**13-я проблема Гильберта.** Можно ли решить общее уравнение седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных? (Можно ли функцию нескольких переменных представитьт в виде суперпозиции нескольких непрерывных функций двух переменных?)

**Теорема Колмогорова — Арнольда.** Многомерная непрерывная функция может быть представлена в виде конечной композиции непрерывных функций одной переменной и операции сложения.

Или: любая непрерывная функция, n вещественных переменных, может быть представлена в виде суммы функций, имеющих своим аргументом суммы непрерывных функций одного аргумента.

$$f\left(x\_{1}, …, x\_{n}\right)=\sum\_{k=0}^{2n}Φ\_{k}\left(\sum\_{p=1}^{n}φ\_{k,p}\left(x\_{p}\right)\right)$$

**Теорема Цибенко.** Пусть $σ(x)$ непрерывная сигмоидная функция

$$σ\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}1 при x\rightarrow \infty \\0 при x\rightarrow -\infty \end{array}\right.$$

тогда конечная сумма

$$G\left(x\right)=\sum\_{i}^{}α\_{i}σ\left(w\_{i}∙x+b\_{i}\right)$$

сколь угодно точно приближает любую непрерывную функцию $f(x)$. Другими словами, для сколь угодно малого $ε$ выполняется условие

$$\left|f\left(x\right)-G(x)\right|<ε для ∀x$$

 Проложим тропинку к нейронным сетям. Для начала в качестве сигмоидной функции используем функцию индикатор

$$I\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}1 если x "истина"\\0 если x "ложь" \end{array}\right.$$

тогда $σ(x)≈I\left(x>0\right)$

Нейрон:

$$y=I\left(\sum\_{i=1}^{N}w\_{i}x\_{i}>h\right)$$

или

$$y=I\left(\sum\_{i=1}^{N}w\_{i}x\_{i}+b>0\right)$$

здесь $x\_{i}$ – входные сигналы;

$w\_{i}$ –набор весов;

*b* – смещение или *h=-b* – порог срабатывания;



 Что можно получить в простейшем случае одного нейрона с двумя входами?

$$y=I\left(w\_{1}x\_{1}+w\_{2}x\_{2}+b>0\right)$$

$$w\_{1}=1, w\_{2}=1, b=0$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x\_{1}$$$$x\_{2}$$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
|  1 | 1 | 1 |

* $y=x\_{1} or x\_{2}$

$$w\_{1}=1, w\_{2}=1, b=-1$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x\_{1}$$$$x\_{2}$$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
|  1 | 0 | 1 |

* $y=x\_{1} and x\_{2}$

Для операции $xor$ одного нейрона недостаточно. Применим формулу:

$$x\_{1} xor x\_{2}= \left(x\_{1} or x\_{2}\right) and ((not x\_{1}) or (not x\_{2}))$$

Используем

$$w\_{1}=-1, w\_{2}=-1, b=2 :y=(not x\_{1}) or (not x\_{2}) $$

Тогда

$$y= I\left(\left(I\left(x\_{1}+x\_{2}>0\right)\right)+\left(I\left(-x\_{1}-x\_{2}>-2\right)\right)-1>0\right) : y=x\_{1} xor x\_{2}$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$x\_{1}$$$$x\_{2}$$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
|  1 | 1 | 0 |

* $y=x\_{1} xor x\_{2}$

От одного нейрона мы перешли к суперпозиции нейронов: выход одних нейронов подаём на вход других.

Для индикатора "столбик"

$$I\left(x\_{i}\leq x<x\_{i+1}\right)= I\left(x-x\_{i}\geq 0\right)-I\left(x-x\_{i+1}\geq 0\right)$$

комбинация нейронов имеет вид:



 Если взять скрытый слой с достаточно большим числом нейронов, то мы можем аппроксимировать любую гладкую функцию.



$$f\left(x\right)=\sum\_{i=0}^{N-1}f\left(\frac{x\_{i}+x\_{i+1}}{2}\right)∙I\left(x\_{i}\leq x<x\_{i+1}\right)$$

Выразим индикатор $I\left(x\_{i}\leq x<x\_{i+1}\right)$ через нейроны:

$$I\left(x\_{i}\leq x<x\_{i+1}\right)=I\left(x-x\_{i}\geq 0\right)-I\left(x-x\_{i+1}\geq 0\right)$$

$$f\left(x\right)=\sum\_{i=0}^{N-1}f\left(\frac{x\_{i}+x\_{i+1}}{2}\right)∙\left(I\left(x-x\_{i}\geq 0\right)-I\left(x-x\_{i+1}\geq 0\right)\right)$$

$$f\left(x\right)=\sum\_{i=0}^{N-1}f\left(\frac{x\_{i}+x\_{i+1}}{2}\right)∙I\left(x-x\_{i}\geq 0\right)-\sum\_{i=0}^{N-1}f\left(\frac{x\_{i}+x\_{i+1}}{2}\right)∙I\left(x-x\_{i+1}\geq 0\right)$$



здесь

$$b=0 w\_{i}=\pm f\left(\frac{x\_{i}+x\_{i+1}}{2}\right)$$

(здесь *+f* и *-f* для двух рядом стоящих весов)

ДЗ:

$$f\left(x\right)=x^{2}+\sin(\left(x\right)) 0\leq x\leq 10 ε<0.1$$

***Двумерный случай:***

 Создадим нейрон для выделения "столбика" единичной высоты в области $x\_{i}\leq x<x\_{i+1} y\_{i}\leq y<y\_{i+1}$.

$$I\left((x\_{i}\leq x<x\_{i+1}) and (y\_{j}\leq y<y\_{j+1})\right)=$$

$$ \frac{1}{2}I\left(x-x\_{i}\geq 0\right)-\frac{1}{2}I\left(x-x\_{i+1}\geq 0\right)+\frac{1}{2}I\left(y-y\_{j}\geq 0\right)-\frac{1}{2}I\left(y-y\_{j+1}\geq 0\right)+\frac{1}{2}$$

или

$$I\left(x-x\_{i}\geq 0\right)-I\left(x-x\_{i+1}\geq 0\right)+I\left(y-y\_{j}\geq 0\right)-I\left(y-y\_{j+1}\geq 0\right)+\frac{3}{2}$$

