

Лабораторная работа 6 Решение нелинейных систем и уравнений.
Интегрирование и дифференцирование. Приложения.

Все методы, которые поддерживаются в MatLab, связанные с символьным ядром вы можете идентифицировать командой:

>>methods(sym)

Используем функции: *fplot*, *fzero*, *fsolve*, *roots*, *diff*, *trapz*, *quad*, *integral*

Если обнаружили опечатки, пишите оперативно мне на корпоративную почту nvkurbatova@sfnu.ru

Подгруппа 1:

Задание 1.

Найдите все точки пересечения двух линий $y=\sin(\exp(x))$ и $g=0.6x^2-0.5$, отметьте эти точки на графике (маркер замкнутой формы, залейте цветом и выберите размер, по своему усмотрению), а также напишите их координаты в заголовке в виде, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$; x_i,y_i – числовые значения координат точек, сократите число знаков после запятой до двух; А и В поместите в осях около точек пересечения кривых с помощью *gtext*.

Задание 2.

Найдите все точки пересечения двух линий $y= x \cdot \sin(8x)$ и $g= x^5-x+0.5$ на отрезке $[-1,1]$, предварительно определив абсциссы этих точек как корни функции $f= x \cdot \sin(8x) - (x^5-x+0.5)$. Отметьте точки пересечения линий на графике маркером треугольной формы, а также подпишите *адресно* их координаты функцией *text*.

Задание 3.

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = x \cdot \sin(x) \\ y = 1 - x^2 \end{cases} .$$

Проверьте точность решения. Представьте графическую интерпретацию решения.

Замечание. В Matlab полином может быть представлен символьным выражением, строкой. Однако некоторые операции с полиномами основываются на таком векторном представлении полинома $P=[a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)]$, например, функция *polyval*(P,X) вычисляет значение полинома в точке X, функция *roots* ([$a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)$]) – численно находит корни полинома (многочлена), функция *poly*([x_1, x_2, \dots, x_k]) вычисляет по заданным корням полинома [x_1, x_2, \dots, x_k] его коэффициенты, тем самым определяя вид полинома $g(x)=a(n)x^k + a(n-1)x^{k-1} + a(1)x + a(0)$ см. *Help*

Используйте функции *roots*, *poly*, *polyval*

Задание 4.

Найдите все корни полинома пятого порядка $p(x)=x^5 + x^2-10x-4.5$, постройте по корням полином, проверьте совпадение с исходным.

Подпишите полученные вещественные корни на графике $p(x)$, выделив их размером и формой маркера, определите, точность, с которой они найдены.

Задание 5.

Найдите вид полинома пятого порядка, если известны его корни: 1 - кратности 2; а также простые корни: 3, 7, 9. Постройте график функции полученного полинома, снабдите поясняющей информацией.

Задание 6.

Постройте двумя способами график функции $y=\sin(x)$ для $x=-2\pi:0.1:2\pi$, а также графики функций её первой и второй производных в одних осях, снабдите легендой. Первый способ – численного дифференцирования, второй - символьного.

Задание 7.

Найдите локальные максимумы функции $y=\exp(\sin(x^3))$ на отрезке $[-2,2]$. Определите производную $g(x)=y'(x)$ на этом же отрезке, постройте обе функции в одном окне, снабдите легендой.

Задание 8.

Численно определите площадь под частью кривой $y=\exp(-x)\cdot\sin(x)-(x-2)$, определенной на отрезке $[-2,2]$, которая расположена выше оси абсцисс и пересекает её. Для вычисления интеграла используйте формулу трапеций $trapz(x,y)$. Определите такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит **1.e-6**. Отметьте на графике и надпишите пределы интегрирования, залейте искомую площадь. Сделайте заголовок у figure: $S = \int_a^b y(x) dx$ (используйте нотацию LaTeX)

Задание 9.

Вычислите определенный интеграл от функции $y=x\sin(8x) -(x^5-x+0.5)$ с пределами интегрирования $-0.6, 0.6$ численно и с помощью команды int символьного ядра; добейтесь совпадения результатов с точностью $0.1e-4$.

Задание 10.

