPoint' (точка разложения) = 0 (default) | number | symbolic number | symbolic variable | symbolic function | symbolic expression
2) 'Order' = 6 (default) | positive integer | symbolic positive integer
3) 'OrderMode' = 'absolute' (default) | 'relative' for polynomial approximation

Value в соответствии с необходимостью и вариантами значений, описанными в 1)-3)

Все функции ML в классе Symbolic находим (в студ.версии на сайте mathworks нет, увы) >>methods(sym)

Функция taylor в MatLab

nvkurbatova@sfedu.ru

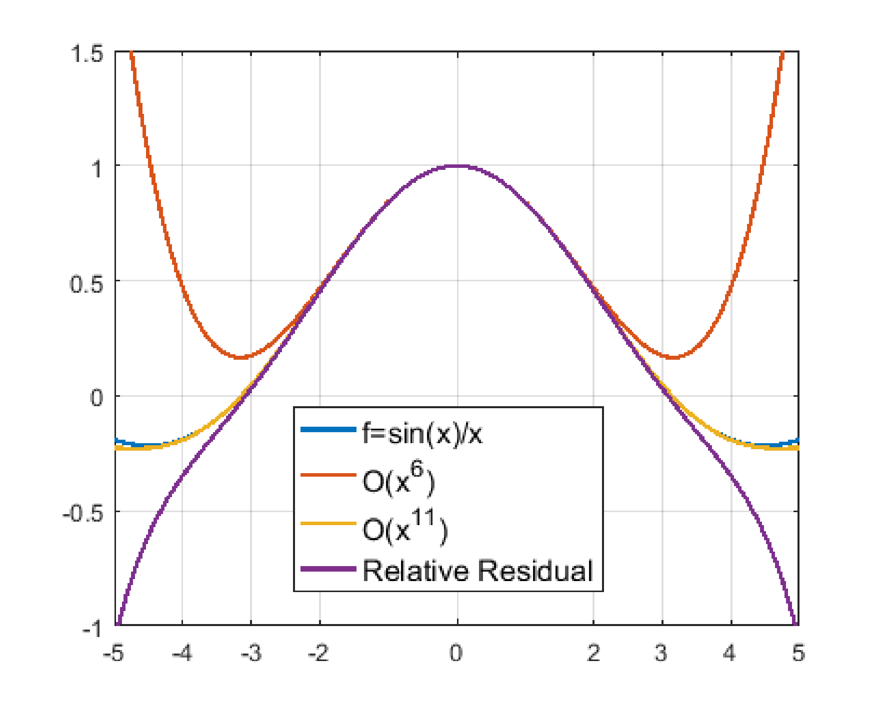
Пример стратегии для выбора Value

1) clear; syms x
2) f = sin(x)/x;
3) t6 = taylor(f, x), t11 = taylor(f, x,'Order', 11),
4) tr=taylor(f, x, 'OrderMode', 'relative','order',7)
5) group=fplot([f t6 t9 tr],'Linewidth',1.7)
6) xlim([-5 5]), ylim([-1 1.5]),
7) set(gca,'xtick',[-5 -4 -3 -2 0 2 3 4 5])
8) lg=legend('f=sin(x)/x','O(x^6)',… 'O(x^{11})','RelativeSpec')
9) set(lg,'fontsize',12), grid on

В чём, собственно, стратегия?

Анализироем код и графики!

Можем ли использовать для интегрирования при предварительном разложении?



