

1 Вынужденные плоские колебания слоя

Рассмотрим упругий слой, занимающий область

$$\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty, -H \leq x_2 \leq H\}$$

Предположим, что волновое поле имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_2 = u_2(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Для решения задачи будем использовать представления Ляме

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \quad (2)$$

Волновые потенциалы φ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + k_1^2 \varphi = 0, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} + k_2^2 \psi = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu},$$
$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=\pm H} = 0, \\ \sigma_{22}|_{x_2=H} = p^+(x_1), \\ \sigma_{22}|_{x_2=-H} = p^-(x_1) \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим функцию $f(x_2)$, определенную на отрезке $[-H, H]$. Её можно разбить на две части:

$$f(x_2) = f^+(x_2) + f^-(x_2),$$

где

$$f^+(x_2) = \frac{1}{2} [f(x_2) + f(-x_2)],$$

$$f^-(x_2) = \frac{1}{2} [f(x_2) - f(-x_2)].$$

Таким образом, любую функцию можно разбить на симметричную и антисимметричную часть. Разобьём задачу о вынужденных колебаниях слоя на две:

1. Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ — симметричная функция по x_2 , $\psi(x_1, x_2)$ — антисимметричная функция по x_2 , то есть

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, -x_2),$$

$$\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_1, -x_2)$$

В этом случае $u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}$ — симметричная функция по x_2 , $u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}$ — антисимметричная функция по x_2 .

$$\sigma_{12} = \mu (u_{1,2} + u_{2,1})$$

— антисимметричная функция по x_2 .

$$\sigma_{22} = \lambda (u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2} = \lambda u_{1,1} + (\lambda + 2\mu) u_{2,2}$$

— симметричная функция по x_2 .

Схематично напряжения в слое можно изобразить следующим образом:

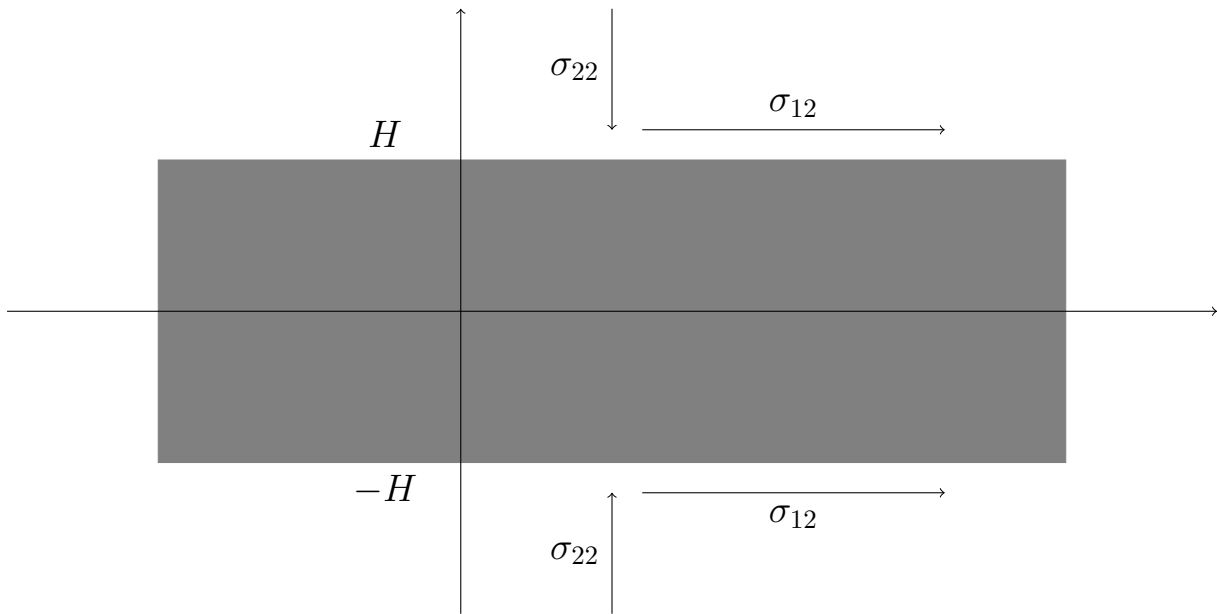


Рис. 1: Схема напряжений

Такая задача может быть истолкована как задача продольного растяжения-сжатия.