Найдите площадь, заключенную между линиями $y=\exp(\sin(x))$ и $y=-x^2+8$. Залейте замкнутую область цветом *magenta*, отметьте на графике точки пересечения и их значения.

Замечание. В символьном ядре *Sym(bolic)* аналогично *Maple* работают функции: *subs, simplify, factor, collect, expand, taylor*, функции суммирования и произведения членов ряда *sumsum, sumprod*.

Подгруппа 2:

Задание 1.

Найдите все точки пересечения двух линий $y = \cos(\exp(x))$; $g = -x^2 + 4$, отметьте эти точки на графике (стиль маркера и размер выберите самостоятельно), а также подпишите их координаты функцией `text`, сократив число знаков после запятой до двух.

Задание 2.

Найдите все точки пересечения двух линий $y = \sin(2x)$; $g = -x^2 + 3$ на отрезке $[-2, 2]$, предварительно определите абсциссы этих точек как корни функции $f = \sin(2x) + (x^2 - 3)$. Отметьте точки пересечения линий на графике замкнутым маркером, залейте маркер цветом `[0.3 0.2 0.6]`, а также подпишите *адресно* их координаты функцией `text`.

Задание 3.

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = \sin(\exp(x)) \\ y = -2 + x^2 \end{cases}$$

Проверьте точность решения. Представьте графическую интерпретацию решения.

Замечание. В Matlab полином может быть представлен символьным выражением, строкой. Однако некоторые операции с полиномами основываются на таком векторном представлении полинома $P = [a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)]$, например, функция `polyval(P,X)` вычисляет значение полинома в точке X, функция `roots([a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)])` – численно находит корни полинома (многочлена), функция `poly([x1, x2, \dots, xk])` вычисляет по заданным корням полинома $[x1, x2, \dots, xk]$ его коэффициенты, тем самым определяя вид полинома $g(x) = a(n)x^k + a(n-1)x^{k-1} + a(1)x + a(0)$ см. *Help*

Используйте функции `roots`, `poly`, `polyval`

Задание 4.

Найдите все корни полинома четвертого порядка $p(x) = x^4 + x^2 - 10x - 1.5$, постройте по корням полином, проверьте совпадение с исходным. Подпишите полученные вещественные корни на графике $p(x)$, выделив их размером и формой маркера, определите, точность, с которой они найдены.

Задание 5.

Найдите вид полинома четвертого порядка, если известны его корни: 2 - кратности 2; а также простые корни: 3 и 5. Постройте график функции полученного полинома на отрезке $[-7, 7]$, снабдите поясняющей информацией.

Задание 6.

Постройте двумя способами график функции $y=x \cdot \sin^2(x)$ для $x=-2\pi:0.1:2\pi$, а также графики функций её первой и второй производных в одних осях, снабдите легендой. Первый способ – численного дифференцирования, второй – символического.

Задание 7.

Найдите локальные максимумы функции $y=x \cdot \sin^2(x)$ для $x=-2\pi:0.1:2\pi$, Определите производную $g(x)=y''(x)$ на этом же отрезке, постройте обе функции в одном окне, снабдите легендой.

Задание 8.

Численно определите площадь под частью кривой $y=(1+x^2) \cdot \sin(x) + (x^2-3)$, определенной на отрезке $[0,5]$, которая расположена выше оси абсцисс и пересекает её. Для вычисления интеграла используйте формулу трапеций $trapz(x,y)$. Определите такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит $1.e-6$. Отметьте на графике и надпишите пределы интегрирования, залейте искомую площадь. Сделайте заголовок у `figure`: $S = \int_a^b y(x) dx$ (используйте нотацию LaTeX).

Задание 9.

Вычислите определенный интеграл от функции $y= x \sin(x)$ с пределами интегрирования $-1, 8$ численно и с помощью команды `int` символического ядра; добейтесь совпадения результатов с точностью $0.1e-4$.

Задание 10.

Найдите площадь, заключенную между кривыми $y= \sin(x) \cdot (1+x^2)$ и $g=x^2-3$ с точками пересечения на отрезке $[-7, -3]$. Залейте замкнутую область цветом `cyan`, отметьте на графике точки пересечения и их значения.