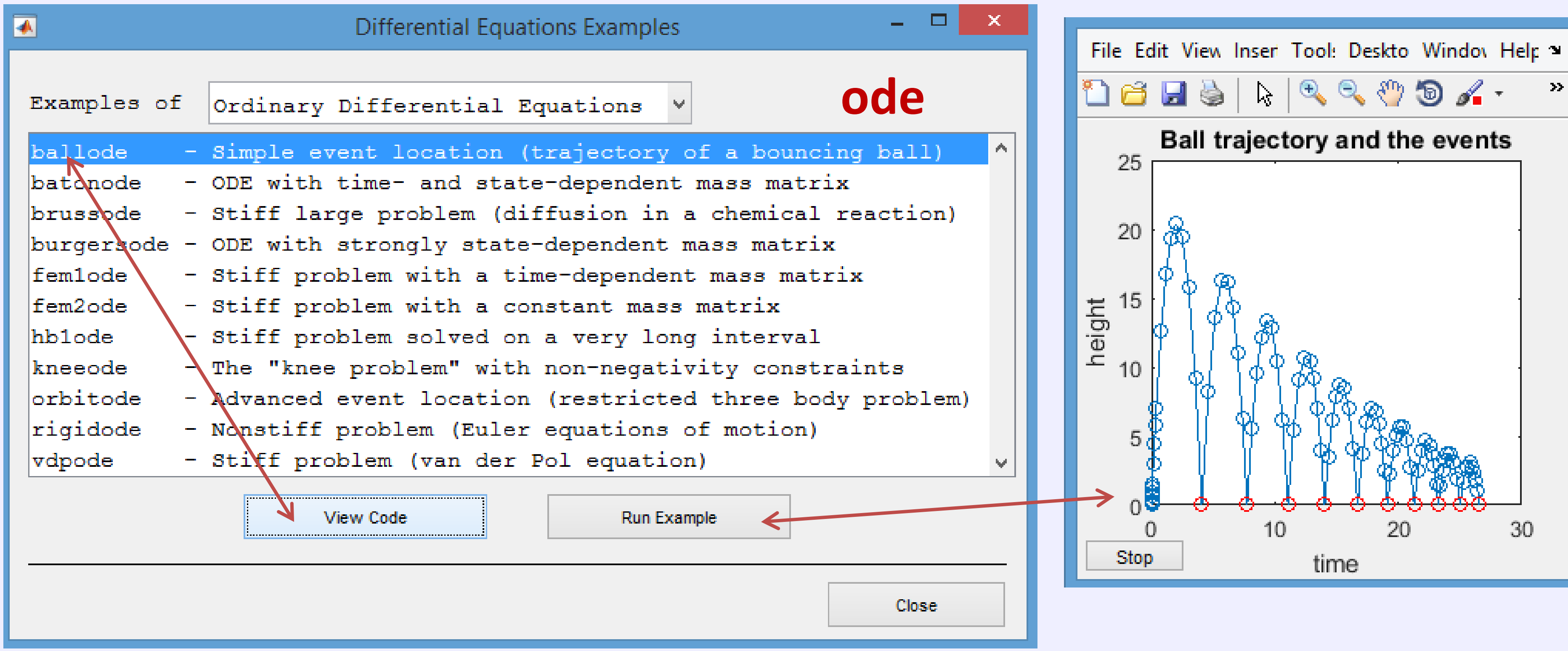
nvkurbatova@sfedu.ru

Полезный в будущем ресурс ML **(SHOW!!!)**

>>odeexamples(createSECTION)

SECTION = 'ode'|'dae'|'ide'|'dde'|'bvp'|'pde'

>>odeexamples('createode')   %в MatLab2024 так; и выбираем в **Examples** нужную тему



