1 Колебания ограниченных упругих тел

1.1 Радиальные колебания шара

Рассмотрим упругий шар в сферической системе координат r, φ, θ. Считаем, что из всех компонент вектора перемещений отлична от нуля только u_θ и она зависит только от радиальной координаты. Считаем, что шар находится в состоянии установившихся колебаний

$$\begin{cases} u_\varphi = u_\theta = 0, \\ u_r = u(r)e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Уравнения Ляме сводятся к равенству

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u\right)\right] + \frac{\omega^2}{c_1^2}u = 0, \tag{1}$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$u|_{r=R} = Ce^{-i\omega t} \tag{2}$$

Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{\omega r}{c_1},$$

следовательно

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{\omega r}{c_1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 u\right)\right] + u = 0, \tag{3}$$

Сделаем замену

$$u = \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{x}\right] \tag{4}$$

Подставим (4) в уравнение (3):

$$u = \frac{F'}{x} - \frac{F}{x^2},$$

$$x^2 u = xF' - F,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 u\right) = F' + xF'' - F' = xF''$$

Уравнение (4) сводится к виду:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F''}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{F}{x}\right) = 0 \tag{5}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'' + F}{x}\right) = 0 \tag{6}$$

Интегрируем:

$$F'' + F = C_1 c, \tag{7}$$

где C_1 — неопределённая константа. Общее решение (7) имеет вид:

$$F = C_1 x + A\cos x + B\sin x$$

Найдём функцию перемещения:

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1 x + A\cos x + B\sin x}{x}\right) = -\frac{A\sin x - B\cos x}{x} - \frac{A\cos x + B\sin x}{x^2} \tag{8}$$

Потребуем ограниченности решения при $x \to 0$. Перегруппируем слагаемые в (8) и соберём множители при A и B:

$$u = -A\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} + B\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \tag{9}$$

Рассмотрим множители при A и B при $x \to 0$:

$$\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} = \frac{x\left(x - \frac{x^3}{6} + ...\right) + 1 - \frac{x^2}{2} + ...}{x^2} \approx \frac{1}{x^2} \to +\infty,$$

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + ...\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^2} \approx -\frac{x}{3} \to 0$$

Множитель при A стремится к бесконечности и следовательно, $A = 0$. Решение имеет вид:

$$u = B\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \tag{10}$$

Перейдём к переменной r:

$$u = B\left(\frac{c_1}{\omega r}\right)^2\left[\frac{\omega r}{c_1}\cos\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega r}{c_1}\right)\right] \tag{11}$$

Подставим (11) в граничное условие (2):

$$B\left(\frac{c_1}{\omega R}\right)^2\left[\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)\right] = C \tag{12}$$

Следовательно

$$B = C\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)^2\left[\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)\right]^{-1}$$

и

$$u = C\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{\frac{\omega r}{c_1}\cos\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega r}{c_1}\right)}{\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)} \tag{13}$$

Рассмотрим знаменатель выражения (13):

$$\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) = 0 \tag{14}$$

Равенство (14) является частотным уравнением для радиальных колебаний шара, заключённого в жёсткую обойму. Введём новую переменную:

$$\gamma = \frac{\omega R}{c_1}$$

Уравнения (14) принимает вид:

$$\gamma \cos\gamma - \sin\gamma = 0 \tag{15}$$

или

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\gamma} \tag{16}$$

Корни уравнения (16) имеют асимптотику

$$\gamma_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi,\ n \to \infty$$

Уточним асимптотику. Ищем корни в виде:

$$\gamma_n = \gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)},\ \gamma_n^{(1)} << \gamma_n^{(0)} \tag{17}$$

где

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{2n+1}{2}\pi.`$$

Подставим (17) в (16):

$$\operatorname{ctg}\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right) = \frac{1}{\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}} \tag{18}$$

или

$$\frac{\cos\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right)}{\sin\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right)} = \frac{1}{\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}} \tag{19}$$

Следовательно

$$\frac{\cos\gamma_n^{(0)}\cos\gamma_n^{(1)}-\sin\gamma_n^{(0)}\sin\gamma_n^{(1)}}{\sin\gamma_n^{(0)}\cos\gamma_n^{(1)}+\cos\gamma_n^{(0)}\sin\gamma_n^{(1)}}=\frac{1}{\gamma_n^{(0)}}\frac{1}{1+\gamma_n^{(1)}/\gamma_n^{(0)}} \tag{20}$$

Преобразуем выражение (20):

$$\cos\gamma_n^{(0)}=0,$$

$$\sin\gamma_n^{(0)}=(-1)^n,$$

$$\sin\gamma_n^{(1)}\approx\gamma_n^{(1)},$$

$$\cos\gamma_n^{(1)}\approx 1.$$

$$\frac{1}{1+\gamma_n^{(1)}/\gamma_n^{(0)}}\approx 1$$

Следовательно

$$\gamma_n^{(1)}=-\frac{1}{\gamma_n^{(0)}}$$

и

$$\gamma_n=\frac{2n+1}{2}\pi-\frac{2}{(2n+1)\pi}+O(n^{-3})$$

Зная γ_n, можно найти собственные частоты

$$\omega_n=\frac{\gamma_n c_1}{R}$$

Если $\omega=\omega_n$, неоднородная задача неразрешима, однородная — имеет нетривиальное решение (собственная форма колебаний).