Замечание. В символическом ядре `Sym(bolic)` аналогично `Maple` работают функции: `subs`, `simplify`, `factor`, `collect`, `expand`, `taylor`, функции суммирования и произведения членов ряда `sumsum`, `sumprod`.

Подгруппа 3:

Задание 1.

Найдите все точки пересечения двух линий $y = \sin(x) \cdot (1 + x^2)$ и $g = x^2 - 3$ на отрезке $[-2\pi, 4]$ отметьте эти точки на графике (стиль маркера и размер выберите самостоятельно), а также подпишите их координаты функцией `text`, сократив число знаков после запятой до двух.

Задание 2.

Найдите все точки пересечения двух линий $y = \sin(2x)$; $g = -x^2 + 3$ на отрезке $[-2\pi, 4]$, предварительно определите абсциссы этих точек как корни функции $f = \sin(2x) + (x^2 - 3)$. Отметьте точки пересечения линий на графике замкнутым маркером, залейте маркер цветом `[0.2 0.0 0.8]`, а также подпишите *адресно* их координаты функцией `gtext`.

Задание 3.

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = -x \sin(2x) \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

Проверьте точность решения. Представьте графическую интерпретацию решения.

Замечание. В Matlab полином может быть представлен символьным выражением, строкой. Однако некоторые операции с полиномами основываются на таком векторном представлении полинома $P = [a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)]$, например, функция `polyval(P,X)` вычисляет значение полинома в точке X, функция `roots([a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)])` – численно находит корни полинома (многочлена), функция `poly([x1, x2, \dots, xk])` вычисляет по заданным корням полинома $[x1, x2, \dots, xk]$ его коэффициенты, тем самым определяя вид полинома $g(x) = a(n)x^k + a(n-1)x^{k-1} + a(1)x + a(0)$ см. *Help*

Используйте функции `roots`, `poly`, `polyval`

Задание 4.

Найдите все корни полинома 6-го порядка $p(x) = x^6 + x^3 - x^2 - 3x - 1.5$, постройте по корням полином, проверьте совпадение с исходным. Подпишите полученные вещественные корни на графике $p(x)$, выделив их размером и формой маркера.

Задание 5.

Найдите вид полинома 6-го порядка, если известны его корни: 1 - кратности 2; а также простые корни: 2, 3, 5 и 7. Постройте график функции полученного полинома, выберите репрезентативный отрезок, снабдите поясняющей информацией.

Задание 6.

Постройте двумя способами график функции $y = -x \cdot \sin(2x)$ для $x = -2:0.1:2$, а также графики функций её первой и второй производных в одних, снабдите легендой. Первый способ – численного дифференцирования, второй – символьного.

Задание 7.

Найдите локальные минимумы функции $y = -x \cdot \sin(2x)$ для $x = -2:0.1:2$. Определите производную $g(x) = y''(x)$ на этом же отрезке, постройте обе функции в одном окне, снабдите легендой.

Задание 8.

Численно определите площадь под частью кривой $y = x \cdot \sin(2x)$, определенной на отрезке $[-2, 0.5]$, которая расположена выше оси абсцисс и пересекает её. Для вычисления интеграла используйте формулу трапеций $trapz(x, y)$. Определите такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит $1 \cdot 10^{-6}$. Отметьте на графике, надпишите пределы интегрирования и залейте искомую площадь. Сделайте заголовок: $S = \int_a^b y(x) dx$ (используйте нотацию LaTeX).

Задание 9.

Вычислите определенный интеграл от функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ с пределами интегрирования 1 и 3 *численно* и с помощью команды *int* символьного ядра; добейтесь совпадения результатов с точностью $0.1 \cdot 10^{-4}$.

Задание 10.

Найдите площадь, заключенную между линиями $y = \sqrt{x^2 - 9}$ и $g = 2.5 \cdot x - 7.5$ с точками пересечения на отрезке $[3, 5]$. Залейте замкнутую область цветом *green*, отметьте на графике точки пересечения и их значения.

Замечание. В символьном ядре *Sym(bolic)* аналогично *Maple* работают функции: *subs*, *simplify*, *factor*, *collect*, *expand*, *taylor*, функции суммирования и произведения членов ряда *sumsum*, *sumprod*.