nvkurbatova@sfedu.ru

Назначение секций тематических групп в ресурсе **odeexamples**

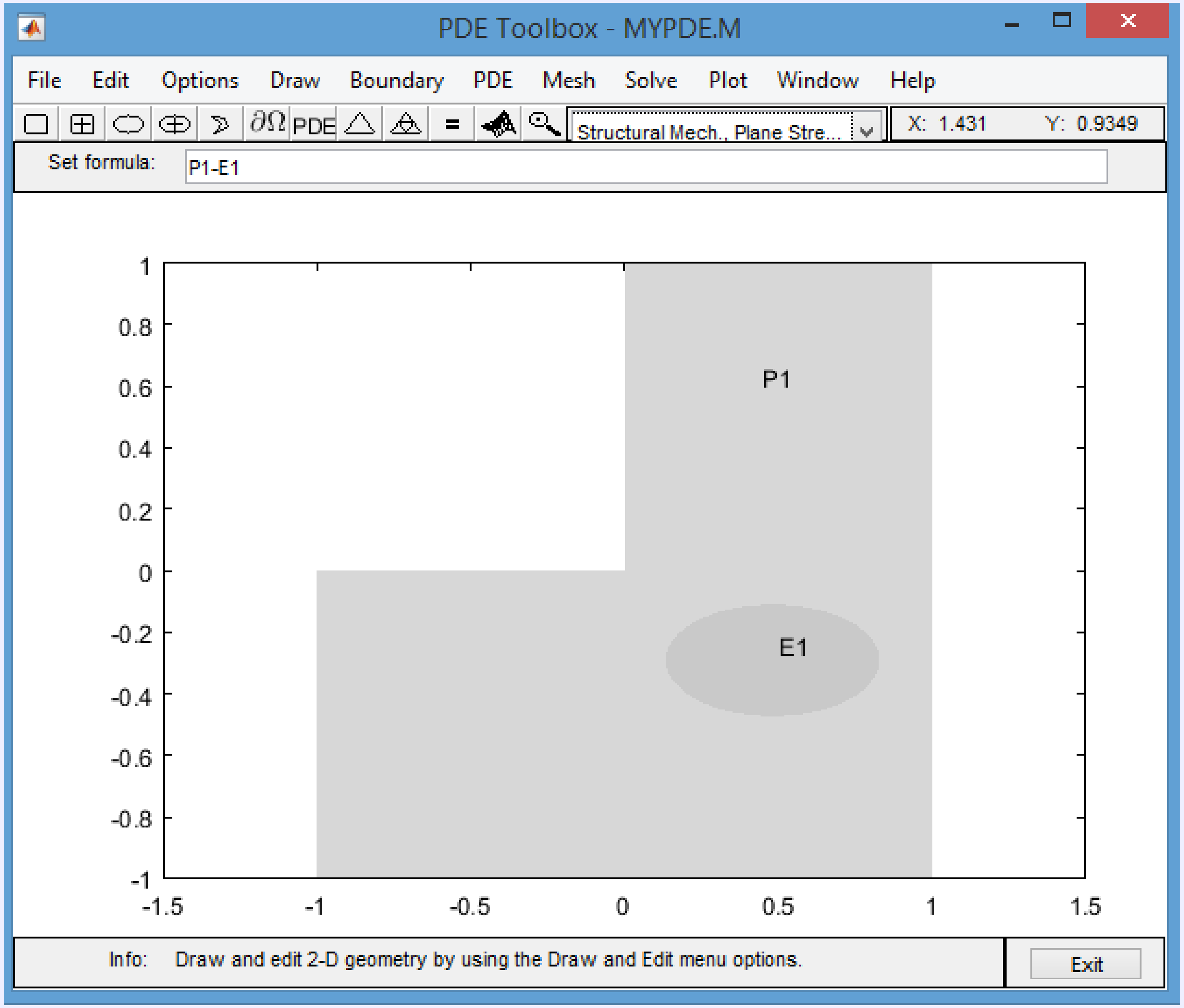
- 'dae' - дифференциальные алгебраические уравнения
- 'ide' - неявные методы решения ду
- 'dde' - дифференциальные уравнения с задержкой по времени
- 'bvp' - ду при заданных граничных условиях
- 'pde' – ду в частных произвлдных

nvkurbatova@sfedu.ru

>> pdetool

PDE of 2order:

•Выбираем область применения
•Строим ур-е в ч.п., задавая параметры
•Создаем геометрию
•Граничные условия
•Триангулируем
•Улучшаем триангуляцию по надобности
•Решаем
•Визуализируем результат



Класс SYMBOL Интегрирование

nvkurbatova@sfedu.ru

Func задана задана как подфункция

```
arg=symvar(func); res=int(func)
res2=int(int(func,arg(1)),arg(3))
resDef=
 …int(int(func,arg(1),0,pi),arg(3),1,2)
```

function f=func

```
syms x y z
f=exp(y)*sin(x)/z
end
```

Func – по правилам Maple

```
f=exp(y)*sin(x)/z
arg=symvar(f)
res=int(f)
res2=int(int(f,arg(1)),arg(3))
resDef=int(int(f,arg(1),0,pi),arg(3),1,2)
```

Синтаксис:

Res=int(Func,Args)