2. Пусть $\varphi(x_1, x_2)$ — антисимметричная функция по x_2 , $\psi(x_1, x_2)$ — симметричная функция по x_2 , то есть

$$\varphi(x_1, x_2) = -\varphi(x_1, -x_2),$$

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, -x_2)$$

В этом случае u_1 — антисимметричная функция по x_2 , u_2 — симметричная функция по x_2 , σ_{12} — симметричная функция по x_2 , σ_{22} — антисимметричная функция по x_2 . Схематично напряжения в слое можно изобразить следующим образом:

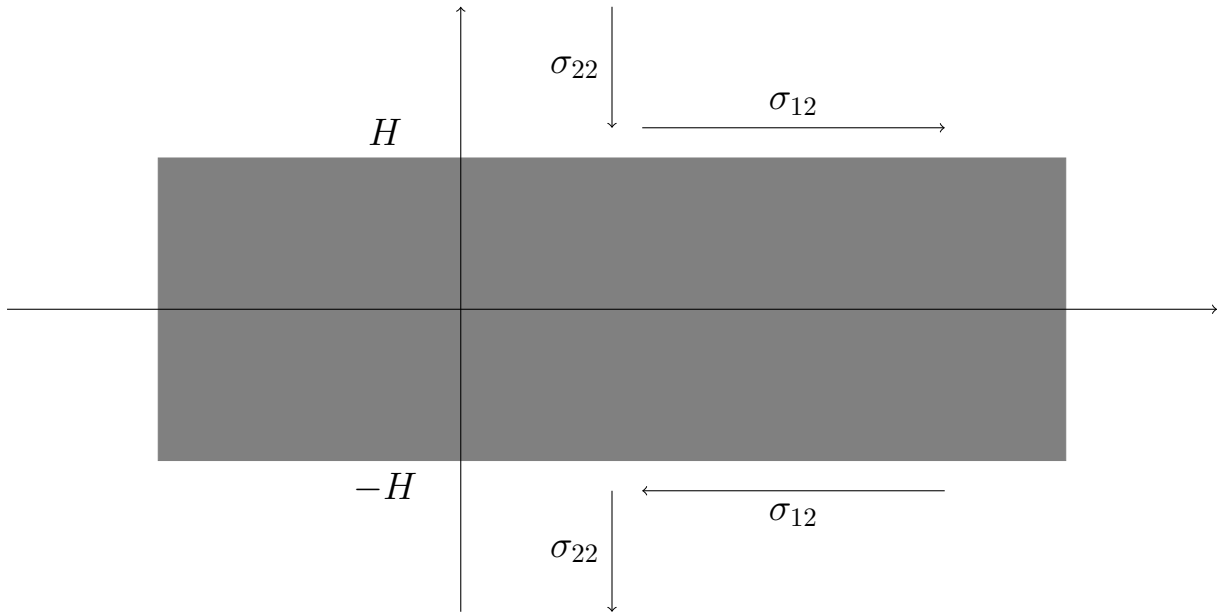


Рис. 2: Схема напряжений

Такая задача может быть истолкована как задача поперечного изгиба.

Рассмотрим симметричную задачу, считаем φ — симметричной функцией по x_2 , ψ — антисимметричная функция по x_2 .

Для решения задачи используем интегральное преобразование Фурье в виде

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1 \\ \tilde{\psi}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1 \end{cases}$$

Уравнения (3) приобретают вид:

$$\begin{cases} -\alpha^2 \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}'' + k_1^2 \tilde{\varphi} = 0, \\ -\alpha^2 \tilde{\psi} + \tilde{\psi}'' + k_2^2 \tilde{\psi} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

или

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'' - (\alpha^2 - k_1^2) \tilde{\varphi} = 0, \\ \tilde{\psi}'' - (\alpha^2 - k_2^2) \tilde{\psi} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Решение симметричной задачи строим в виде:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2, \\ \tilde{\psi} = B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha - k_i^2}$$

Найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -i\alpha\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}' = -i\alpha A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2, \\ \tilde{u}_2 = \tilde{\varphi}' + i\alpha\tilde{\psi} = A\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + i\alpha B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 \end{cases} \quad (8)$$

Найдём напряжения:

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu (\tilde{u}'_1 - i\alpha u_2) = \mu (-i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + B\gamma_2^2 \operatorname{sh} \gamma_2 x_2 - i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + \alpha^2 B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2)$$

или

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu [-2i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 + (2\alpha^2 - k_2^2) B \operatorname{sh} \gamma_2 x_2]$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = -i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}'_2 =$$

$$= -i\alpha\lambda(-i\alpha A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + B\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x_2) + (\lambda + 2\mu)(A\gamma_1^1 \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + i\alpha\gamma_2 B \operatorname{ch} \gamma_2 x_2)$$