Подгруппа 4:

Задание 1.

Найдите все точки пересечения двух линий $y=6 \sin(x) / (1+x^2)$ и $g=x^2$ на отрезке $[-2,2]$, отметьте эти точки на графике (стиль маркера и размер выберите самостоятельно), а также подпишите их координаты функцией `gtext`, сократив число знаков после запятой до двух.

Задание 2.

Найдите все точки пересечения двух линий $y= \sin(\exp(x))$; $g=-x^2+3$ на отрезке $[-3,2]$, предварительно определите абсциссы этих точек как корни функции $f= \sin(\exp(x))+(x^2-3)$. Отметьте точки пересечения линий на графике замкнутым маркером, залейте маркер цветом `[0.2 0.8 0]`, а также подпишите *адресно* их координаты функцией `text`.

Задание 3.

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = 6 \sin(x)/(1+x^2) \\ y = 0.6 x^2 \end{cases}.$$

Проверьте точность решения. Представьте графическую интерпретацию решения.

Замечание. В Matlab полином может быть представлен символьным выражением, строкой. Однако некоторые операции с полиномами основываются на таком векторном представлении полинома $P=[a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)]$, например, функция `polyval(P,X)` вычисляет значение полинома в точке X, функция `roots([a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)])` – численно находит корни полинома (многочлена), функция `poly([x1, x2, \dots, xk])` вычисляет по заданным корням полинома $[x1, x2, \dots, xk]$ его коэффициенты, тем самым определяя вид полинома $g(x)=a(n)x^k + a(n-1)x^{k-1} + a(1)x + a(0)$ см. *Help*

Используйте функции `roots`, `poly`, `polyval`

Задание 4.

Найдите все корни полинома 6-го порядка $p(x)= 2x^6 -x^5 + 2x^4 + x^3 -x^2 -3x -12$, постройте по корням полином, проверьте совпадение с исходным.

Подпишите полученные вещественные корни на графике $p(x)$, выделив их размером и формой маркера, определите, точность, с которой они найдены.

Задание 5.

Найдите вид полинома 6-го порядка, если известны его корни: 1 - кратности 4; а также простые корни: 3 и 5. Постройте график функции полученного полинома, выберите репрезентативный отрезок, снабдите поясняющей информацией.

Задание 6.

Постройте двумя способами график функции $y=(x+3)\cdot\sin(2x)$ для $x=-2:0.1:1$, а также графики функций её первой и второй производных в одних осях, снабдите легендой. Первый способ – численного дифференцирования, второй – символьного.

Задание 7.

Найдите локальный минимум функции $y=(x+3)\cdot\sin(2x)$ для $x=-2:0.1:1$. Определите производную $g(x)=y''(x)$ на этом же отрезке, постройте обе функции в одном окне, снабдите легендой.

Задание 8.

Численно определите площадь под частью кривой $y=-x\cdot\sin(2x)$, определенной на отрезке $[-2,0.5]$, которая расположена выше оси абсцисс и пересекает её. Для вычисления интеграла используйте формулу трапеций $trapz(x,y)$. Определите такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит $1.e-6$. Отметьте на графике и надпишите пределы интегрирования, залейте искомую площадь. Сделайте заголовок у figure: $S = \int_a^b y(x) dx$ (используйте нотацию LaTeX).

Задание 9.

Вычислите определенный интеграл от функции $y=\sin(x)x^2$ с пределами интегрирования 0 и 1.5 *численно*, а также с помощью команды *int* символьного ядра; добейтесь совпадения результатов с точностью $0.1e-4$.

Задание 10.

Найдите площадь, заключенную между линиями $y=-x^2$ и $g=x-2$ с точками пересечения на отрезке $[-2, 2.5]$. Залейте замкнутую область цветом $[0.5\ 0\ 0.5]$, отметьте на графике точки пересечения и их значения.

Замечание. В символьном ядре *Sym(bolic)* аналогично *Maple* работают функции: *subs*, *simplify*, *factor*, *collect*, *expand*, *taylor*, функции суммирования и произведения членов ряда *sumsum*, *sumprod*.