Res=int(Func,Args,a,b)

Args=symvar(f)

Func – символьная фукция

Args – переменная интегрирования

a,b – пределы интегррования

Замечание:

Если не задана переменная интегрирования, то интегрирование только по первой переменной Res=int(Func)

Численное интегрирование в MatLab

Синтаксис:

Z = trapz(X,Y,DIM) -

метод **трапеций**

X – значение аргументов (вектор)

Y – матрица или вектор значений

DIM – индикатор (1 ∨ 2) **что значит?**

Q = quad(FUN,a,b,tol,trace) –

метод **Симпсона**

FUN – внешняя функция, аноним – *строим по правилам векторных операций!*

a,b – **знаете, что?**

trace –

Точность (tol) метода Симпсона в ML

default: 1.e-6

Универсальная функция :

Res=integral(Func,Args)

Res=int(Func,Args,a,b) % may be old

Res=integral2(Func,Args,lims)

Res=integral3(Func,Args,lims)

Args=symvar(Func) % можно так

Func – символьная фукция ∨

Args – переменная интегрирования

a,b ∨ lims – пределы интегрования

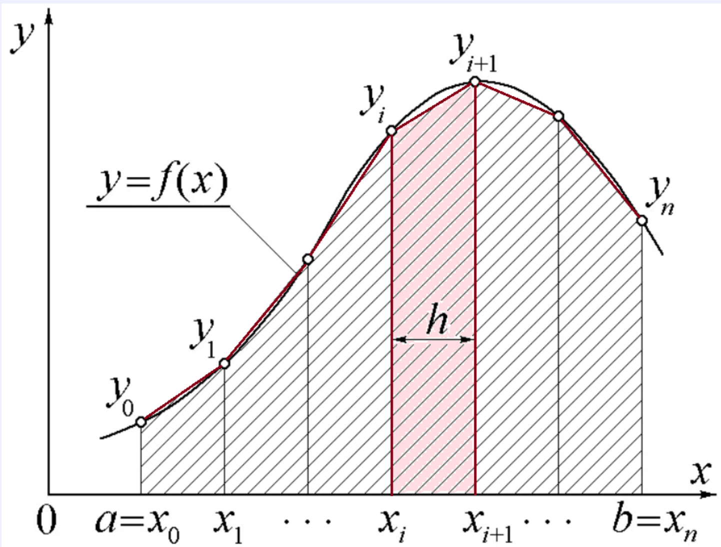
Замечание:

Если не задана переменная интегрирования, то интегрирование - по первой (в смысле кода ASCII) **переменной**

Res=integral(Func)

Формулы трапеций и Симпсона

Формула трапеций



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}\sum_{n=1}^{N}\left(f(x_n)+f(x_{n+1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{2N}\left[f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_N)+f(x_{N+1})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

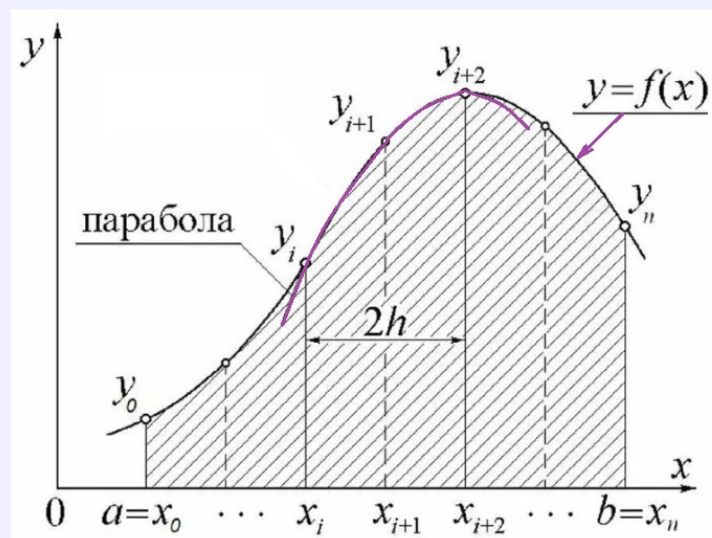
Формула Симпсона

$$I \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

если $2N$ равных частей на $[a,b]$:

