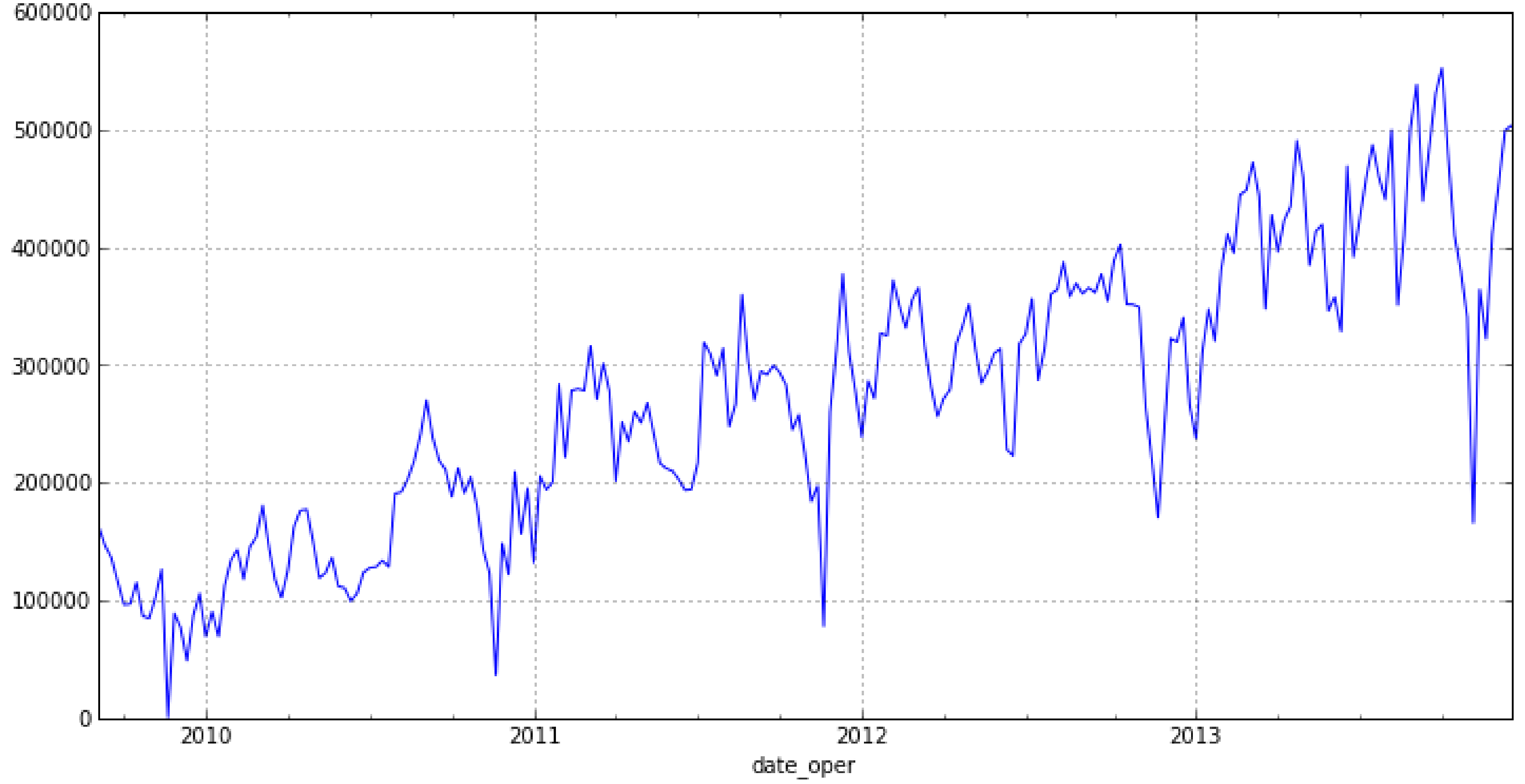
Прогнозирование временных рядов



Содержание

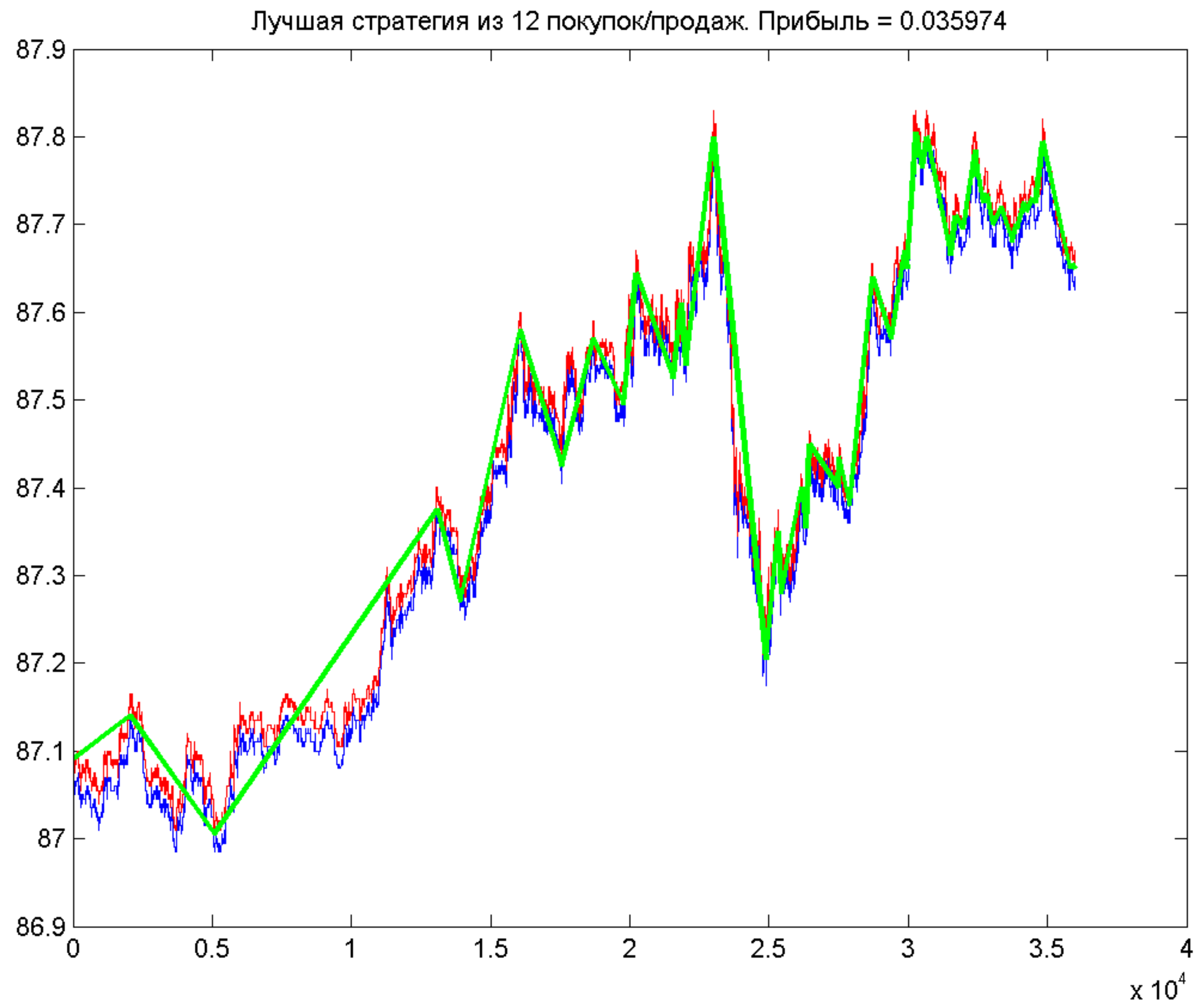
- Примеры задач
- Модель авторегрессии
- Модель скользящего среднего
- Модель ARMA
- ARIMA - интегрированная ARMA
- Подбор параметров модели. Авторегрессионный спектр

