

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Кафедра теории упругости

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Ростов-на-Дону 2025

Цель работы

Определить частоты возмущающего магнитного поля, приводящего в резонансные колебания упругую балку, осуществляющиеся на одной собственной форме (резонанс n -го рода).

Основные теоретические положения

Уравнение, описывающее нестационарные движения металлической балки под действием магнитного поля (см. рисунок 1), может быть записано в виде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{K |u_0(t)|}{(\Delta - w)^2} \delta(x - a), \quad (1)$$

где EJ — это жёсткость балки на изгиб, ρ — объёмная плотность материала балки, F — площадь поперечного сечения балки, $u_0(t)$ — подаваемый сигнал на клеммы электромагнита; Δ — зазор между сердечником магнита и нейтральной осью балки в недеформированном состоянии, K — некоторый коэффициент пропорциональности; $\delta(x)$ — дельта функция Дирака.

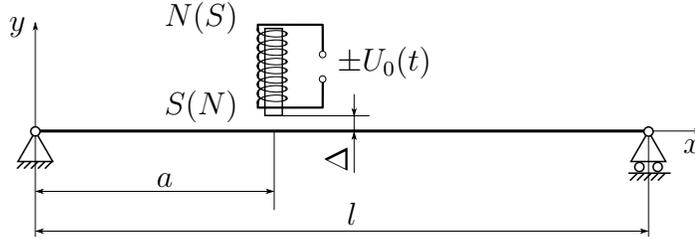


Рис. 1: Схема установки

При выводе уравнения магнитное воздействие заменено на сосредоточенную силу, которая всегда является притягивающей к магниту, независимо от знака электрического напряжения на клеммах электромагнита.

Считая прогиб малым по сравнению с зазором Δ уравнение (1) можно преобразовать к виду:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{K}{\Delta^2} \left(1 + 2 \frac{w}{\Delta} \right) |u_0(t)| \delta(x - a).$$

В дальнейшем рассматривается гармонический электрический сигнал $u_0(t) = \cos \omega t$, вырабатываемый генератором напряжения, и производится переход к безразмерным координатам $x = l\xi$ ($0 \leq \xi \leq 1$, l — длина балки). Тогда уравнение движения принимает вид:

$$\frac{EJ}{l^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{K}{\Delta^2 l} |\cos \omega t| \delta \left(\xi - \frac{a}{l} \right) + \frac{2K}{\Delta^3 l} |\cos \omega t| w(t) \delta \left(\xi - \frac{a}{l} \right). \quad (2)$$

Решение этого нестационарного уравнения можно разыскивать по методу Бубнова–Галеркина в виде:

$$w = \sum_{j=1}^N w_j(\omega_j, \xi) T_j(t). \quad (3)$$

Здесь N — число аппроксимаций, $w_j(\omega_j, \xi)$ — собственные формы колебаний однородной балки без возмущающей силы магнитного поля, $T_j(t)$ — неизвестные функции времени, ω_j — собственная частота колебаний.

А. Исследование собственных частот и собственных форм.

Дифференциальное уравнение собственных колебаний балки в безразмерных координатах имеет вид:

$$w^{IV} - \mu^4 w = 0, \quad (4)$$

где $\mu^4 = \frac{\rho F \omega^2 l^4}{EJ}$ — безразмерная частота.

Граничные условия для консольного закрепления:

$$\begin{cases} w(0) = w'(0) = 0, \\ w''(1) = w'''(1) = 0. \end{cases}$$

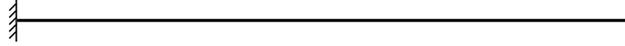


Рис. 2: Консольное закрепление

Граничные условия для шарнирного опирания:

$$\begin{cases} w(0) = w(1) = 0, \\ w''(0) = w''(1) = 0. \end{cases}$$



Рис. 3: Шарнирное опирание

Граничные условия для сложного закрепления:

$$\begin{cases} w(0) = w''(0) = 0, \\ w(1) = w'(1) = 0. \end{cases}$$

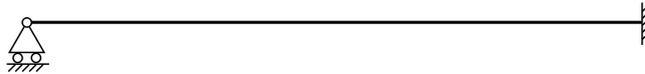


Рис. 4: Сложное закрепление

Общее решение уравнения (4) можно представить в виде

$$w = A \cos \mu \xi + B \sin \mu \xi + C \operatorname{ch} \mu \xi + D \operatorname{sh} \mu \xi,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, которые находятся из соответствующих граничных условий. Но поскольку и дифференциальное уравнение (4) и граничные