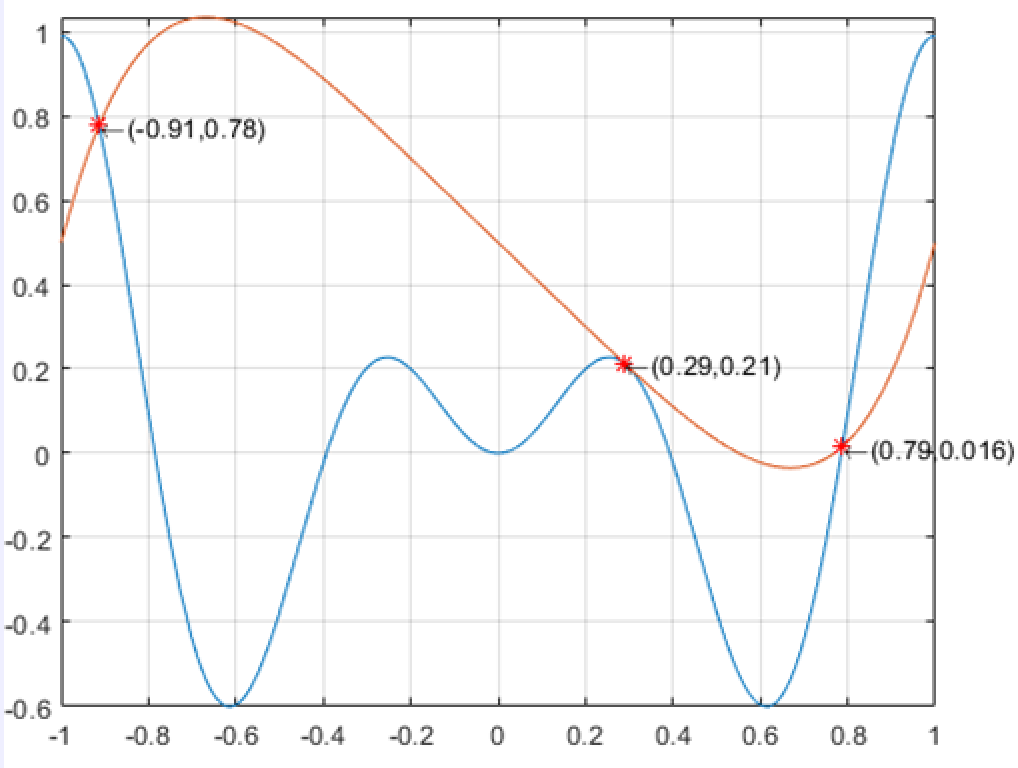
$$I \approx \frac{b-a}{6N}\left(f_0+4\left(f_1+f_3+\ldots+f_{2N-1}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.2\left(f_2+f_4+\ldots+f_{2N-2}\right)+f_{2N}\right),$$

$$f_i = f\left(a+\frac{(b-a)i}{2N}\right).$$



Приложение. Вычислить площадь, заключенную между кривыми

nvkurbatova@sfedu.ru



Подумайте об алгоритме решения!

Подумали?

И и и и?

Пример.

