4. Условный экстремум

Рассмотрим следующую задачу: найти экстремумы функции $f = f(x)$ на множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$, которое задается конечным числом равенств $Q = \{x : g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m\}$. Множество Q называется допустимым, а условия $g_j(x) = 0$ означают, что переменные $x_1, \dots, x_n$ подчинены некоторым связям.

Точка $x_0 \in Q$ называется точкой локального минимума на множестве Q, если найдется такая окрестность $U(x_0)$, что в любой точке $x \in Q \cap U(x_0)$ функция f принимает значение, не меньшее, чем в точке x_0: $f(x) \geq f(x_0)$. Аналогично определяются точки локального максимума на множестве Q.

Общий метод решения таких задач на *условный* экстремум дается известным *правилом множителей Лагранжа*. Напомним теоремы о необходимых и достаточных условиях.

Теорема (необходимое условие экстремума первого порядка). *Пусть функция f в точке x_0 имеет локальный экстремум на множестве Q. Пусть функции $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, причем векторы $g_1'(x_0), \dots, g_m'(x_0)$ линейно независимы. Тогда существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (множители Лагранжа), такие, что функция Лагранжа $L(\lambda, x) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ удовлетворяет условиям $\frac{\partial L(\lambda, x_0)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Теорема (условия экстремума второго порядка). *Пусть функции $f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, причем векторы $g_1'(x_0), \dots, g_m'(x_0)$ линейно независимы.*

1. Если функция f в точке x_0 имеет локальный минимум на множестве Q, то имеет место утверждение предыдущей теоремы, причем второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2 L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\lambda, x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

где $dx_1, \dots, dx_n$ подчинены условиям

$$dg_k(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k(x_0)}{\partial x_i} dx_i = 0, \;\; k = 1, \dots, m,$$

неотрицателен. Если f в x_0 имеет локальный максимум на Q, то второй дифференциал при указанных условиях неположителен.

2. Пусть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ таковы, что имеет место утверждение предыдущей теоремы, и второй дифференциал d^2L при указанных выше условиях строго положителен, если $dx \neq 0$. Тогда функция f в точке x_0 имеет локальный минимум на множестве Q. Если d^2L при указанных выше условиях строго отрицателен, то функция f в точке x_0 имеет локальный максимум на множестве Q.

Часто бывает полезно иметь в виду следующий факт.

Теорема (Вейерштрасса). *Непрерывная функция на компактном множестве достигает своих минимума и максимума.*

Мы ограничимся рассмотрением задачи на условный экстремум для функции двух переменных при наличии одного ограничения. Зададим нашу функцию и ограничения:

```
> f:=(x-2)^2+(y-1)^2;
> g:=x^2+y^2-1;
```

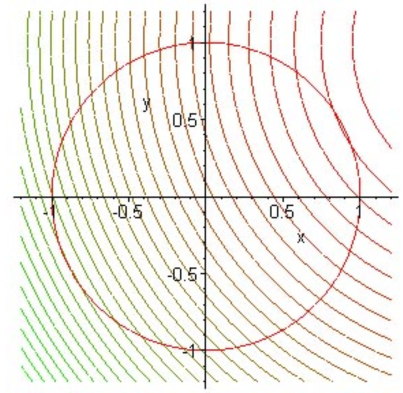

Рис. 12. Линии уровня функции $f(x, y)$ и множество $g(x, y) = 0$

Изобразим на плоскости xOy линии уровня функции $f(x, y)$ и множество $Q = \{(x, y) : \; g(x, y) = 0\}$ (окружность):

```
> with(plots):
> q1:=implicitplot(g(x,y)=0,x=-1..1,y=-1..1,
scaling=constrained):
> q2:=contourplot(f(x,y),x=-1.2..1.2,
```

```
y=-1.2..1.2,scaling=constrained, filled=false,
coloring=[red,green],contours=30):
> display(q1,q2);
```

Опция `scaling=constrained` означает, что масштабы по осям Ox и Oy на графике будут выбраны одинаковыми. Этот фрагмент программы выдает рисунок, приведенный на рис. 12. Полученный график позволяет локализовать точки минимума и максимума, которые являются точками касания окружности $g(x,y)=0$ и линий уровня функции $f(x,y)$.