Примеры задач

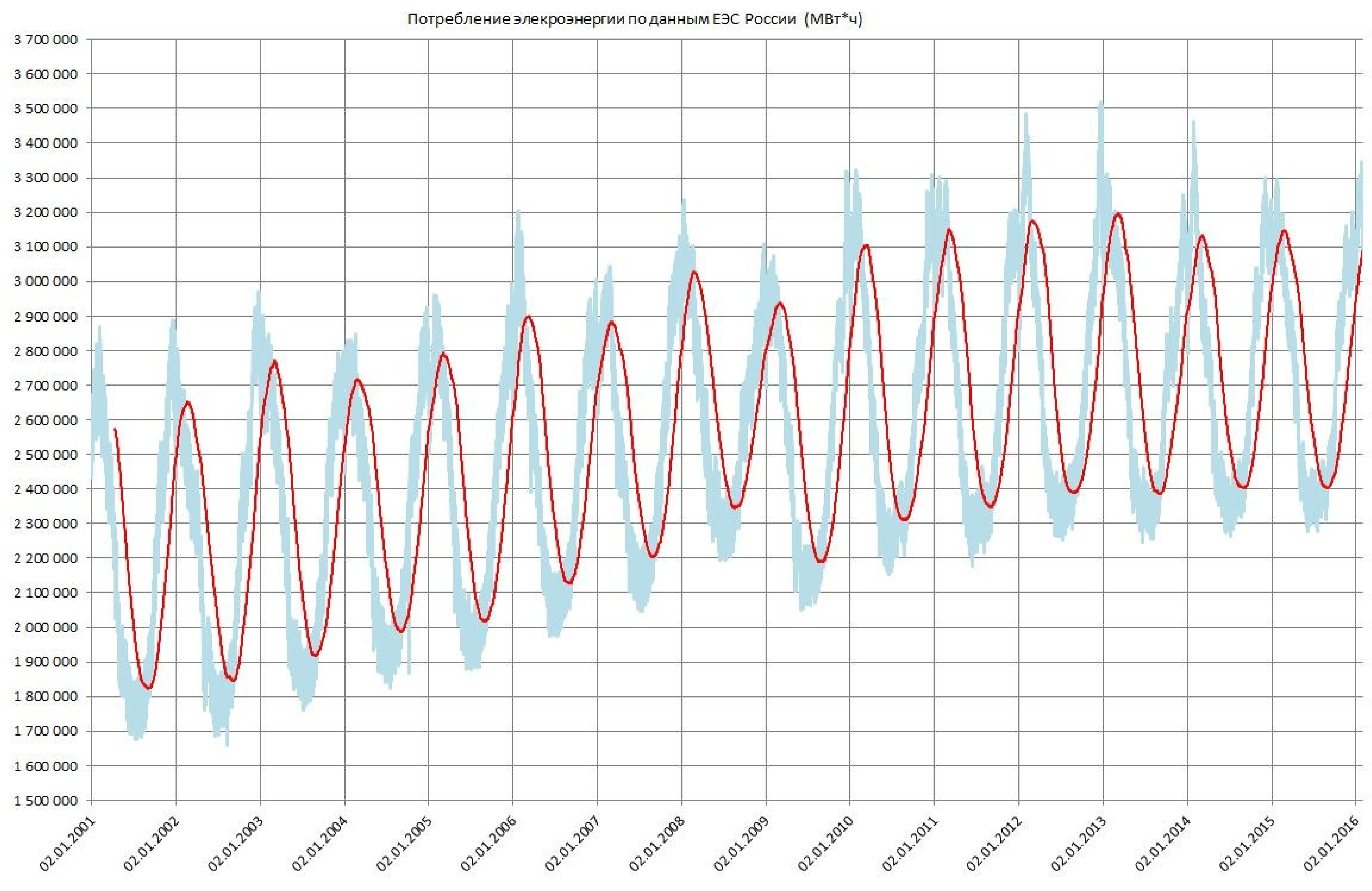
Динамика цен на нефть Brent (ICE.Brent, USD за баррель)

Динамика кросс-курса евро к доллару США (EUR/USD)

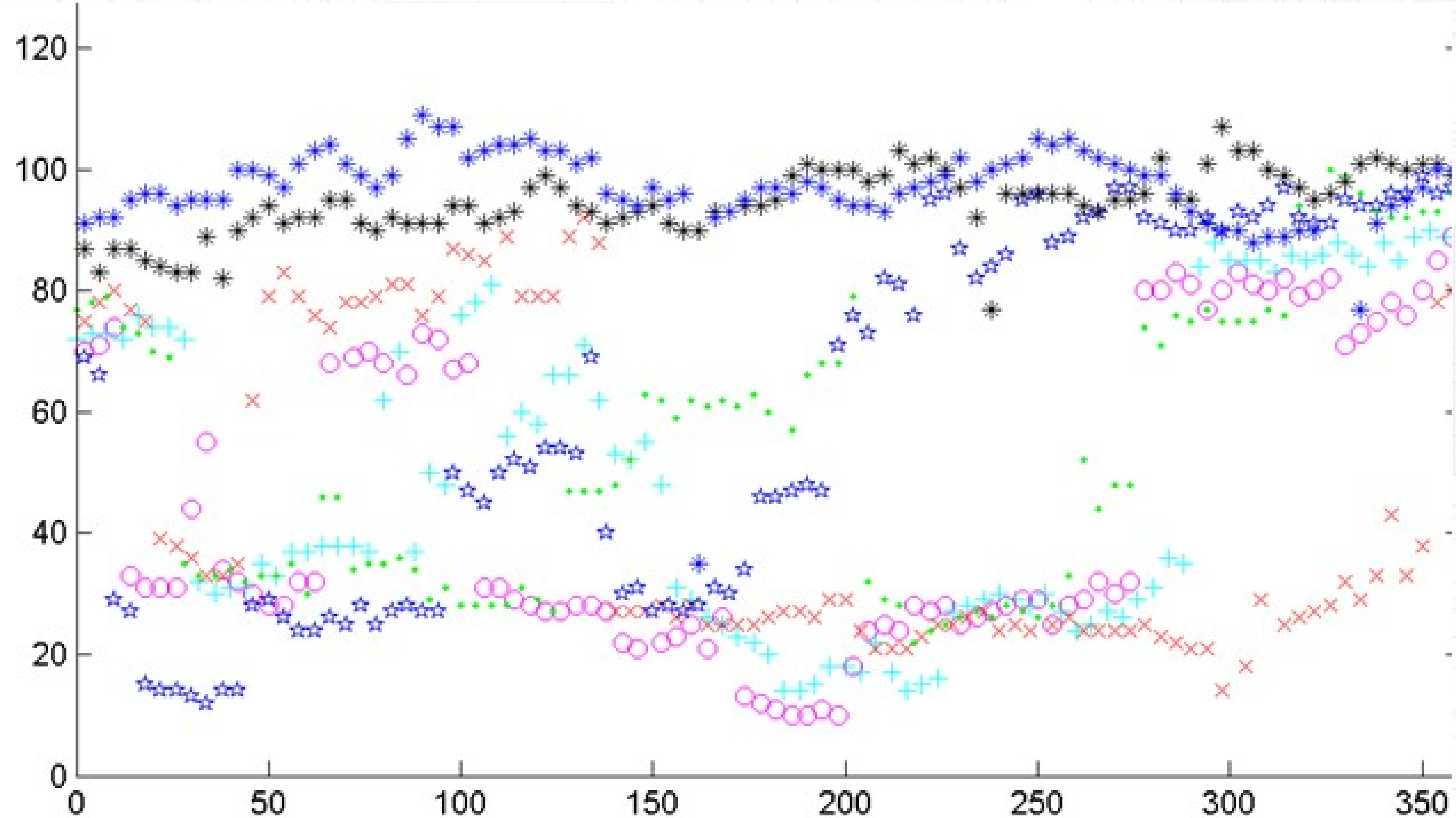
Тиковые данные



Потребление электроэнергии

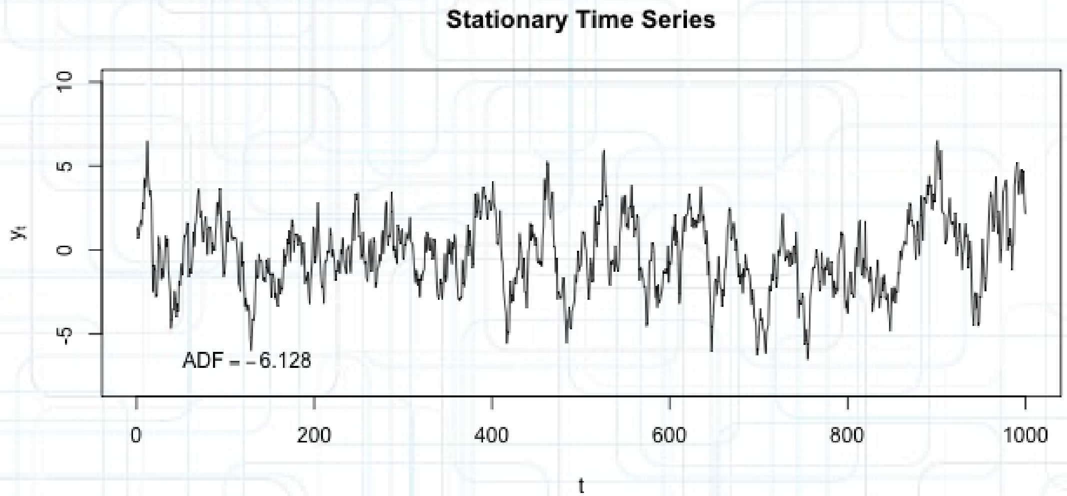


Скорость движения автомобилей в разные дни недели с 15:00 до 21:00

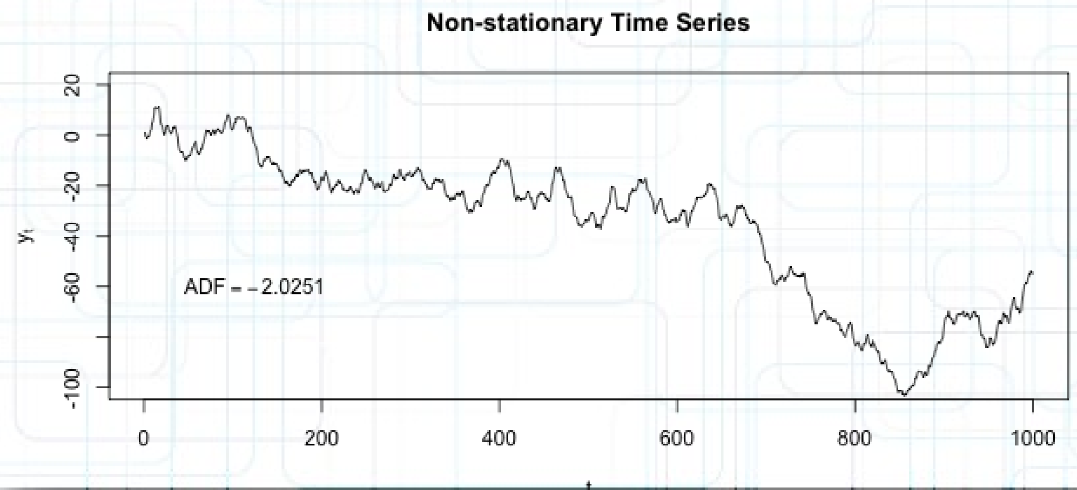


Авторегрессионная модель

- Случайный процесс называется стационарным, если случайное распределение значений функции зависит только от предыдущих значений и расстояния по времени до них, но не от самих значений времени

