Некоторые из них перечислены в списке литературы.

Параграфы 1–6 настоящего пособия посвящены применению некоторых вычислительных и графических средств системы MAPLE для нахождения экстремумов функций одной и двух переменных. В параграфе 7 приведены задания для самостоятельного решения.

1. Функции одной переменной

Важным вопросом в исследовании функций является нахождение их максимумов и минимумов. Для гладких функций основным инструментом аналитического нахождения экстремумов является теорема Ферма.

Теорема (Ферма; необходимое условие экстремума первого порядка). *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке x_0 имеет локальный экстремум. Если в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Если в точке x_0 производная функции f равна нулю, точку называют критической или стационарной.

Для дважды дифференцируемых функций можно применить теорему о необходимых и достаточных условиях экстремума второго порядка.

Теорема (условия экстремума второго порядка). *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является дифференцируемой в окрестности точки x_0 и пусть существует $f(x_0)$.*

1. Если в точке x_0 функция f имеет локальный минимум, то $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \geq 0$. Если в точке x_0 она имеет локальный максимум, то $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \leq 0$.

2. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то функция f имеет в точке x_0 локальный минимум. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то функция f имеет в точке x_0 локальный максимум.

Рассмотрим пример нахождения экстремумов функции с использованием системы MAPLE. Объектом исследования будет функция $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$. Задача ставится следующим образом: найти точки экстремума функции $f(x)$ и ее экстремальные значения.

Зададим нашу функцию:

```
> restart;
> f:=1/4*x^4-2/3*x^3-3/2*x^2+2;
```

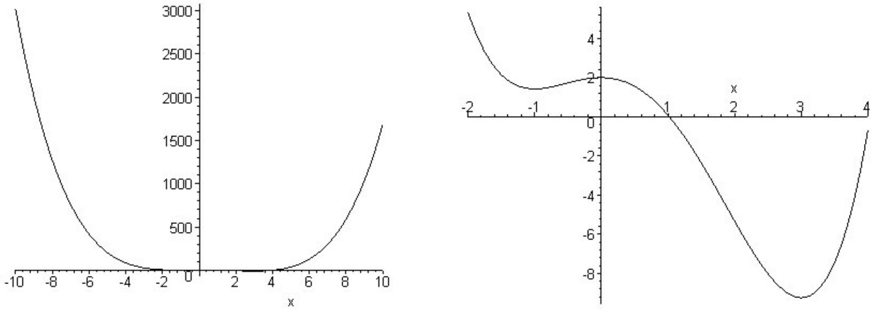

Рис. 1. Графики функции $f(x)$ на отрезках $[-10, 10]$ и $[-2, 4]$

и нарисуем ее график. Вначале нарисуем график функции на каком-нибудь промежутке, используя команду `plot`:

```
> plot(f,x=-10..10);
```

Получим график, изображенный на рис. 1 слева. Рассмотрим более подробно «подозрительный» промежуток:

```
> plot(f,x=-2..4);
```

Получим график, изображенный на рис. 1 справа.

Мы видим, что на данном промежутке функция имеет два локальных минимума и один локальный максимум. Из вида нашей функции ($f(x)$ – полином 4-й степени) следует, что других экстремумов у нее нет. Далее можно было бы локализовать каждый из них и найти его приближенно с помощью такого «визуального» метода.

Прежде чем локализовать критические точки, можно нарисовать график функции *на всей оси*:

```
> plot(f,x=-infinity..infinity);
```

По этой команде MAPLE попытается изобразить качественный вид графика функции. Это иногда может помочь определить, сколько экстремумов имеет данная функция[1].

[1] При этом масштабы по осям выбираются нестандартно: попробуйте, например, нарисовать график функции $\sin x$ на всей оси.

