10. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи

Транспортная задача является задачей линейного программирования и её смысл заключается в определении наиболее экономичного плана перевозок однородного товара из пунктов отправления (склады) в пункты назначения (магазины).

Пусть имеется m пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ из которых следует перевезти однородный груз в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$. Пусть $c_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n -$ стоимость перевозки единицы груза из $i -$го пункта отправления в $j -$й пункт назначения (тариф перевозки). Обозначим через $a_i, i = 1, \dots, m -$ запасы груза на $i -$м пункте отправления; $b_j, j = 1, \dots, n -$ потребности в грузе на $j -$м пункте назначения; $x_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n -$ количество единиц груза, перевозимое из $i -$го пункта отправления в $j -$й пункт назначения. Матрица $X = (x_{ij})_{m \times n}$ называется **планом перевозок**. Матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$ называется **матрицей тарифов**.

В качестве критерия оптимальности выберем минимальную стоимость перевозок всего груза. Таким образом, решить транспортную задачу – это определить план перевозок $x_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, то есть количество груза, которое следует перевезти из $i -$го пункта отправления в $j -$й пункт назначения, чтобы все пункты отправления избавились от запасов груза, а все пункты назначения получили требуемое количество груза и при этом стоимость перевозки всего груза была наименьшей.

Математическая модель транспортной задачи примет вид:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Любое неотрицательное решение $X_{ij} = \|x_{ij}\|, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, удовлетворяющее ограничениям, называется **допустимым планом**.

Допустимый план $X^*_{ij} = \|x^*_{ij}\|, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, при котором целевая функция принимает наименьшее значение, называется **оптимальным планом**.

Модель транспортной задачи называется **закрытой (сбалансированной)**, если суммарные потребности равны суммарным запасам, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. В противном случае модель называется **открытой (несбалансированной)**.

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является равенство суммарных потребностей суммарным запасам. Если это не так, то есть $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задачу следует преобразовать следующим образом:

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть суммарные запасы больше суммарных потребностей, то в этом случае следует добавить фиктивный пункт назначения B_{n+1}, потребность которого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.
2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть суммарные запасы меньше суммарных потребностей, то в этом случае следует добавить фиктивный пункт отправления A_{m+1}, запасы которого $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

При этом соответствующие тарифы считаются равными нулю. После данных преобразований модель становится закрытой.

При решении транспортных задач используют лишь закрытые модели, если модель является открытой, то с помощью преобразований, описанных выше, модель превращают в закрытую и только после этого переходят к решению задачи.

Условие транспортной задачи удобно записывать в виде таблицы:

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mm}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Таблица 36. Условие транспортной задачи в табличной форме