условия однородны, то для существования нетривиального решения необходимо потребовать обращения в нуль определителя получающейся линейной системы алгебраических уравнений. Раскрывая определитель системы и приравнивая его нулю, получаем в общем случае трансцендентное уравнение, из которого находится счетное множество значений параметра μ_m (где $m = 1, 2, \dots$), а следовательно и

$$\omega_m = \frac{\mu_m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}.$$

Замечание 1. Вместо фундаментальной системы функций $\sin \mu\xi$, $\cos \mu\xi$, $\text{sh } \mu\xi$, $\text{ch } \mu\xi$ можно использовать функции Крылова:

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= \frac{1}{2}(\text{ch } \mu\xi + \cos \mu\xi), \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2\mu}(\text{sh } \mu\xi + \sin \mu\xi), \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2\mu^2}(\text{ch } \mu\xi - \cos \mu\xi), \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{2\mu^3}(\text{sh } \mu\xi - \sin \mu\xi). \end{aligned}$$

Видно, что они представляют собой линейные комбинации основной фундаментальной системы и обладают следующими замечательными свойствами:

$$Y_4'(\xi) = Y_3(\xi), \quad Y_3'(\xi) = Y_2(\xi), \quad Y_2'(\xi) = Y_1(\xi), \quad Y_1'(\xi) = \mu^4 Y_4(\xi).$$

Как следствие этого, они все равны нулю при $\xi = 0$, кроме

$$Y(0) = Y_2'(0) = Y_3''(0) = Y_4'''(0) = 1.$$

Собственные функции однородной задачи обладают свойством ортогональности:

$$\int_0^1 w_m(\omega_m, \xi) w_k(\omega_k, \xi) d\xi = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \|w_m\|^2, & k = m. \end{cases} \quad (5)$$

Это свойство можно получить рассмотрев соответствующие задачи для двух функций w_m, w_k . Умножить уравнение колебаний для w_m на w_k , а уравнение для функции w_k на w_m . Далее необходимо проинтегрировать полученные выражения по координате $\xi \in [0, 1]$, вычесть одно из другого и воспользоваться несколько раз формулой интегрирования по частям с учетом граничных условий.

В. Решение нестационарной задачи (2).

Подставляя разложение (3) в (2) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $T_j(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{EJ}{l^4} \sum_{j=1}^N w_j^{IV}(\omega_j, \xi) T_j(t) + \rho F \sum_{j=1}^N w_j(\omega_j, \xi) \ddot{T}(t) = \\ & = \frac{K}{\Delta^2 l} |\cos \omega t| \delta\left(\xi - \frac{a}{l}\right) + \frac{2K}{\Delta^3 l} |\cos \omega t| \sum_{j=1}^N w_j(\omega_j, \xi) T_j(t) \delta\left(\xi - \frac{a}{l}\right) \Bigg| \cdot \frac{l^4}{EJ}. \end{aligned}$$

Согласно (4) $w_j^{IV}(\omega_j, \xi) = \frac{\rho F \omega_j^2 l^4}{EJ} w_j(\omega_j, \xi)$, где $\omega_j = \frac{\mu_j^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$ (μ_j — безразмерные собственные частоты). Подставляя это значение в предыдущее уравнение, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{\rho F \omega_j^2 l^4}{EJ} w_j T_j + \frac{\rho F l^4}{EJ} \sum_{j=1}^N w_j \ddot{T}_j = \\ & = \frac{2Kl^3}{\Delta^3 EJ} |\cos \omega t| \sum_{j=1}^N w_j T_j \delta\left(\xi - \frac{a}{l}\right) + \frac{Kl^3}{\Delta^2 EJ} |\cos \omega t| \delta\left(\xi - \frac{a}{l}\right). \end{aligned}$$

Используя условия ортогональности (5) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{T}_m(t) + \omega_m^2 T_m(t) = |\cos \omega t| \sum_{j=1}^N A_{mj} T_j(t) + B_m |\cos \omega t|, \quad m = \overline{1, N},$$

где

$$A_{mj} = \frac{2K}{\rho F l \Delta^3} \frac{w_m\left(\frac{a}{l}\omega_m\right) w_j\left(\frac{a}{l}\omega_j\right)}{\|w_m\|^2}, \quad B_m = \frac{K}{\rho F l \Delta^2} \frac{w_m\left(\frac{a}{l}\omega_m\right)}{\|w_m\|^2}.$$

Изучим колебания балки, сохраняющей первую собственную форму. Для этого случая следует взять в (3) только одно слагаемое при $N = 1$. Полученное дифференциальное уравнение имеет вид неоднородного уравнения Хилла:

$$\ddot{T}(t) + \omega_1^2 T(t) - |\cos \omega t| A_{11} T(t) = B_1 |\cos \omega t|. \quad (6)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. В силу малости коэффициента K постоянные $A_{11} \approx 0$ и $B_1 \approx 0$ (нулевое приближение). В этом случае уравнение $\ddot{T} + \omega_1^2 T = 0$ фактически представляет свободные колебания балки и никак не описывает внешние возмущения со стороны магнитного поля.