Соберём множитель при $A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2$:

$$-\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\gamma_1^1 = -\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\left(\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right) = \mu(2\alpha^2 - k_2^2),$$

Следовательно, σ_{22} приобретает вид:

$$\tilde{\sigma}_{22} = \mu [(2\alpha^2 - k_2^2) A \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 + 2i\alpha\gamma_2 B \operatorname{ch} \gamma_2 x_2]$$

Граничные условия для симметричной задачи имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{12}|_{x_2=H} = 0, \\ \sigma_{22}|_{x_2=H} = p(x_1), \end{cases} \quad (9)$$

$$p(x_1) = \frac{1}{2} [p^+(x_1) + p^-(x_1)]$$

В трансформантах граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} -2i\alpha\gamma_1 A \operatorname{sh} \gamma_1 H + (2\alpha^2 - k_2^2) B \operatorname{sh} \gamma_2 H = 0, \\ (2\alpha^2 - k_2^2) A \operatorname{ch} \gamma_1 H + 2i\alpha\gamma_2 B \operatorname{ch} \gamma_2 H = \tilde{p}_0(\alpha), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\tilde{p}_0(\alpha) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Решаем систему (10):

$$\begin{cases} A = -\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta} (2\alpha^2 - k_2^2) \operatorname{sh} \gamma_2 H \\ B = -\frac{\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta} 2i\alpha\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_1 H, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Delta = 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H \operatorname{ch} \gamma_2 H - (2\alpha^2 - k_2^2)^2 \operatorname{sh} \gamma_2 H \operatorname{ch} \gamma_1 H$$

Подставляем (11) в общее решение (8) и получаем:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = \frac{i\alpha\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta} [(2\alpha^2 - k_2^2) \operatorname{sh} \gamma_2 H \operatorname{ch} \gamma_1 x_2 - 2\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H \operatorname{ch} \gamma_2 x_2], \\ \tilde{u}_2 = -\frac{\gamma_1\tilde{p}_0(\alpha)}{\Delta} [(2\alpha^2 - k_2^2) \operatorname{sh} \gamma_2 H \operatorname{sh} \gamma_1 x_2 - 2\alpha^2 \operatorname{sh} \gamma_1 H \operatorname{sh} \gamma_2 x_2] \end{cases} \quad (12)$$

Осталось только обратить преобразование Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1(\alpha, x_1) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_2(\alpha, x_1) e^{-i\alpha x_1} d\alpha \end{array} \right. \quad (13)$$

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения (13). Они определяются уравнением

$$\Delta(\alpha, \omega) = 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H \operatorname{ch} \gamma_2 H - (2\alpha^2 - k_2^2)^2 \operatorname{sh} \gamma_2 H \operatorname{ch} \gamma_1 H \quad (14)$$

Дисперсионное уравнение (14) называется уравнением Релея-Лэмба. Рассмотрим его при $\alpha = 0$:

$$\Delta(\alpha, \omega) = -k_2^4 \operatorname{sh} \sqrt{-k_2^2} H \operatorname{ch} \sqrt{-k_1^2} H = -k_2^4 i \sin k_2 H \cos k_1 H \quad (15)$$

Уравнение (15) распадается на множители:

$$\sin k_2 H = 0, \quad \cos k_1 H = 0.$$

Решаем эти уравнения:

$$k_2 H = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

следовательно

$$\omega_n^{(1)} = \frac{\pi n c_2}{H}$$

$$k_1 H = \frac{\pi(2n+1)}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

и

$$\omega_n^{(2)} = \frac{\pi(2n+1)c_1}{2H}$$

$\omega_n^{(1)}$ и $\omega_n^{(2)}$ образуют два семейства критических частот. В дальнейшем считаем, что частота не совпадает ни с одной из критических.