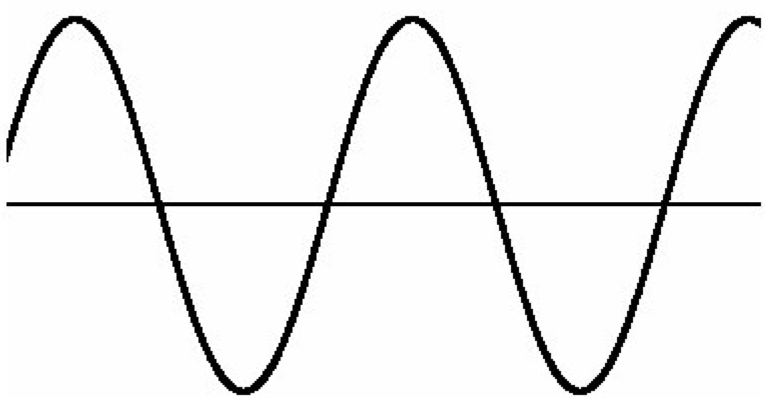


$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \varepsilon_t ,$$



Авторегрессионная модель

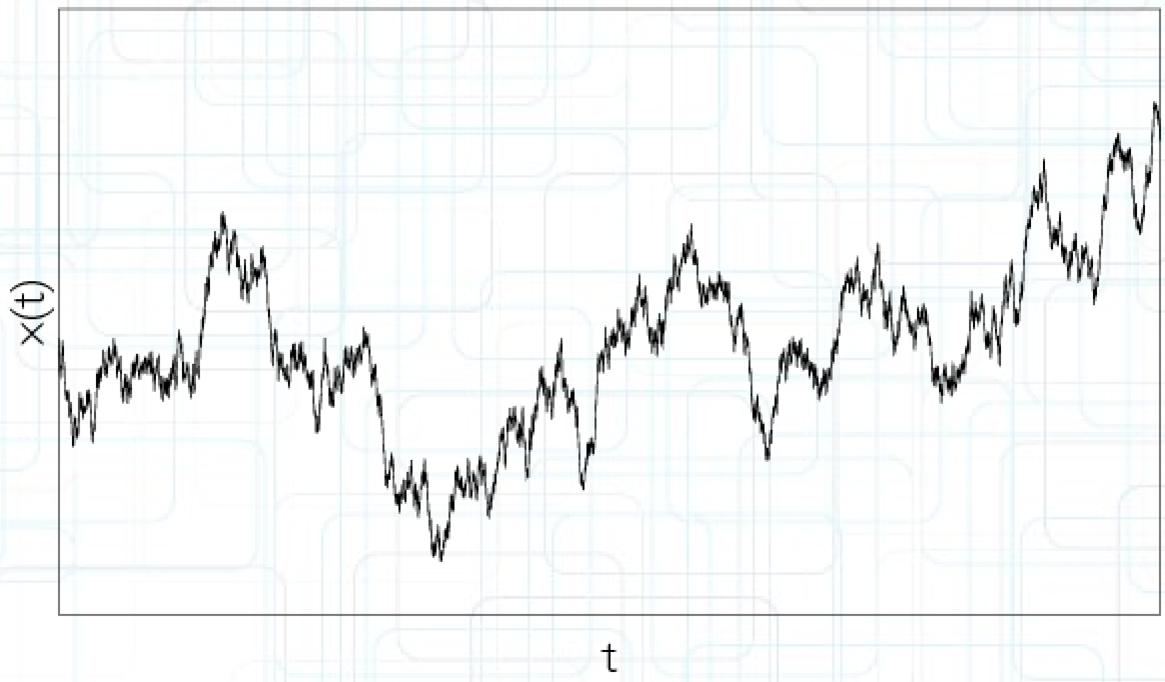
- Реализации стационарного случайного процесса могут быть периодическими Пример: процесс $X(t)=\sin(t+s)$, где s – равномерно распределенная на $[0;2\pi]$ случайная величина
- $X(t) = X(t-2\pi)$



Авторегресионный процесс первого порядка AR(1)

- Стационарный процесс – марковский, если значение зависит только от ближайшего предыдущего значения
- Пример: случайное блуждание

$$X_t = c + rX_{t-1} + \varepsilon_t$$



Поиск коэффициентов авторегрессии

- Метод наименьших квадратов:

$$\hat{y}_{t+1}(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j y_{t-j+1},$$

$$\underset{\ell\times n}{F} = \begin{pmatrix} y_{t-1} & y_{t-2} & y_{t-3} & \cdots & y_{t-n} \\ y_{t-2} & y_{t-3} & y_{t-4} & \cdots & y_{t-n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_1 \\ y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix}, \qquad \underset{\ell\times 1}{y} = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \cdots \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$Q_t(w, X^\ell) = \sum_{i=n}^{t} \big(\hat{y}_i(w) - y_i\big)^2 = \|Fw - y\|^2 \to \min_w$$

Единичный корень

- Характеристический полином модели:

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \varepsilon_t \qquad a(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^i$$

- Если существует корень внутри единичной окружности, то модель – взрывная
- Если есть корни на единичной окружности, то наблюдается тренд и для устойчивого моделирования нужно или находить и вычитать тренд, или дифференцировать ряд

Тест Дики — Фуллера

- Является одним из тестов на единичные корни

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \longrightarrow \quad y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

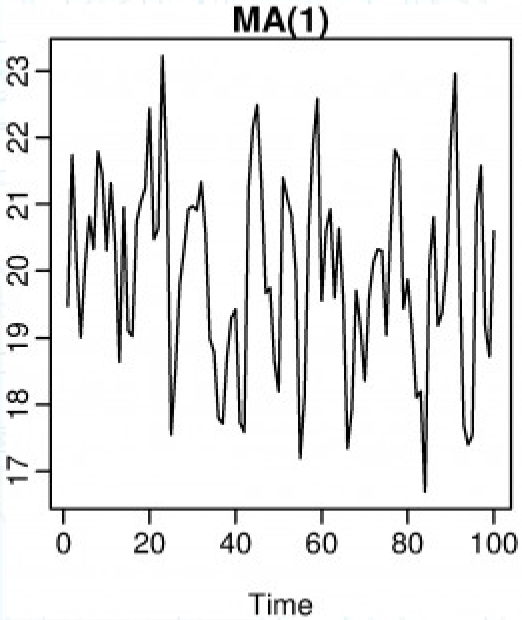
$$\Delta y_t = (\theta - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \longrightarrow \quad \Delta y_t = b y_{t-1} + \varepsilon_t$$

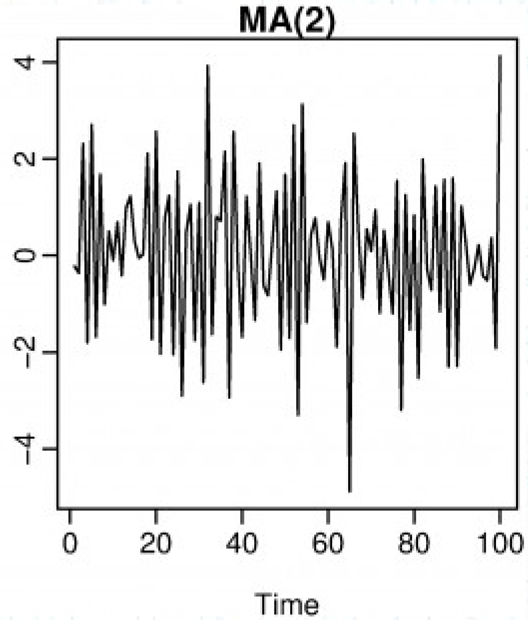
- Параметр b оценивается с помощью метода наименьших квадратов, после чего проверяется статистическая значимость оценки. Расчётная статистика имеет распределение Дики – Фуллера:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{b}}{se(\hat{b})} \sim DF_I$$

Модель скользящего среднего (Moving Average - MA)