Давайте теперь применим аналитические методы для нахождения экстремумов нашей функции. Вначале воспользуемся теоремой Ферма. Для этого найдем производную функции $f(x)$ с помощью команды `diff`:

```
> df:=diff(f,x);
```

Получим

$$df := x^3 - 2x^2 - 3x.$$

Теперь найдем корни производной, то есть решим уравнение $f'(x) = 0$. Применим команду `solve`:

```
> solve(df=0);
```

Можно объединить эти два действия в одно:

```
> solve(diff(f,x)=0);
```

Получаем три корня: $0, 3, -1$. Это критические точки функции $f(x)$. Мы уже знаем (из вида графика), что -1 и 3 – это локальные минимумы, а 0 – это локальный максимум. Теперь, чтобы найти экстремальные значения функции, нужно критические точки по очереди подставить в функцию:

```
> x:=0: print('x'=x, 'f'=f);
> x:=3: print('x'=x, 'f'=f);
> x:=-1: print('x'=x, 'f'=f);
```

Обратите внимание на то, что после присвоения значений переменной x стоит двоеточие вместо точки с запятой. Это позволяет не выводить на печать промежуточные результаты. В данном случае выводом на печать управляет команда `print`. Конечно, это сделано только для удобства. Те же результаты, но в несколько менее удобной форме мы получим, выполняя такие команды:

```
> x:=0; f;
> x:=3; f;
> x:=-1; f;
```

Итак, имеем критические точки и соответствующие значения функции:

$$x = 0,\ f = 2,$$
$$x = 3,\ f = -\frac{37}{4},$$
$$x = -1,\ f = \frac{17}{12}.$$

Проверим условия экстремума второго порядка. Для нахождения второй производной используем команду `diff(f,x$2)`, в которой символ `$2` означает, что ищется производная второго порядка. Найдем знак второй производной (с помощью команды `sign`) в каждой из критических точек:

```
> x:='x';
> ddf:=diff(f,x$2);
> x:=0: print('x'=x,'sign(ddf)'=sign(ddf));
> x:=3: print('x'=x,'sign(ddf)'=sign(ddf));
> x:=-1: print('x'=x,'sign(ddf)'=sign(ddf));
```

Обратите внимание на то, что перед применением команды `diff` используется операция `x:='x'`, которая *восстанавливает x как переменную* после того, как ранее в программе ей было присвоено конкретное значение. Получим:

$$x = 0,\ sign(ddf) = -1,$$
$$x = 3,\ sign(ddf) = 1,$$
$$x = -1,\ sign(ddf) = 1.$$

Итак, при $x = 0$ функция имеет локальный максимум, а при $x = 3$ и $x = -1$ – локальный минимум.

Полный текст программы MAPLE см. в приложении, стр. 43.

Замечание. В этом параграфе мы рассмотрели *один простой* пример нахождения экстремумов функции одной переменной. Поскольку наша функция является полиномом, мы заранее знали, что она имеет конечное количество экстремумов (в нашем случае – не более трех). Более того, MAPLE очень хорошо справляется с нахождением *всех* корней *полинома*, а значит, аналитический метод нахождения экстремума достаточно эффективен. Если же исследуемая функция является более сложной, придется обратить особое внимание на нахождение корней производной. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \sin(x^2)$ и найдем корни ее производной:

```
> f:=sin(x^2);
> df:=diff(f,x); solve(df=0);
```

Получаем три корня: 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$. Из вида графика ясно, что 0 – точка (локального) минимума, а $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$ – точки максимума. Однако нетрудно видеть, что наша функция имеет бесконечное число экстремумов. Чтобы их найти, можно применить функцию `fsolve`, в которой указать отрезок, на котором ищется корень. Например, по команде

```
> fsolve(df=0,x=-2.5..-2);
```

найдем еще один корень производной, а именно, -2.170803764. Заметим, что команда `fsolve` выдает приближенное решение (в отличие от команды `solve`, по которой может быть получено и аналитическое решение, как для функции $f(x) = \sin(x^2)$). Более того, команда `fsolve` выдает только один корень функции на указанном интервале, а иногда не может его найти, даже если он там есть! Поэтому в случае достаточно сложной функции при нахождении экстремумов особое внимание приходится уделять корректному применению команд `solve` и `fsolve`.

Замечание. Если корень функции локализован, то для его нахождения можно применять и приближенные методы, используя систему MAPLE. Вот, например, простейшая программа, реализующая метод половинного деления для нахождения корня функции df, если уже известно, что он находится на отрезке $[1.5, 4]$, причем $df(1.5) < 0$ и $df(4) > 0$:

```
> a:=1.5; b:=4;
> for i from 1 to 30 do x:=(a+b)/2:
if (df>0) then b:=(a+b)/2 else a:=(a+b)/2 fi od:
> (a+b)/2;
```

Данная конструкция цикла означает, что переменная i пробегает все значения от 1 до 30, т. е. тело цикла выполняется 30 раз.