Найдем экстремальные точки нашей функции аналитически. Зададим функцию Лагранжа

```
> L:=f+lambda*g;
```

и составим систему

$$\frac{\partial L(\lambda,x,y)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial L(\lambda,x,y)}{\partial y}=0, \quad g(x,y)=0. \qquad (*)$$

```
> Sys_Eqn:={};
> for t in x,y,lambda do
Sys_Eqn:=Sys_Eqn union {diff(L,t)=0}; od;
```

Этот фрагмент программы означает следующее: вначале мы задаем систему из пустого множества уравнений, а затем в цикле добавляем в нее (с помощью команды `union`, которая означает объединение двух множеств) три уравнения: `diff(L,x)=0`, `diff(L,y)=0` и `diff(L,lambda)=0` (нетрудно видеть, что третье уравнение совпадает с уравнением $g(x,y)=0$). Получаем такую систему:

$$2x-4+2\lambda x=0,\ 2y-2+2\lambda y=0,\ x^2+y^2-1=0. \qquad (**)$$

Чтобы решить ее, попытаемся воспользоваться командой `solve`:

```
> solve(Sys_Eqn,{x,y,lambda});
```

В этой команде можно, вообще говоря, и не указывать набор переменных, относительно которых решается система. В ответе появляется команда $RootOf$, которая, как мы уже знаем, означает, что корни не могут быть найдены в квадратурах. Применяя команду `evalf(%)`, получаем один ответ:

$$y = 0.4472135956, \quad x = 0.8944271912, \quad \lambda = 1.236067978.$$

Для того, чтобы далее использовать эти значения переменных, удобно применить команду

```
> assign(%);
```

Эта команда *сопоставляет* переменным x, y и λ их значения, полученные при выполнении предыдущей команды, т. е. команды `solve`. Теперь, например, по команде

```
> lambda;
```

мы получим значение 1.236067978 этой переменной.

Является ли полученное решение единственным решением системы? Попробуем воспользоваться командой `fsolve` с указанием пределов изменения переменных. Например, предположим, что есть решение, для которого $\lambda < 0$:

```
> x:='x';y:='y';lambda:='lambda';
> fsolve(Sys_Eqn,{x,y,lambda},{lambda=-infinity..0});
```

Заметим, что в команде `fsolve` приходится указывать набор переменных, относительно которых решается система, если для каких-то из этих переменных указываются пределы изменения. Напомним, что первая строчка этого фрагмента восстанавливает x, y и λ как переменные (после того, как по команде `assign` им были присвоены конкретные значения). Получили второе решение:

$$y = -0.4472135956, \quad x = -0.8944271912, \quad \lambda = -3.236067977.$$

Чтобы сохранить оба набора решений, можно поступить так: определить списки X, Y и Λ:

```
> solve(Sys_Eqn,{x,y,lambda});
> evalf(%);
> assign(%);
> X[1]:=x;Y[1]:=y;Lambda[1]:=lambda;
> x:='x';y:='y';lambda:='lambda';
> fsolve(Sys_Eqn,{x,y,lambda},lambda=-infinity..0);
> assign(%);
> X[2]:=x;Y[2]:=y;Lambda[2]:=lambda;
```

Другой способ найти два решения системы следующий: в каком-нибудь уравнении системы заменить целое число на «число с точкой», например, так:

```
> g:=x^2+y^2-1.;
```

Тогда по команде `solve`(`Sys_Eqn`) получим сразу два решения:

$$x = -0.8944271910,\ y = -0.4472135955,\ \lambda = -3.236067978;$$

$$x = 0.8944271910,\ y = 0.4472135955,\ \lambda = 1.236067978.$$

Чтобы сохранить их для дальнейшего использования, можно поступить так:

```
> s:=solve(Sys_Eqn,{x,y,lambda});
> for i from 1 to 2 do assign(s[i]);X[i]:=x;Y[i]:=y;
Lambda[i]:=lambda;x:='x';y:='y';lambda:='lambda' od;
```

В этом фрагменте программы переменная `s` – это множество, состоящее из двух решений `s[1]` и `s[2]`, а команда `assign` применяется в цикле к каждому из них.