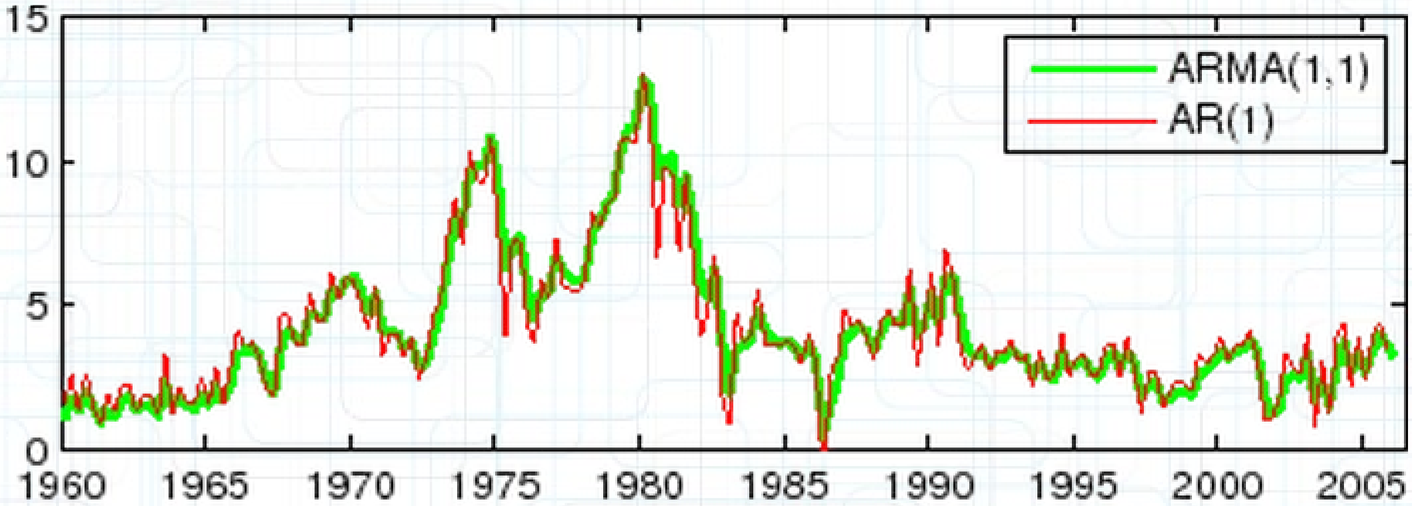
$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$





Модель ARMA (autoregressive moving average)

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i}.$$



ARIMA - интегрированная модель авторегрессии скользящего среднего (Box-Jenkins model)

Временной ряд называется интегрированным порядка k, если разности ряда порядка k являются стационарными

$$\Delta^d X_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i \Delta^d X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Y_t → AR filter → Integration filter → MA filter → ε_t

(long term) (stochastic trend) (short term) (white noise error)

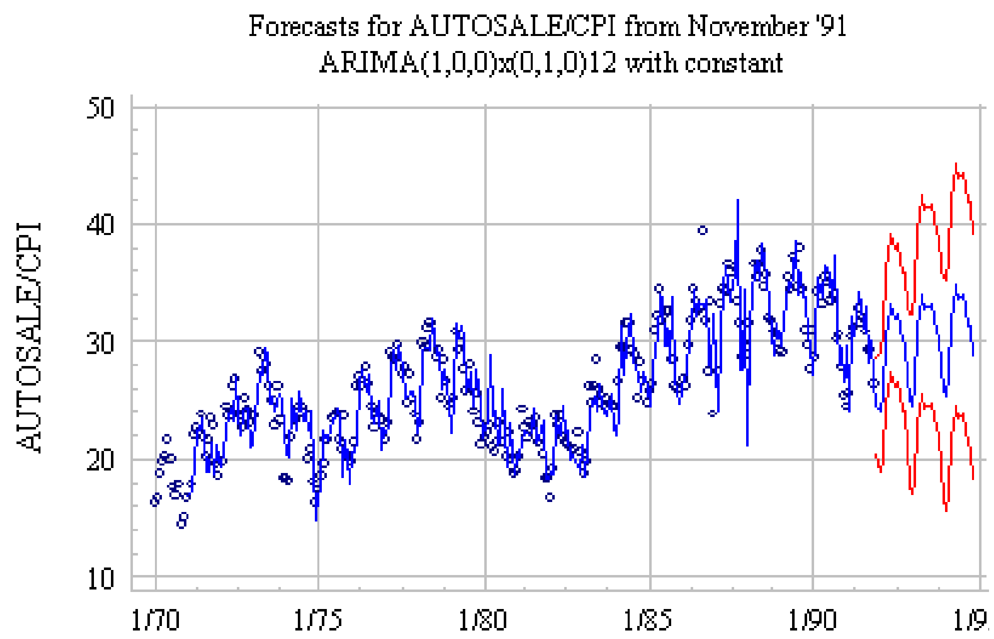
ARIMA (2,0,1) $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_1 \varepsilon_{t-1}$

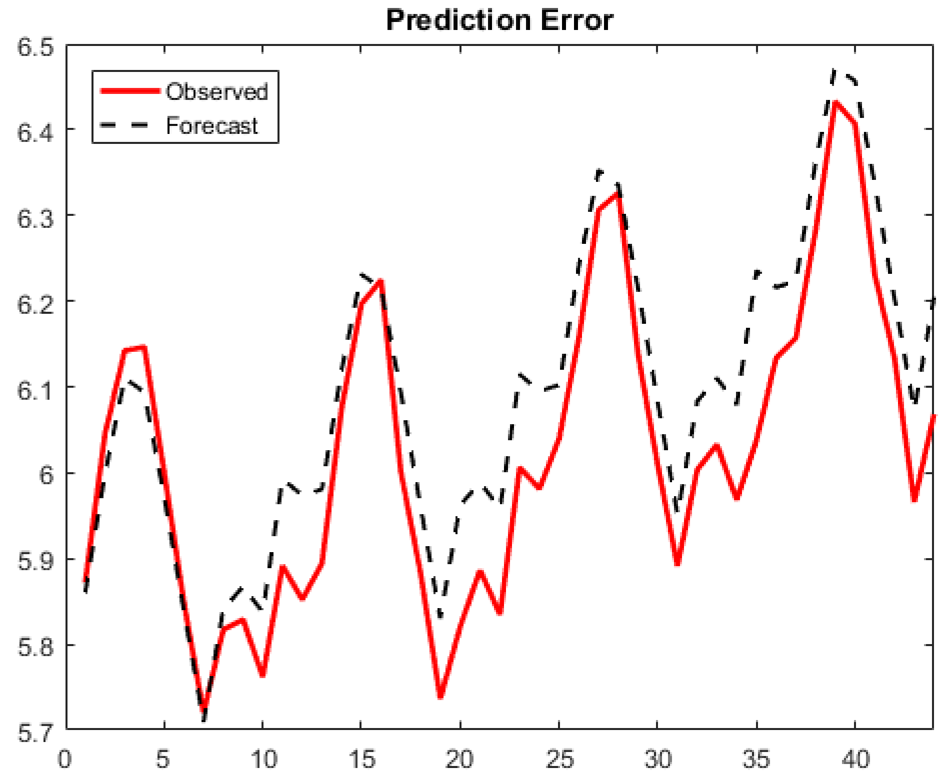
ARIMA (3,0,1) $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + b_1 \varepsilon_{t-1}$

ARIMA (1,1,0) $\Delta y_t = a_1 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$, where $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

ARIMA (2,1,0) $\Delta yt = a_1 \Delta y_{t-1} + a_2 \Delta y_{t-2} + \varepsilon_t$ where $\Delta yt = yt - yt-1$