Свойства дисперсионного уравнения

1. $\Delta(\alpha, \omega)$ — аналитическая функция по α и ω ;
2. $\Delta(\alpha, \omega)$ — симметричная по α и ω . Если α — корень дисперсионного уравнения, то корнями также являются $-\alpha, \bar{\alpha}, -\bar{\alpha}$.
3. Каждая из дисперсионных кривых пересекает ось абсцисс под прямым углом;

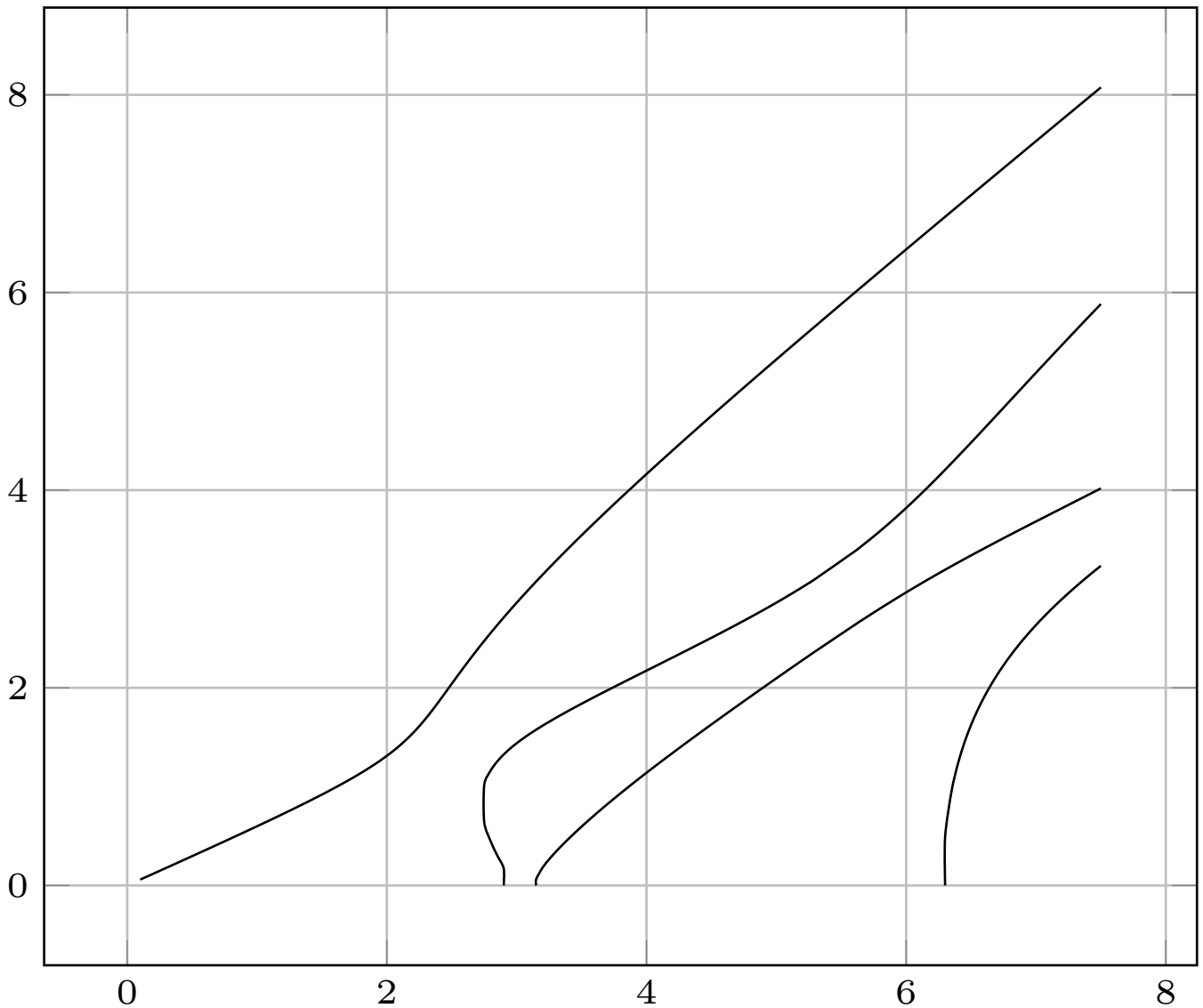


Рис. 3: График дисперсионных кривых. Вертикальная ось соответствует α , горизонтальная — $k_2 = \omega/c_2$

Подынтегральные выражения (13) имеют конечное число вещественных полюсов первого порядка и бесконечное множество комплексных.

Воспользуемся принципом предельного поглощения. Добавим в уравнения колебаний слагаемые, характеризующие вязкое трение. При этом ω заменяется на $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Каждый из корней дисперсионного уравнения зависит от частоты колебаний:

$$\alpha = \alpha(\omega),$$

Если α и ω являются комплексными величинами ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$), то из соотношений Коши-Римана следует, что

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \omega_2}$$

Из последнего равенства при $\omega_2 > 0$ следует, что

$$\operatorname{sgn} \alpha_2 = \operatorname{sgn} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega_1}$$

и направление смещения корней при добавлении в уравнении слагаемых, характеризующих вязкое трение, зависит от угла наклона дисперсионной кривой. Разделяют следующие случаи:

1. Первый регулярный случай.