2. Считая $A_{11} \approx 0$, а $B_1 \neq 0$ (первое приближение) имеем уравнение:

$$\ddot{T}(t) + \omega_1^2 T(t) = B_1 |\cos \omega t|.$$

Общее решение этого уравнения складывается из общего решения однородного и частного решения неоднородного и может быть записано в виде:

$$T = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t + \frac{B_1}{\omega_1} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^t \sin \omega_1(t - \tau) |\cos \omega \tau| d\tau. \quad (7)$$

Потребуем, чтобы это решение было периодическим с тем же периодом что π и возмущающая сила, т. е. $|\cos \omega t|$, период которой равен $\frac{\pi}{\omega}$. Для выполнения условий периодичности необходимо потребовать выполнения равенств $T\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = T\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$ и $\dot{T}\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = \dot{T}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$.

Из этих условий находим произвольные постоянные:

$$A = \frac{B_1}{2\omega_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{2\omega}} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{1}{2} \left[\cos \left(\omega_1 \left(\frac{\pi}{2\omega} - \tau \right) + \omega\tau \right) + \cos \left(\omega_1 \left(\frac{\pi}{2\omega} - \tau \right) - \omega\tau \right) \right] d\tau,$$

$$B = \frac{-B_1}{2\omega_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{2\omega}} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{1}{2} \left[\sin \left(\omega_1 \left(\frac{\pi}{2\omega} - \tau \right) + \omega\tau \right) + \sin \left(\omega_1 \left(\frac{\pi}{2\omega} - \tau \right) - \omega\tau \right) \right] d\tau.$$

После вычисления интегралов имеем:

$$A = \frac{B_1}{\omega_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{2\omega}} \left(1 + \cos \frac{\pi\omega_1}{\omega} \right) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1} + \frac{1}{\omega + \omega_1} \right),$$

$$B = \frac{-B_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{\omega}}{\omega_1 \sin \frac{\pi\omega_1}{2\omega}} \left(\frac{1}{\omega - \omega_1} + \frac{1}{\omega + \omega_1} \right).$$

Подставляя эти значения в (7) и учитывая, что t меняется на периоде $-\frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}$, получаем общее периодическое решение. Исследуем его на резонанс.

Замечание. Параметр ω — круговая частота выдаваемого сигнала с генератора. Показания генератора $f = \omega/2\pi$.

Из выражений для A и B видно, что резонанс может наступить в двух случаях:

- а) $\omega \rightarrow \omega_1$,
- б) $\sin \frac{\pi\omega_1}{2\omega} \rightarrow 0$.

С помощью предельного перехода для случая а) можно показать, что решение будет ограничено. Для случая б) решение неограниченно возрастает, и резонанс наступает при условии $\sin \frac{\pi\omega_1}{2\omega} = 0$.

Тогда круговая частота принимает дискретные значения $\omega^{(n)} = \frac{\pi\omega_1}{2n\pi} = \frac{\omega_1}{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Вывод: первый резонанс наступает при $n = 1$ для круговой частоты $\omega^{(1)} = \frac{\omega_1}{2}$ равной половине первой собственной частоте свободных колебаний. Показания генератора в этом случае $f^{(1)} = \frac{\omega_1}{4\pi}$. Второй резонанс наступает при $n = 2$ для круговой частоты сигнала генератора $\omega^{(2)}$ и показания генератора $f^{(2)} = \frac{\omega_1}{8\pi}$ и т. д.

Появление в системе резонансов на частотах меньших в целое число раз частоты возмущающей силы носит название резонанса n -го рода.

Дополнение.