ARIMA

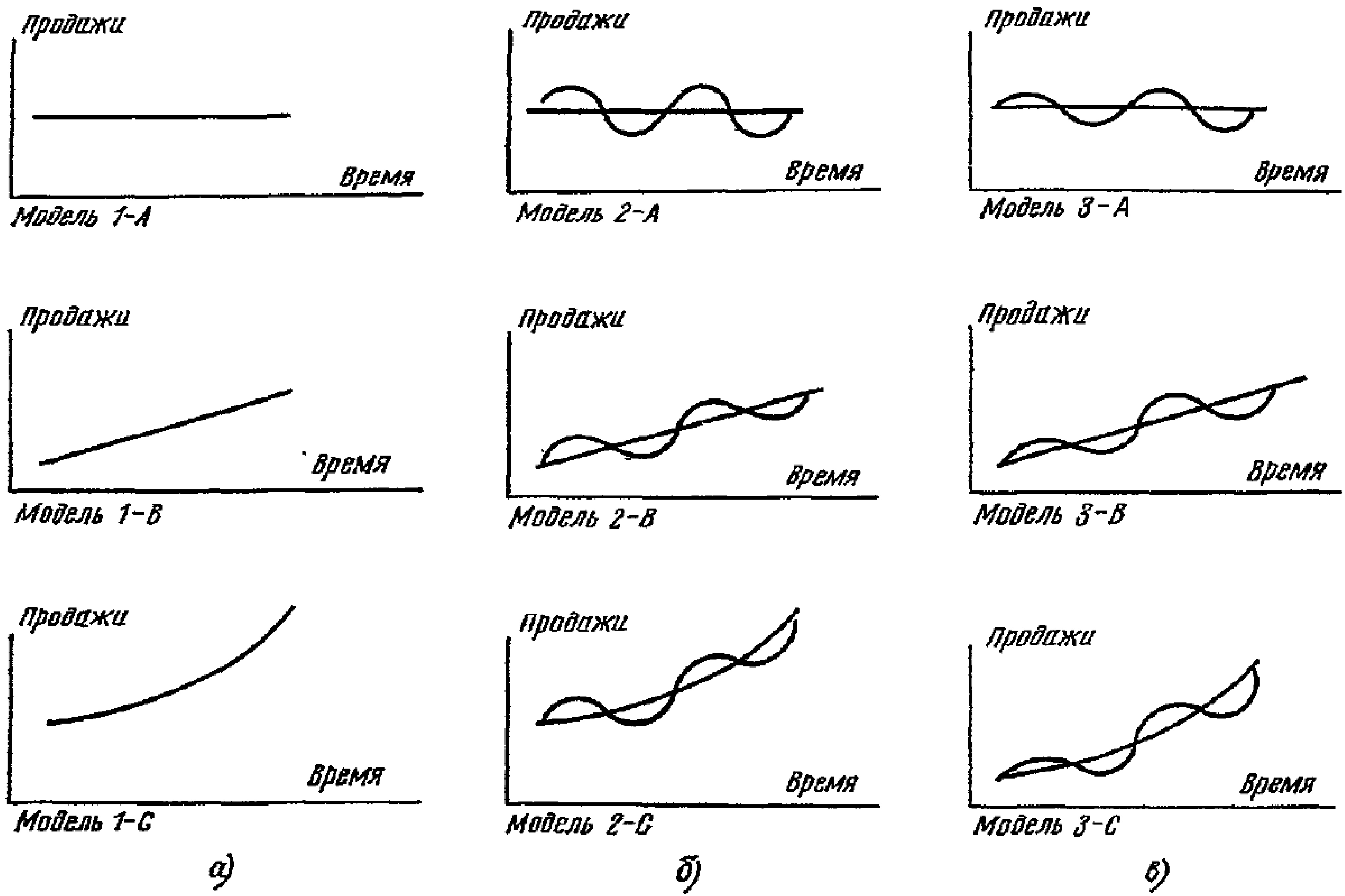

Forecasts for AUTOSALE/CPI from November '91
ARIMA(1,0,0)x(0,1,0)12 with constant
AUTOSALE/CPI
50
40
30
20
10
1/70
1/75
1/80
1/85
1/90
actual
forecast
95.0% limits


Prediction Error
Observed
Forecast
6.5
6.4
6.3
6.2
6.1
6
5.9
5.8
5.7
0
5
10
15
20
25
30
35
40

Общий план решения задачи предсказания

- Подготовка данных – сведение к стационарному случайному процессу
- Определение типа модели
- Оценка параметров
- Предсказание

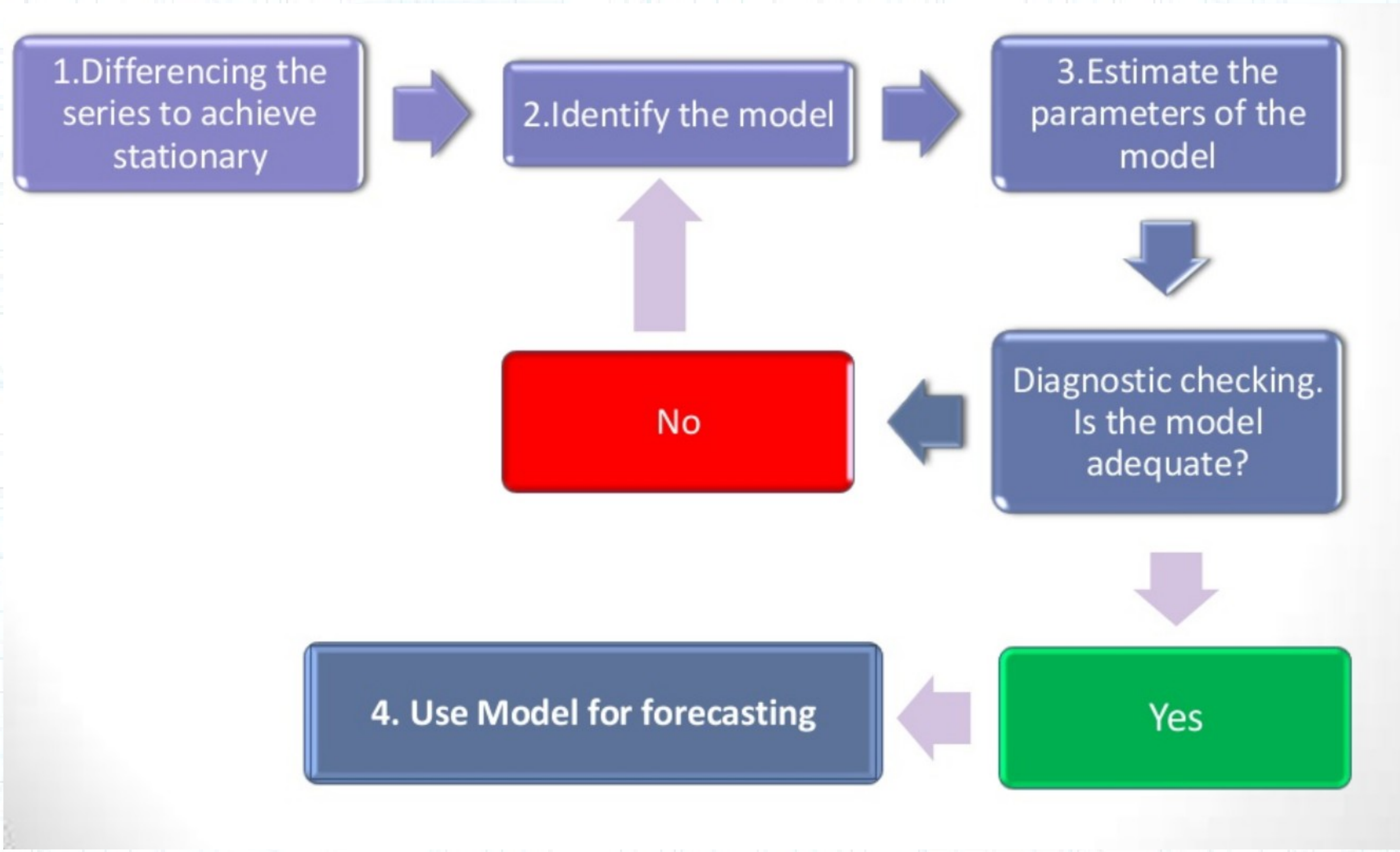
Модели с трендом и сезонным эффектом



Моделирование с помощью ARIMA(p,d,q)

- Стационарность – определение правильного d, исключение сезонности
- Подбор p и q, используя ACF, PACF и unit root тесты
- Проверка – расчет оценки качества
- Оценка невязки – является ли она белым шумом?
- Предсказание

Авторы Бокс и Дженкинс предлагают схему:



Стационарность

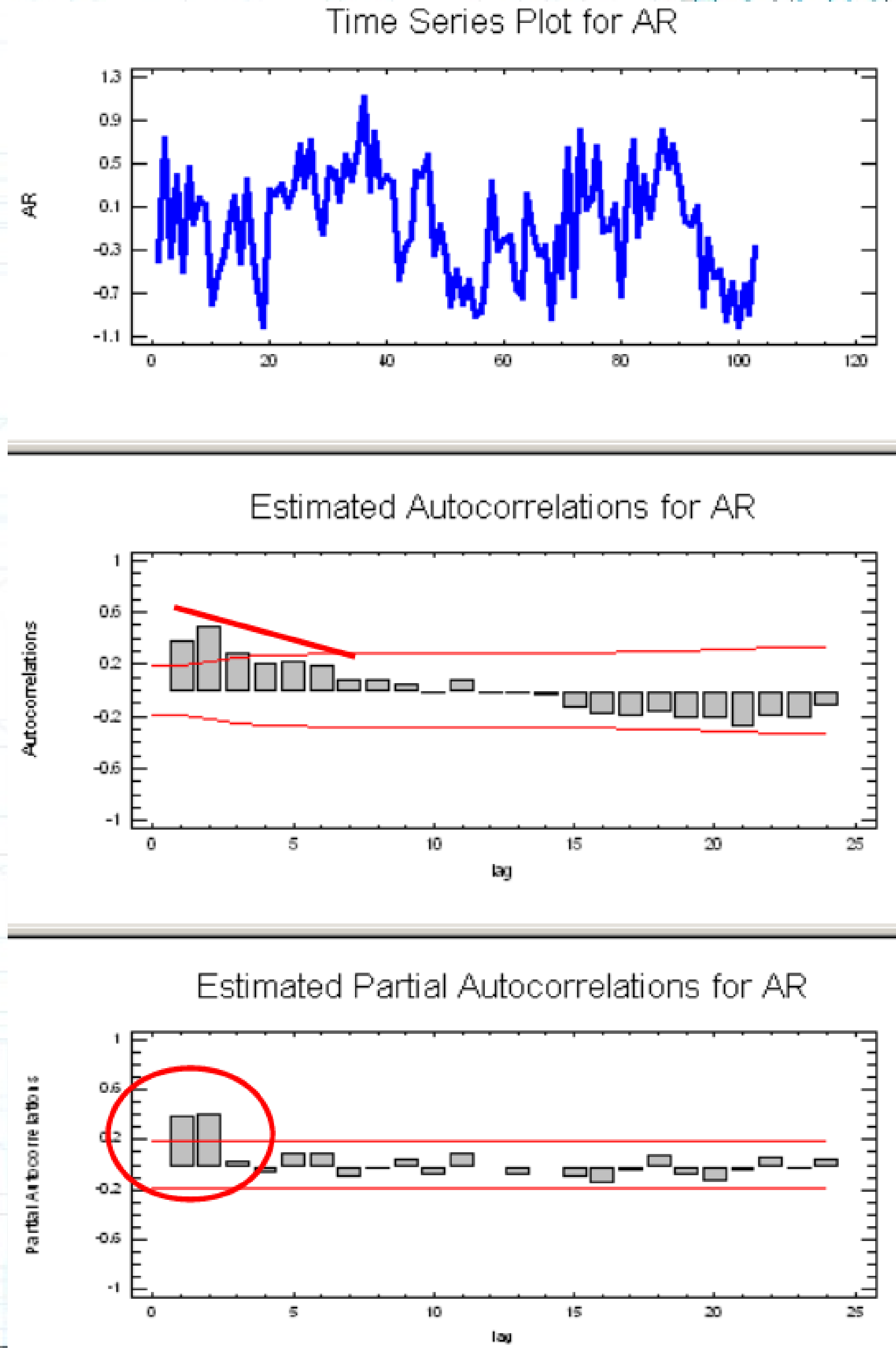
- Процесс из разностей какого порядка является стационарным?
- Исключить сезонность, используя
  - сезонные добавки/множители к среднему значению за этот сезон
  - сезонную ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q) модель, например ARIMA(0,0,0)x(0,1,0): $\hat{Y}_t = Y_{t-12} + \mu$

Автокорреляция (ACF)

- Корреляция между значениями процесса, с зафиксированным расстоянием по времени между ними
- Частичная автокорреляция (PACF) - “часть корреляции между Y_t и Y_{t-k}, которая не обясняется промежуточными корреляциями”. Коэффициент в AR-модели

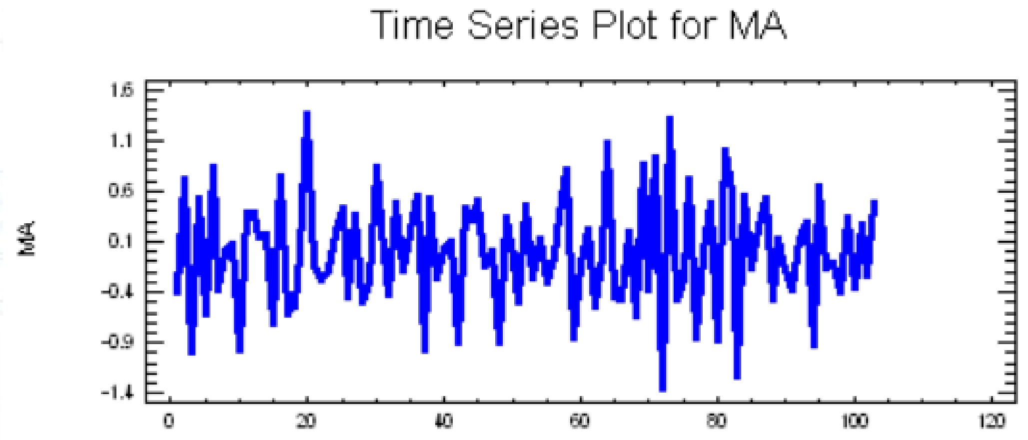
Признаки AR модели

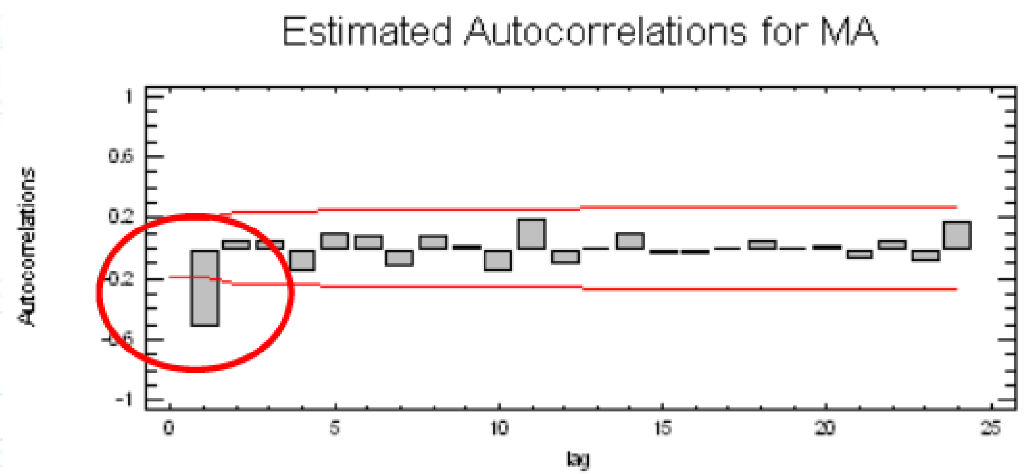
- Процесс стремится вернуться к некоторому среднему значению
- ACF убывает плавно, PACF - резко