Дисперсионное уравнение имеет N положительных вещественных корней, для каждого из которых

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} > 0$$

В этом случае все положительные вещественные корни смещаются в верхнюю полуплоскость, отрицательные — в нижнюю. Контур интегрирования по вещественной оси заменяется на контур σ всюду, за исключением окрестностей полюсов подынтегральной функции, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. При этом положительные корни дисперсионного урав-

нения огибаются в нижней полуплоскости, отрицательные — в верхней. Поле перемещений при этом складывается из суперпозиции N бегущих волн, распространяющихся на бесконечность от источника колебаний и бесконечного множества затухающих волн.

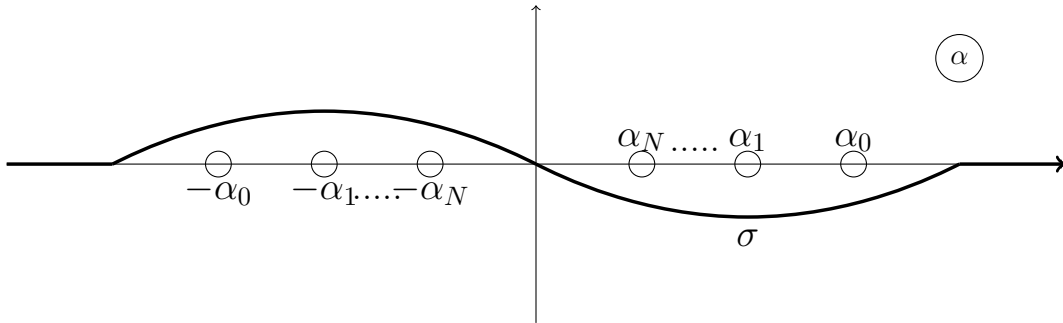


Рис. 4: Контур интегрирования

2. Второй регулярный случай

Дисперсионное уравнение имеет $N - 1$ положительный вещественный корень, для каждого из которых

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} > 0$$

и ещё один положительный вещественный корень, наименьший по величине, для которого

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} < 0$$

Положительные вещественные корни отклоняются в верхнюю полуплоскость, за исключением наименьшего, который отклоняется в нижнюю полуплоскость.

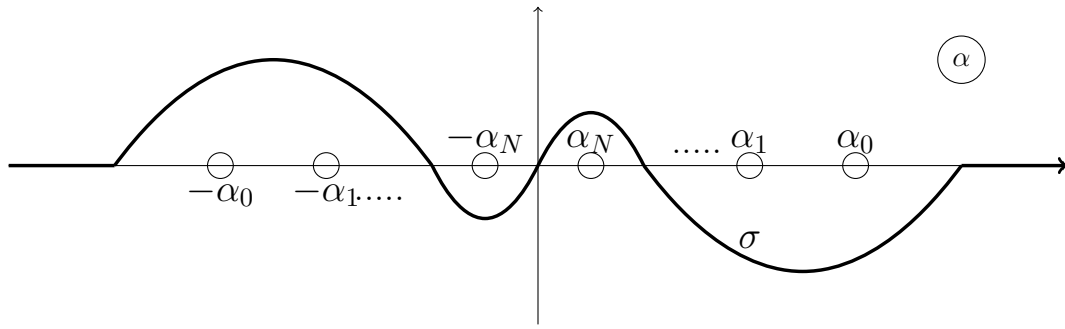


Рис. 5: Контур интегрирования

Контур интегрирования по вещественной оси заменяется на контур σ всюду, за исключением окрестностей полюсов подынтегральной функции, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. При этом положительные корни дисперсионного уравнения огибаются в нижней полуплоскости, за исключением наименьшего, который огибается в верхней. Отрицательные корни дисперсионного уравнения огибаются в верхней полуплоскости, за исключением наименьшего по абсолютной величине, который огибается в верхней. Поле перемещений при этом складывается из суперпозиции $N - 1$ бегущей волны, распространяющихся на бесконечность от источника колебаний, одной волны, идущей из бесконечности к источнику колебаний, и бесконечного множества затухающих волн.

Возникновение обратной волны также называют аномальной дисперсией волн.

3. Нерегулярный случай.

Существует корень дисперсионного уравнения, для которого

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = 0$$

— каждый раз требует отдельного рассмотрения.