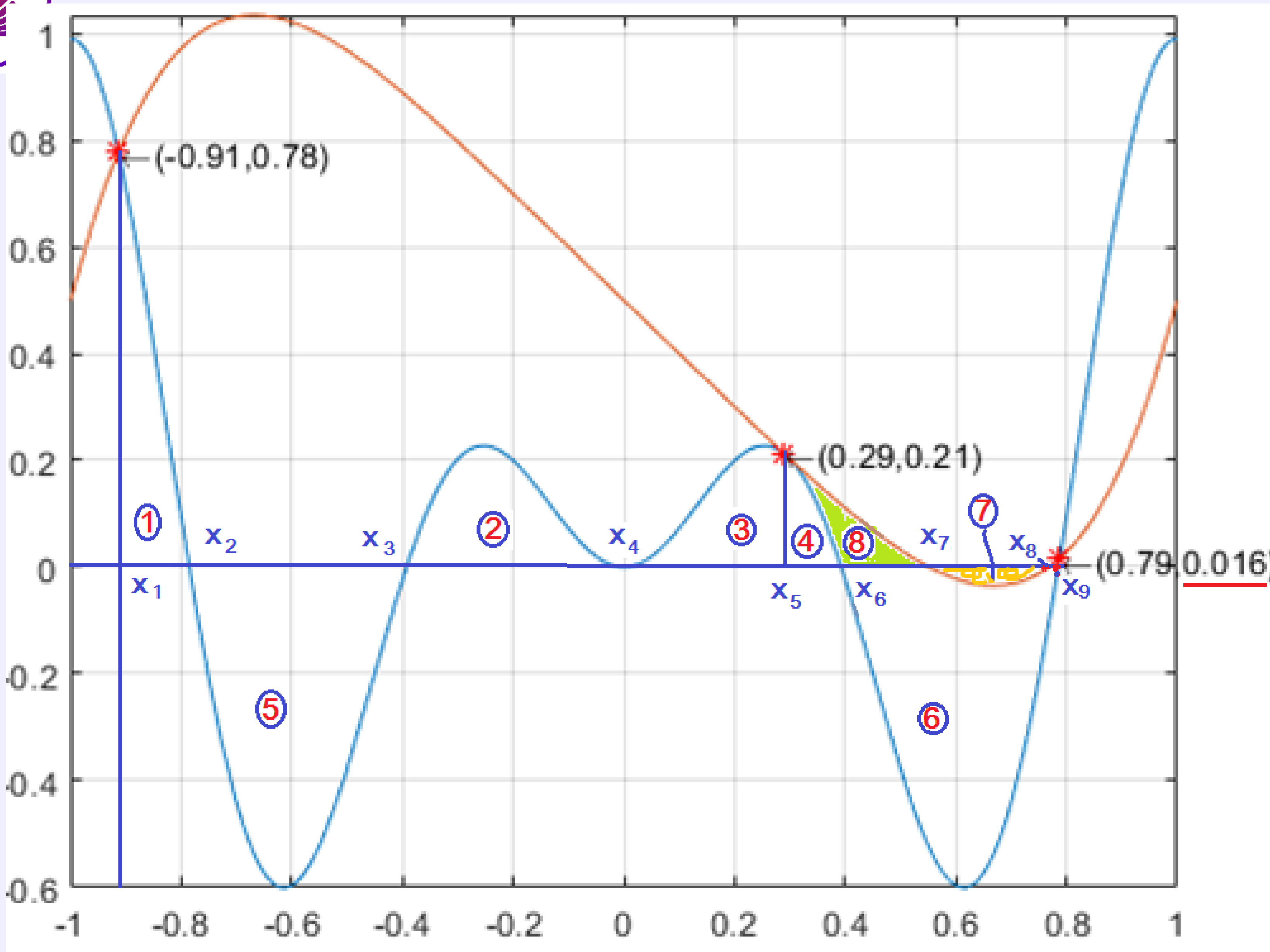
```
Clear, figure
%% строим графики
fplot('x*sin(8*x)',[-1 1]),hold on,
fplot('(x^5-x+0.5)',[-1 1]),grid on;
%% решаем, добавляем точки пересечения
x0=[-0.8,0.65;-0.2,0; 0.6,0]% нулевые приближения
        for i=1:length(x0')
                [x{i},Fx]=fsolve(@F,x0(i,:))
                plot(x{i}(1),x{i}(2),'r*')
                xy=['(',num2str(x{i}(1),2),',',...
                        ,num2str(x{i}(2),2),')']
    text(x{i}(1),x{i}(2),['\leftarrow' xy])
        end % for
function f=F(x)   %% подфункция в этом же файле
f(1)=x(2)-x(1)*sin(8*x(1))
f(2)=x(2)-(x(1)^5-x(1)+0.5)
end
```

Является ли точка (0.29,0.21) **точкой касания?**

Почему это важно?

С чего начнём решение задачи?

Обсуждаем стратегию



nvkurbatova@sfedu.ru

Спасибо за внимание!

«Чем сосуд наполнен, то из него и льётся!»

Русская народная пословица

А почему вдруг русские пословицы?