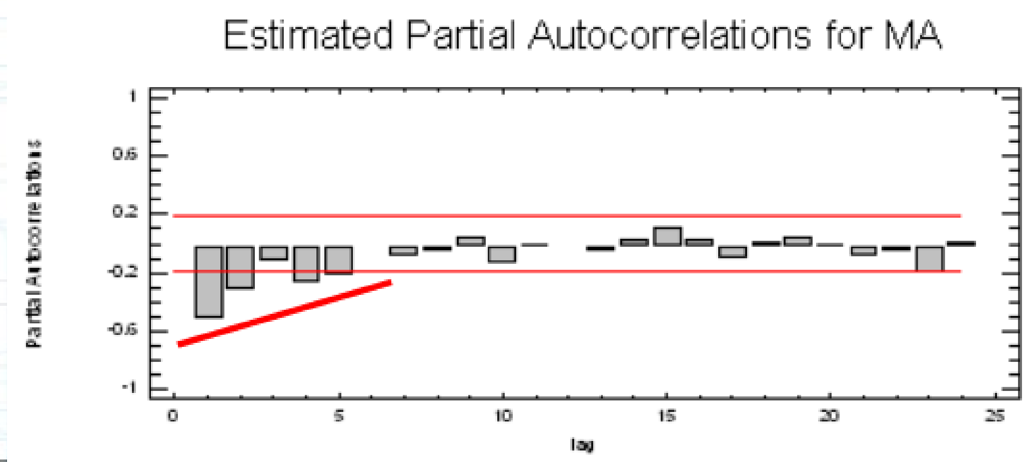


Признаки MA модели

- Похожа на белый шум
- ACF убывает резко, PACF - постепенно



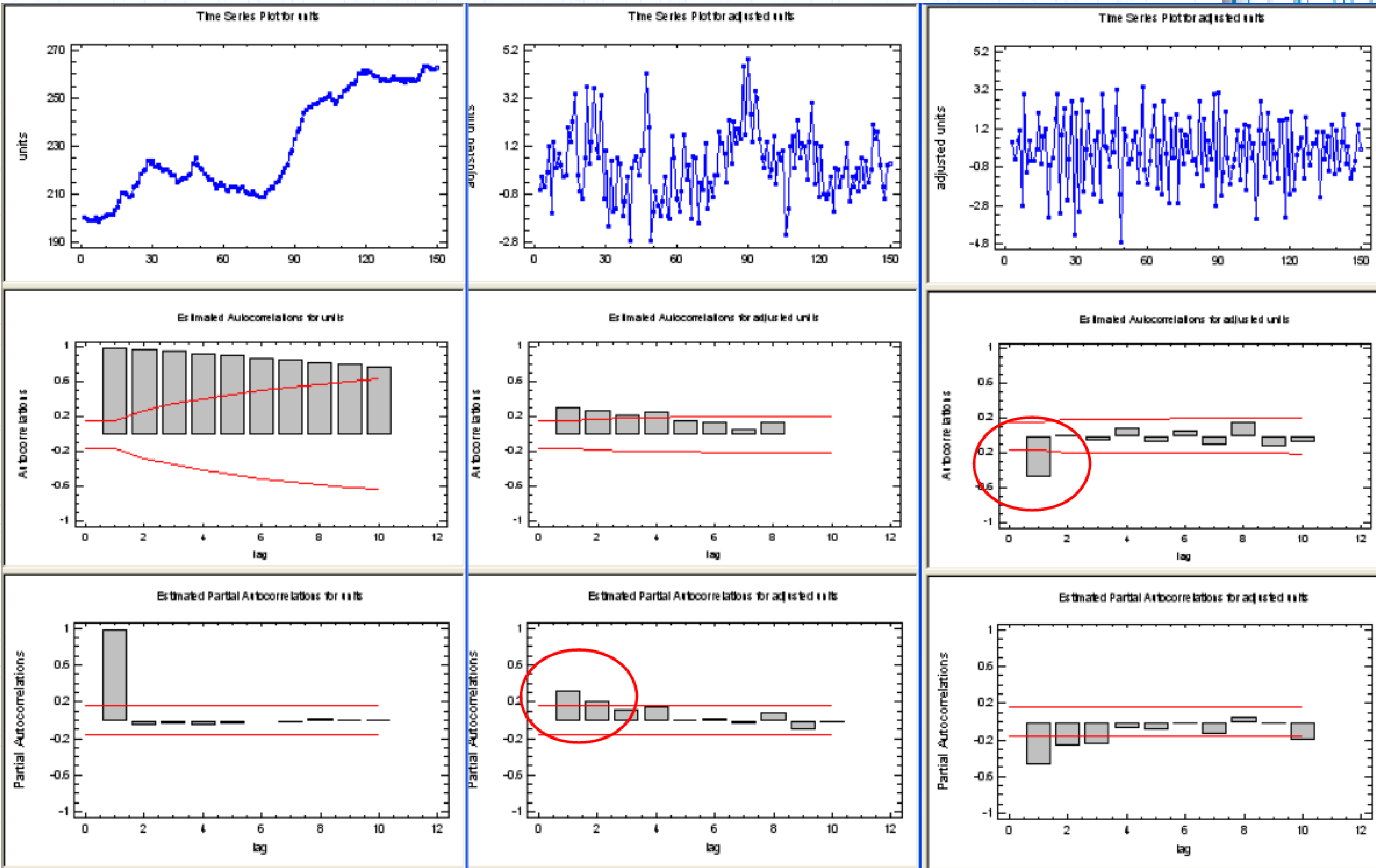




AR или MA

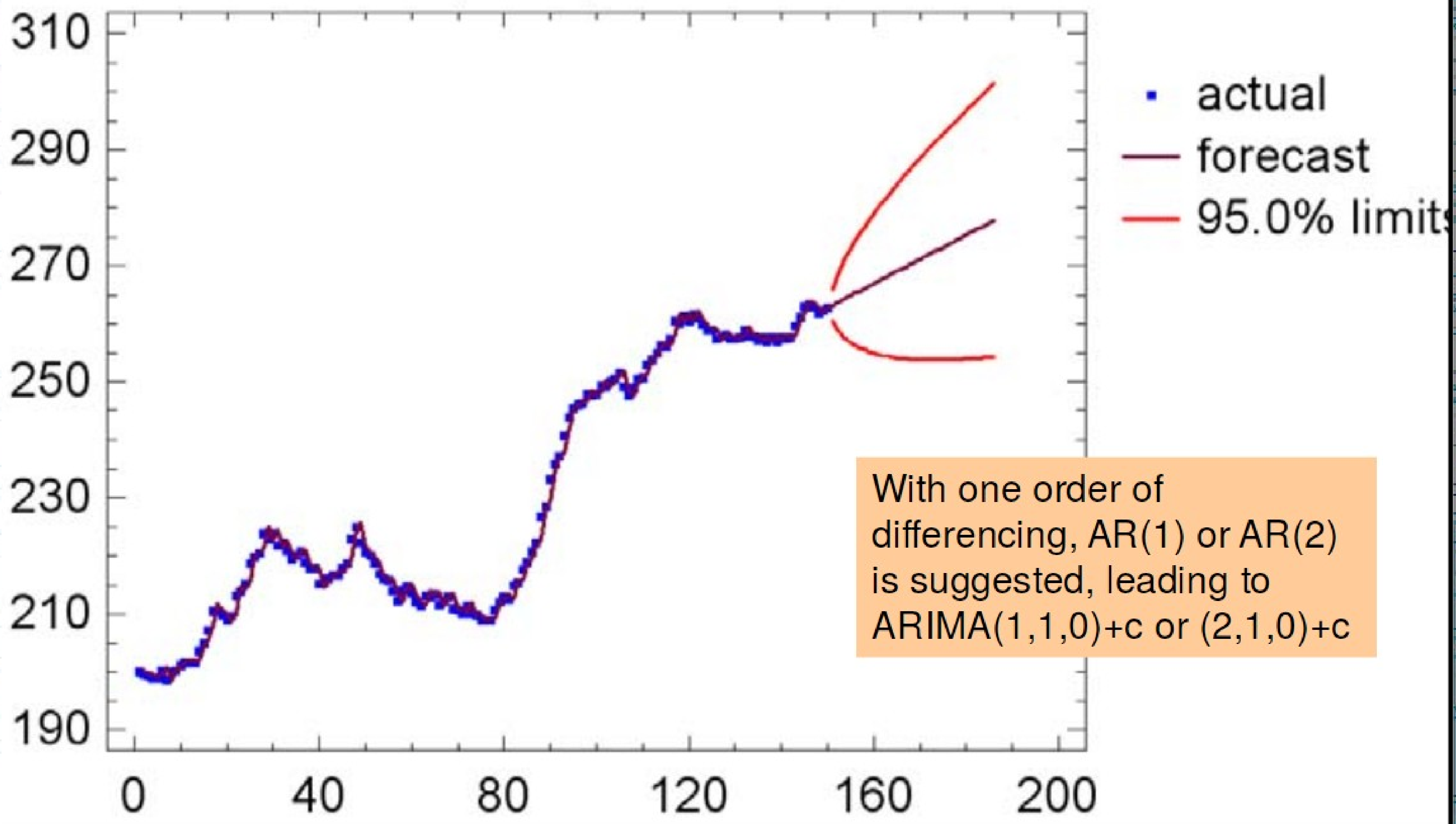
- Все зависит от порядка d дифференцирования процесса
- Исходный процесс обычно похож на AR
- После вычисления нескольких разностей он превращается в MA-процесс
- Не нужно дифференцировать слишком много раз – это переобучение

Пример



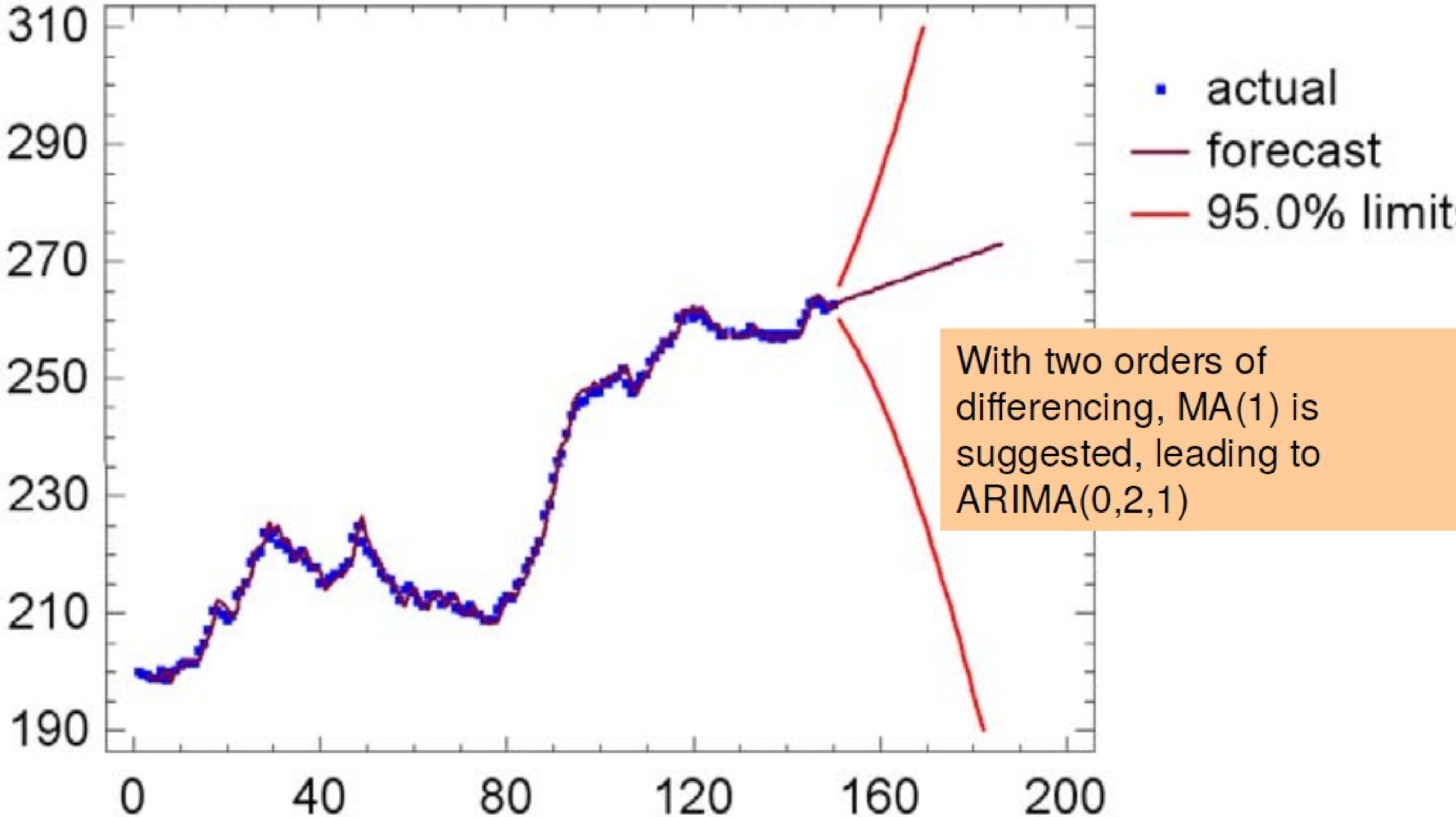
Original series: nonstationary   1st difference: AR signature   2nd difference: MA signature