Если рассмотреть общее решение однородного уравнения (6)

$$\ddot{T} + (\omega_1^2 - A_1 |\cos \omega t|)T = 0$$

и разложить периодическую функцию $|\cos \omega t|$ в ряд Фурье

$$|\cos \omega t| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(1+2k)(2k-1)} \cos 2\omega kt,$$

а затем ограничиться только двумя слагаемыми разложения, то получится уравнение Матве

$$\ddot{T} + \left(\omega_1^2 - A_{11} \frac{2}{\pi} + \frac{4A_{11}}{3\pi} \cos 2\omega t \right) T = 0$$

или

$$\ddot{T} + (a - 2q \cos 2\tau) T = 0,$$

где $a = \frac{\omega_1^2 - A_{11} \frac{2}{\pi}}{\omega^2}$, $q = \frac{2 A_{11}}{3 \pi \omega^2}$.

В силу малости коэффициента K величина q мала. В этом случае, как известно, зоны неустойчивости на диаграмме Айнса–Стретта выходят из точек $a = 1, a = 4, \dots$. Кроме того, величина A_{11} также мала по сравнению с ω_1 (по той же причине, что и выше). А это приводит к малым интервалам частот в окрестности $\omega = \omega_1, \omega = \frac{\omega_1}{2}$, что соответствует обычным частотам $f_*^{(1)} = \frac{\omega_1}{2\pi}, f_*^{(2)} = \frac{\omega_1}{4\pi}, f_*^{(3)} = \frac{\omega_1}{6\pi}, \dots$

Точные значения этих частот рассчитывается в сопровождающей программе, однако, как показывают расчеты, диапазон этих частот так мал, что им можно пренебречь.

Окончательно можно сделать вывод: при колебаниях балки на первой гармонике имеется набор понижающихся частот, на которых наблюдается параметрический резонанс. На этих же частотах, но через одну, наблюдается резонанс n -го рода. Поэтому и колебания при совпадении этих резонансов более интенсивны.

Порядок проведения работы

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с установкой. Она состоит из следующих элементов:

1. Станина, на которой крепится балка.
2. Кронштейн для крепления электрического магнита с регулировочными винтами для перемещения его по горизонтали и вертикали.
3. Приспособления для создания различных граничных условий (шарнирное опирание, глухая заделка).
4. Генератор сигналов для формирования гармонического электрического импульса.
5. Программное обеспечение для поддержки эксперимента.

Опыт проводится в следующей последовательности:

1. Собрать установку, как показано на рисунке 1.
2. Измерить геометрические размеры балки.
3. Установить электромагнит в зоне наибольших колебаний.
4. Включить генератор и, плавно меняя частоту, добиться резонансных колебаний на первой гармонике. Записать показания генератора.

5. Уменьшить частоту вначале в 2 раза и точной регулировкой добиться резонансных колебаний на 1-ой гармонике. Записать показания генератора. Далее вновь уменьшить частоту в 3 раза от первоначальной и вновь точной регулировкой добиться резонансных колебаний на первой гармонике. Записать показания генератора.
6. Включить компьютер и запустить программу поддержки эксперимента. Ввести исходные данные: геометрические размеры, плотность материала, расстояние от левого конца установки магнита. Посчитать собственные частоты и формы колебаний. Найти погрешность расчетной и экспериментальной первой собственной частоты.
7. Выключить генератор и разобрать установку.
8. сравнить расчетную частоту $\omega_{\text{теор}}$ с измеренной $\omega_{\text{опыт}}$ по формуле

$$\delta = \frac{|\omega_{\text{теор}} - \omega_{\text{опыт}}|}{\omega_{\text{теор}}} 100\% \quad (8)$$

9. Подготовить отчет о проделанной работе.

Отчет по проделанной работе

Отчет о проделанной работе должен содержать следующие сведения:

- цель работы;
- расчетные формулы;
- журнал измерений, включающий схематический чертеж установки, геометрические размеры балки, модуль Юнга, плотность, размерные и безразмерные частоты колебаний балки;
- обработка результатов (вычисление и сравнение значений частот колебаний, используя формулу (8));
- выводы.

Контрольные вопросы

1. Вывести уравнение движения балки в магнитном поле.
2. Найти уравнение для нахождения собственных частот балки, согласно заданию преподавателя.
3. В чём заключается метод Бубнова–Галёркина.
4. Получить уравнение Хилла.
5. Какие предложения вводятся в модель.
6. Что такое параметрические колебания.
7. Что такое собственные частоты и собственные формы свободных колебаний балки.
8. Оценить влияние граничных условий на собственные частоты.

9. Что такое резонанс n -го рода.
10. Объяснить почему колебания при частотах через одну из общего набора более интенсивны, чем при соседних.

Список литературы

- 1 Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний [Текст] : [Учеб. пособие для втузов]. — М.: Наука, 1971. — 239 с.