Подгруппа 5:

Задание 1.

Найдите все точки пересечения двух линий $y=1+\sin(x/4)$ и $g=x^2$ на отрезке $[-1.5,1.5]$, отметьте эти точки на графике (стиль маркера и размер выберите самостоятельно), а также подпишите их координаты функцией `gtext`, сократив число знаков после запятой до одного.

Задание 2.

Найдите все точки пересечения двух линий $y=1+\sin(2x)$; $g=-x^2+3$ на отрезке $[-2,2]$, предварительно определите абсциссы этих точек как корни функции $f=1+\sin(2x)+(x^2-3)$. Отметьте точки пересечения линий на графике замкнутым маркером, залейте маркер цветом $[0.6\ 0.4\ 0]$, а также подпишите *адресно* их координаты функцией `text`.

Задание 3.

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y = 6 \sin(x)/(1 + x^2) \\ y = -x^2 + 2 \end{cases}.$$

Проверьте точность решения. Представьте графическую интерпретацию решения.

Замечание. В Matlab полином может быть представлен символьным выражением, строкой. Однако некоторые операции с полиномами основываются на таком векторном представлении полинома $P=[a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)]$, например, функция `polyval(P,X)` вычисляет значение полинома в точке X, функция `roots([a(n), a(n-1), \dots, a(1), a(0)])` – численно находит корни полинома (многочлена), функция `poly([x1, x2, \dots, xk])` вычисляет по заданным корням полинома $[x1, x2, \dots, xk]$ его коэффициенты, тем самым определяя вид полинома $g(x)=a(n)x^k + a(n-1)x^{k-1} + a(1)x + a(0)$ см. *Help*

Используйте функции `roots`, `poly`, `polyval`

Задание 4.

Найдите все корни полинома 4-го порядка $p(x)=2x^4 - x^3 + x^2 - 12$, постройте по корням полином, проверьте совпадение с исходным.

Подпишите полученные вещественные корни на графике $p(x)$, выделив их размером и формой маркера, определите, точность, с которой они найдены.

Задание 5.

Найдите вид полинома 5-го порядка, если известны его корни: $3/2$ - кратности 2; а также простые корни: 3, 7 и 11. Постройте график функции полученного полинома, выберите репрезентативный отрезок, снабдите поясняющей информацией.

Задание 6.

Постройте двумя способами график функции $y=(x+3) \cdot \sin(2x)$ для $x=-2:0.1:2$, а также графики функций её первой и второй производных в одних осях, снабдите легендой. Первый способ – численного дифференцирования, второй – символьного.

Задание 7.

Найдите локальный максимум функции $y=(x+3) \cdot \sin(2x)$ для $x=-2:0.1:2$. Определите производную $g(x)=y'(x)$ на этом же отрезке, постройте обе функции в одном окне, снабдите легендой.

Задание 8.

Численно определите площадь под частью кривой $y=(x+3) \cdot \sin(2x)$, определенной на отрезке $[-2,0.5]$, которая расположена выше оси абсцисс и пересекает её. Для вычисления интеграла используйте формулу трапеций $trapz(x,y)$. Определите такой шаг разбиения, при котором точность вычисления не превосходит $1.e-6$. Отметьте на графике и надпишите пределы интегрирования, залейте искомую площадь. Сделайте заголовок $S = \int_a^b y(x) dx$ (используйте нотацию LaTeX).

Задание 9.

Вычислите определенный интеграл от функции $y=x^2 \sin(x)$ с пределами интегрирования 0 и 1.5 *численно* и с помощью команды *int* символьного ядра; добейтесь совпадения результатов с точностью $0.1e-4$.

Задание 10.

Найдите площадь, заключенную между линиями $y=-x^2$ и $g=x-2$ с точками пересечения на отрезке $[-2, 2.5]$. Залейте замкнутую область цветом magenta, отметьте на графике точки пересечения и их значения.

Замечание. В символьном ядре *Sym(bolic)* аналогично *Maple* работают функции: *subs*, *simplify*, *factor*, *collect*, *expand*, *taylor*, функции суммирования и произведения членов ряда *sumsum*, *sumprod*.