

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Кафедра теории упругости

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА
В ФИЗИЧЕСКОМ МАЯТНИКЕ

Ростов-на-Дону 2022

Цель работы

Изучить влияние вибрации точки подвеса на движение физического маятника и определить область его устойчивости.

Основные теоретические положения

Иследуем малые колебания физического маятника около нижнего устойчивого положения равновесия при условии, что точка подвеса колеблется по закону $y = A \cos \omega t$, где A — амплитуда колебаний точки подвеса физического маятника.

Рассмотрим явление стабилизации колебаний физического маятника в верхнем неустойчивом положении (см. схему установки на рисунке 1). Точка подвеса колеблется по закону $y = A \cos \omega t$, где A — амплитуда, ω — круговая частота колебаний, t — время.

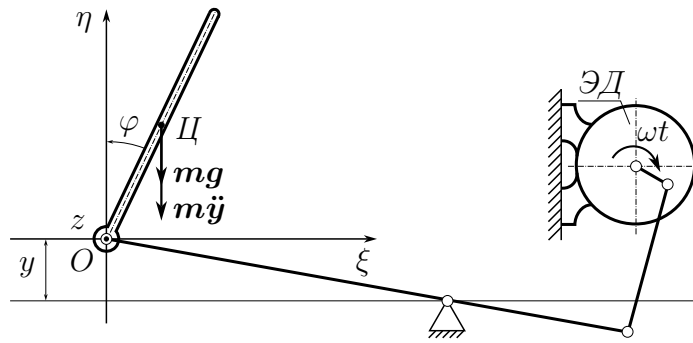


Рис. 1: Схема установки

Согласно теореме об изменении момента количества движения относительно центра O подвижной декартовой системы координат (ξ, η, z) , получим дифференциальное уравнение малых колебаний маятника:

$$J_z \ddot{\varphi} = -m(g + \ddot{y})a_{\text{Ц}}\varphi \quad (1)$$

Здесь $J_z = ml^2/3$ — момент инерции стержня относительно оси вращения z , m — масса стержня, l — длина стержня, $a_{\text{Ц}} = l/2$ — расстояние от точки O до центра массы стержня Ц , g — ускорение свободного падения, φ — угол отклонения от вертикального положения маятника. Если ввести приведенную длину маятника $L = J_z/(ma_{\text{Ц}}) = 2l/3$, то уравнение (1) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{L} - \frac{A\omega^2}{L} \cos \omega t \right) \varphi = 0 \quad (2)$$

Это уравнение можно путем замены $\omega t = 2\tau$, $a = \frac{-4g}{\omega^2 L}$, $\varepsilon = -\frac{2A}{L}$ привести к каноническому виду [1] (см. стр. 186):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + (a - 2\varepsilon \cos 2\tau) \varphi = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (3) существует только при определенных значениях параметров (a, ε) и является периодическим. Колебания, описываемые этим уравнением, называются параметрически возбуждаемыми или параметрическими [1].

В рассматриваемом случае стабилизация колебаний наблюдается при следующих значениях параметров

$$-\frac{\varepsilon^2}{2} < a < 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{8} \quad (4)$$

При малых значениях ε (малых амплитудах A) правое неравенство удовлетворяется при любых отрицательных значениях a и остается только одно неравенство:

$$a > -\frac{\varepsilon^2}{2} \quad (5)$$

С учетом проведенных замен оно равносильно условию

$$A\omega > \sqrt{2gL} \quad (6)$$

Это неравенство определяет нижнее значение максимальной скорости $A\omega$ колебаний точки подвеса, при котором наблюдается устойчивость опрокинутого маятника.

Порядок проведения работы

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с установкой для наблюдения эффекта опрокинутого маятника можно считать состоящей из двух основных блоков: блока маятника и блока измерителя частоты (Рисунок 2).

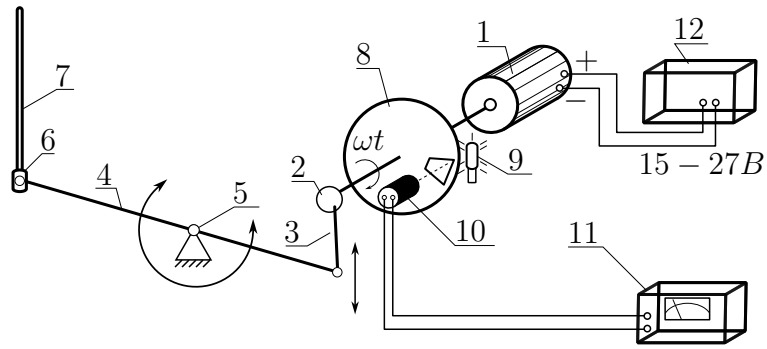


Рис. 2: Схема установки

Блок маятника служит для приведения в колебательное движение точки подвеса (6) маятника (7). Блок состоит из электродвигателя постоянного тока (1), на конце вала которого закреплен эксцентрик (2). С эксцентриком посредством шатуна (3) соединено коромысло (4), закрепленное на шарнирной опоре (5). Конструкция шарнирной опоры позволяет изменять соотношение плеч коромысла, тем самым регулировать амплитуду колебаний точки подвеса маятника при постоянной величине эксцентриситета самого эксцентрика.

Частота колебаний точки подвеса маятника (6) регулируется изменением оборотов электродвигателя путем изменения напряжения питания в пределах 15 – 27 Вольт (но не более 28 Вольт в течение не более 10 – 15 секунд). Необходимо помнить также, что электродвигатель рассчитан на кратковременную работу (не более 1 – 1,5 минут).