Пример ARIMA(1,1,0)



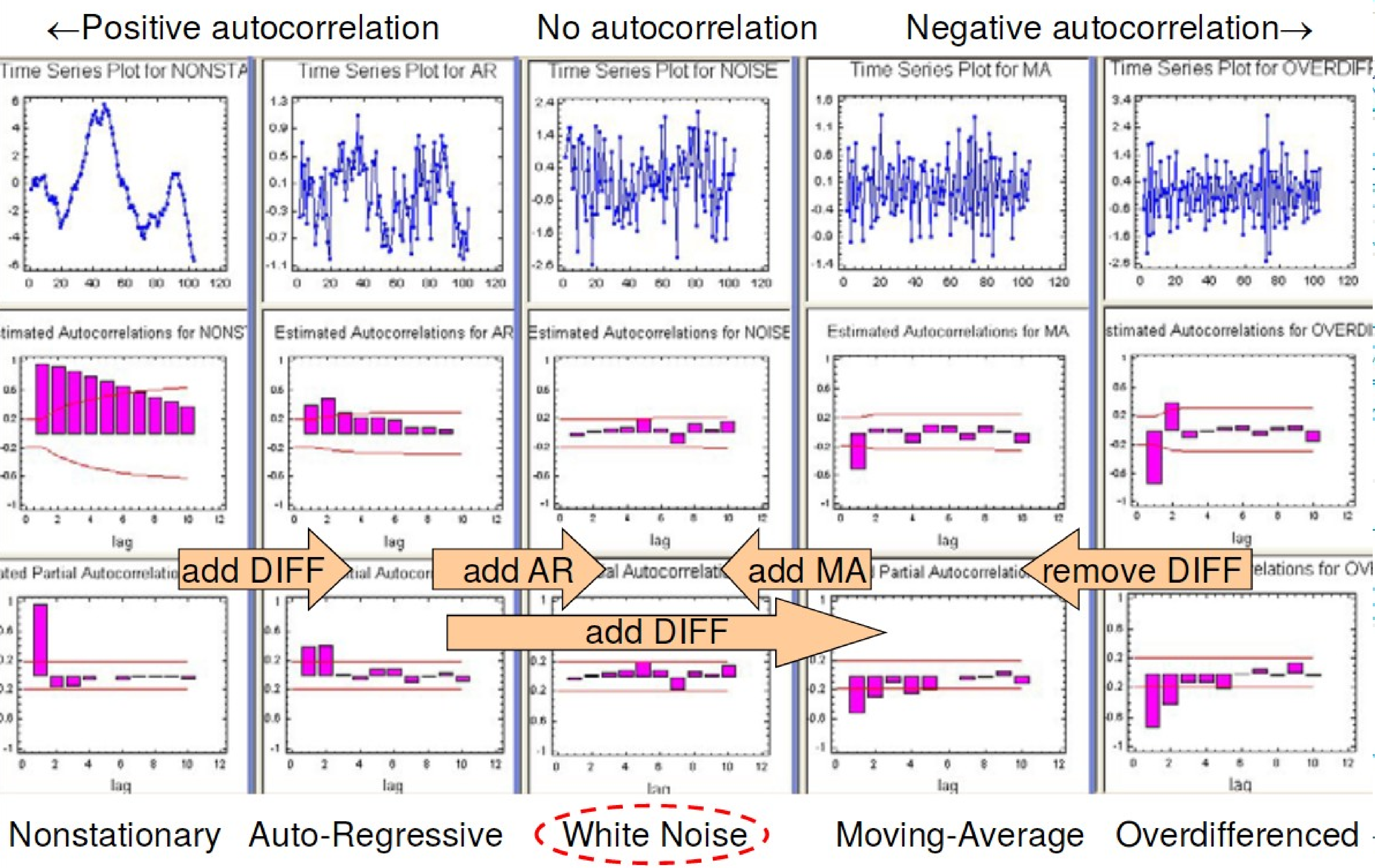
With one order of differencing, AR(1) or AR(2) is suggested, leading to ARIMA(1,1,0)+c or (2,1,0)+c

Пример ARIMA(0,2,1)

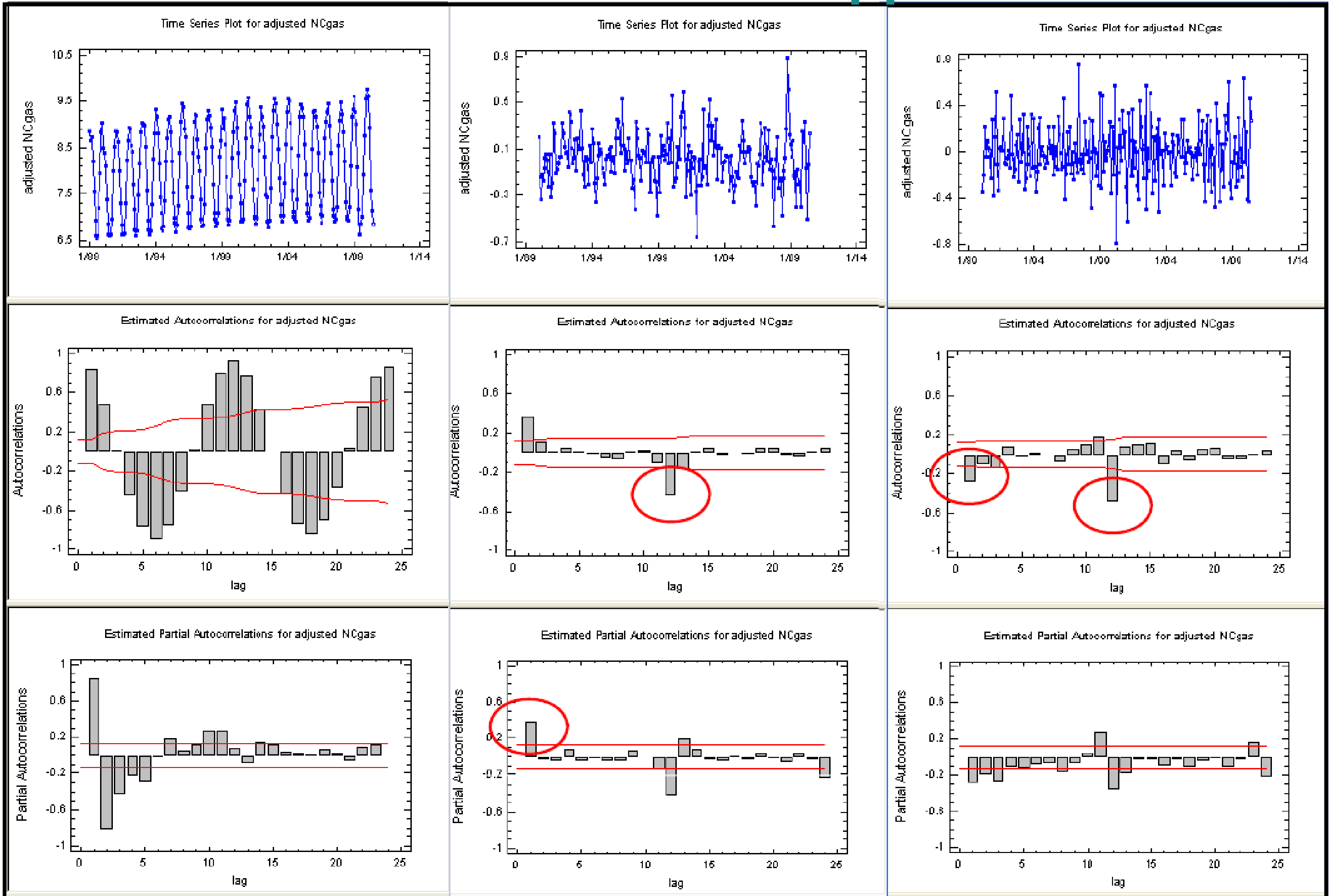


With two orders of differencing, MA(1) is suggested, leading to ARIMA(0,2,1)

Подбор параметров модели



Сезонная ARIMA-модель



Original series: nonstationary   Seas. diff: need AR(1) & SMA(1)   Both diff: need MA(1) & SMA(1)

Реализация на Python

- Siddharth Yadav. “Everything you can do with a time series”
- https://www.kaggle.com/thebrownviking20/everything-you-can-do-with-a-time-series