Для того, чтобы построить решение, когда частота колебаний совпадает с собственной, используется преобразование Лапласа.

1.2 Свойства собственных частот

Рассмотрим упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью S. Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{21}$$

σ_{ij} — напряжения, ρ — плотность, ω — частота колебаний, $\underline{u}$ — вектор перемещений.

Граничные условия имеют вид:

$$S = S_u \cup S_\sigma,\ u_i|_{S_u} = 0,\ \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0$$

Собственная частота — это значение ω, на которой однородное уравнение колебаний (22) имеет нетривиальное решение при однородных граничных условиях. Набор собственных частот называется спектром. Спектр — дискретное счётное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности.

Теорема Собственные частоты ортогональны.

Пусть ω_n, ω_m — собственные частоты, $u_i^{(n)}$, $u_i^{(m)}$ — собственные формы. Рассмотрим уравнения колебаний:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}^{(n)} + \rho\omega_n^2 u_i^{(n)} = 0,\\ \sigma_{ij,j}^{(m)} + \rho\omega_m^2 u_i^{(m)} = 0\end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на $u_i^{(n)}$, второе — на $u_i^{(m)}$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по объёму V.

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)}\right] dV + \left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right) \int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0$$

Докажем, что

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)}\right] dV = 0$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = \int\limits_V \left[\left(\sigma_{ij}^{(n)} u_i^{(m)} \right)_{,j} - \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} \right] dV$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = \int\limits_S \sigma_{ij}^{(n)} n_j u_i^{(m)} dS - \int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} dV$$

В силу однородных краевых условий

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = - \int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} dV$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)} \right] dV &= \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} u_{i,j}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} \right] dV = \\ &= \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV \end{aligned}$$

Воспользуемся законом Гука:

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV = \int\limits_V \left[C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV$$

Рассмотрим

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} = C_{klij} \varepsilon_{ij}^{(m)} \varepsilon_{kl}^{(n)} = C_{klij} \varepsilon_{kl}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)}$$

Упругие константы имеют свойство

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

следовательно

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(m)}\varepsilon_{ij}^{(n)} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(m)} = 0$$

и

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)\int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0$$

Собственные частоты различны

$$\omega_n \neq \omega_m,$$

следовательно

$$\int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0,$$

что и требовалось доказать.

Также можно доказать, что

$$\int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(m)} dV = 0,$$

2 Методы исследований колебаний ограниченных тел

1. Метод конечных элементов;

2. Метод Ритца

   Рассмотрим задачу

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{22}$$

Граничные условия однородные

$$
\begin{aligned}
&S = S_u \cup S_\sigma, \\
&u_i\big|_{S_u} = 0, \\
&\sigma_{ij} n_j\big|_{S_\sigma} = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Ищем решение задачи в виде:

$$
\underline{u} = \sum_{k=1}^{N} a_k \underline{\varphi}^k, \tag{24}
$$

где $\underline{\varphi}^k$ — набор достаточно гладких линейно независимых функций, удовлетворяющих главным граничным условиям.

Подставляем в уравнение:

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \sigma_{ij,j}\left(\underline{\varphi}^k\right) + \rho\omega^2 \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_i^k = 0 \tag{25}
$$

Умножаем (26) на φ_i^l и интегрируем по объёму V

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \int\limits_V \sigma_{ij,j}\left(\underline{\varphi}^k\right) \varphi_i^l dV + \omega^2 \sum_{k=1}^{N} a_k \int\limits_V \rho \varphi_i^k \varphi_i^l dV = 0 \tag{26}
$$

Можно доказать, что

$$
\int\limits_V \sigma_{ij,j}\left(\underline{\varphi}^k\right) \varphi_i^l dV = -\int\limits_V \sigma_{ij}\left(\underline{\varphi}^k\right) \varepsilon_{ij}(\underline{\varphi}_i^l) dV
$$

Теперь соотношение (26) представляется в виде:

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\Pi_{kl} - \omega^2 T_{kl}\right) = 0, \tag{27}
$$

где

$$\Pi_{kl} = \int\limits_V \sigma_{ij}\left(\underline{\varphi}^k\right)\varepsilon_{ij}(\underline{\varphi}_i^l)dV,$$

$$T_{kl} = \int\limits_V \rho\varphi_i^k\varphi_i^l dV$$

Система (27) является однородной и имеет нетривиальное решение только, если её определитель равен нулю. Это приводит к равенству

$$\left|\Pi_{kl} - \omega^2 T_{kl}\right| = 0, \tag{28}$$

(28) — уравнение для приближенного определения собственных частот, используя которое, можно получить оценку собственных частот сверху.

Если в сумме (24) оставить только одно слагаемое, получаем

$$\omega^2 < \frac{\Pi_{11}}{T_{11}}, \tag{29}$$

— частное Релея.

3. Метод граничных интегральных уравнений