Итак, мы получили два различных решения системы уравнений. Имеет ли эта система другие решения? Если да, то как их найти? Очевидно, что можно выразить λ из первого уравнения системы $(*)$, затем выразить λ из второго уравнения и приравнять эти величины. Полученное уравнение

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$$

вместе с уравнением $g(x, y) = 0$ составит систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Решение таких систем мы обсуждали в параграфе 2. Однако очевидно, что *в данном конкретном случае* удобно решать систему (∗∗) следующим образом: выразить x через λ из первого уравнения и y через λ из второго уравнения, и подставить эти выражения в третье уравнение системы. Получим уравнение $(1 + \lambda)^2 = 5$, откуда следует, что $\lambda = \pm\sqrt{5} - 1$. Теперь можно, задавая поочередно $\lambda = \sqrt{5} - 1$ и $\lambda = -\sqrt{5} - 1$, составить систему двух уравнений `diff(L,x)=0`, `diff(L,y)=0` (эти уравнения линейные) и решить ее:

```
> Sys_Eqn1:=Sys_Eqn minus {diff(L,lambda)=0};
> for lambda in {sqrt(5)-1,-sqrt(5)-1} do
solve(Sys_Eqn1); od;
```

В первой строке этого фрагмента используется команда `minus`, которая означает «теоретико-множественное вычитание».

Итак, мы показали, что система (∗∗) имеет два решения, которым соответствуют две критические точки нашей функции. Теперь воспользуемся теоремой Вейерштрасса: множество $Q = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, очевидно, компактно (это окружность), а функция f непрерывна. Значит, она имеет и точки минимума, и точки максимума на множестве Q. Значит, одна из найденных нами точек – минимум, а вторая – максимум. Чтобы проверить, какая из них минимум, а какая – максимум, достаточно просто подставить их в функцию.

В данном случае оказалось, что задачу нахождения экстремумов можно решить, не применяя условия второго порядка. Однако для полноты изложения покажем, как применить эти условия. Вначале построим второй дифференциал функции Лагранжа. Можно действовать так:

```
> DDL:=diff(L,x$2)*dx^2+2*diff(L,x,y)*dx*dy
+diff(L,y$2)*dy^2;
> diff(g,x)*dx+diff(g,y)*dy=0;
> dy:=solve(%,dy);
> DDL;
```

Этот фрагмент программы означает следующее. Вначале мы задаем функцию DDL – второй дифференциал функции L – как функцию четырех переменных: x, y, dx, dy. Далее находим связь между дифференциалами dx и dy. Она выражается равенством $dg(x,y) = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}dy = 0$. Из этого равенства выражаем dy через dx (с помощью команды `solve`). Теперь команда `DDL` возвращает функцию DDL от трех переменных: x, y и dx (выражение для dy уже подставлено):

$$(2+2\lambda)dx^2 + \frac{(2+2\lambda)x^2dx^2}{y^2}.$$

Для удобства можно привести подобные (найти коэффициенты при dx^2) с помощью команды `collect`:

```
> collect(%,dx);
```

Тогда второй дифференциал принимает вид

$$\left(2+2\lambda+\frac{(2+2\lambda)x^2}{y^2}\right)dx^2.$$

Найдем его значения в «подозрительных» точках:

```
> for i from 1 to 2 do x:=X[i];y:=Y[i];
lambda:=Lambda[i];print('DDL'=DDL); od;
```

Получаем, что при $x = 0.8944271910$, $y = 0.4472135955$ второй дифференциал положителен (т. е. этому значению соответствует минимум функции f), а при $x = -0.8944271910$, $y = -0.4472135955$ – отрицателен (т. е. этому значению соответствует максимум f).

Полный текст программы MAPLE см. в приложении, стр.44.

5. Задачи с ограничениями типа неравенств

Кратко рассмотрим экстремальную задачу *с ограничениями типа неравенств*: найти точки экстремума функции $f(x)$ на множестве