Блок измерителя частоты служит для измерения частоты колебаний точки подвеса маятника путем измерения числа оборотов n вала электродвигателя, поскольку частота колебаний точки подвеса маятника прямо пропорциональна числу оборотов

вала электродвигателя. Этот блок состоит из диска (8), закрепленного на валу электродвигателя, имеющего 12 отверстий, расположенных по его окружности, служащих для модуляции потока света. Позади диска (со стороны электродвигателя), в специальном патроне установлен источник света (9). Перед диском (в этом же патроне) установлен фотодиод (10), выводы которого подключены к измерителю частоты (11). В качестве измерителя частоты может быть применен частотомер, позволяющий измерять частоту в диапазоне от 0,5 до 500 кГц с погрешностью не более 1,5%.

Число оборотов определяется по формуле:

$$n = \frac{60}{N} f_{\text{пр}} \text{ об/мин}, \quad (7)$$

где $f_{\text{пр}}$ — отсчет по шкале частотомера в Герцах, N — количество отверстий в диске.

Соотношение между частотой колебаний точки подвеса маятника и частотой, отсчитываемой по шкале измерителя частоты, выражается формулой:

$$\omega = \frac{2\pi f_{\text{пр}}}{N} \text{ рад/с}. \quad (8)$$

В рассматриваемой установке число отверстий в диске $N = 12$.

Опыт проводится в следующей последовательности:

1. определить приведенную длину стержня (маятника);
2. определить расчетную частоту колебаний точки подвеса маятника с условием, чтобы максимальные обороты вала электродвигателя были не более 5500 – 6000 об/мин;
3. по расчетной частоте определить амплитуду колебаний точки подвеса маятника;
4. установить на приборе рассчитанную амплитуду точки подвеса маятника (6), перемещая шарнирную опору (5) относительно коромысла (4) и основания шарнирной опоры, предварительно ослабив их крепления (величина амплитуды проверяется линейкой с миллиметровыми делениями), медленно и осторожно проворачивая вал электродвигателя за диск (8);
5. установив требуемую амплитуду, надежно закрепить шарнирную опору и коромысло на ней;
6. надеть на ось (6) маятник и закрепить гайкой с шайбой;
7. включить частотомер и дать ему прогреться в течение 8 – 10 минут;
8. проверить, чтобы выключатель электродвигателя был в положении «ВЫКЛЮЧЕНО» и подключить провода питания к клеммам со знаками «+» и «-», предварительно проверив, чтобы ручка над ними стояла в положении «-»;
9. поставить регулятор напряжения на щите в положение «0» или близкое к нему и включить щит, поставив ручку «СЕТЬ» в положение «ВКЛ»;
10. ручкой регулирования напряжения по левому верхнему вольтметру установить напряжение 15 Вольт;

11. включить источник света измерителя частоты;
12. включить электродвигатель и, плавно увеличивая обороты (увеличивая напряжение регулятором, но не выше 28 Вольт), поставить маятник в опрокинутое положение;
13. тем же регулятором плавно уменьшить обороты до того момента, пока маятник будет находиться еще в устойчивом состоянии и записать соответствующие показания частотомера;
14. выключить электродвигатель, источник света, электрощит;
15. сравнить расчетную частоту $\omega_{\text{теор}}$ с измеренной $\omega_{\text{опыт}}$ по формуле

$$\delta = \frac{|\omega_{\text{теор}} - \omega_{\text{опыт}}|}{\omega_{\text{теор}}} 100\% \quad (9)$$

При этом результат считается хорошим, если $\delta \leq 8\%$.

Опыт проводится не менее трех раз для различных амплитуд колебаний точки подвеса.

Отчет по проделанной работе

Отчет о проделанной работе должен содержать следующие сведения:

- цель работы;
- расчетные формулы;
- журнал измерений, включающий схематический чертеж установки, длину балки, амплитуду и частоту колебаний точки подвеса;
- обработка результатов (вычисление и сравнение значений частот колебаний, используя формулу (9), отображение точек (a_i, ε_i) , соответствующих экспериментальным данным, на диаграмме Айнса — Стретта);
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Что называется параметрическим резонансом?
2. Чем отличается параметрический резонанс от обычного резонанса?
3. Как ведут себя амплитуды в случае параметрического и обычного резонанса?
4. Как построить область устойчивости маятника в верхнем положении?
5. Как изменится область устойчивости, если учесть в уравнении движения диссипативные силы?
6. Что случится, если маятнику в верхнем положении сообщить толчок в сторону?
7. Что такое диаграмма Айнса — Стретта?

8. Как изменится колебание маятника, если точка подвеса будет колебаться в горизонтальном направлении?
9. Чем можно объяснить разницу между значениями $\omega_{\text{опыт}}$ и $\omega_{\text{теор}}$?
10. Какой вид имеет уравнение Матье?
11. Какими свойствами обладает решение уравнения Матье?

Список литературы

- 1 Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний [Текст] : [Учеб. пособие для вузов]. — М.: Наука, 1971. — 239 с.
- 2 Пановко, Я.Г., Губанова, И. И. Устойчивость и колебания упругих систем [Текст] : Современные концепции, парадоксы и ошибки. — М.: Наука, 1967. — 420 с.
- 3 Меркин, Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения [Текст] : [Учеб. пособие для вузов]. — М.: Наука, 1971. — 312 с.