



А. В. Наседкин  
А. А. Наседкина

# **Моделирование связанных задач: математические постановки и конечно-элементные технологии**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. В. Наседкин, А. А. Наседкина**

**Моделирование связанных задач:  
математические постановки  
и конечно-элементные технологии**

Учебное пособие

Ростов-на-Дону – Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2019

УДК 519.6+539.3+004.4  
ББК 22.251  
Н31

*Печатается по решению кафедры математического моделирования  
Института математики, механики и компьютерных наук  
им. И. И. Воровича Южного федерального университета  
(протокол № 5 от 28 марта 2019 г.)*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *Г. В. Муратова*;  
доктор технических наук, профессор *А. Н. Ткачев*

Н31 Наседкин, А. В.  
Моделирование связанных задач: математические постановки и конечно-элементные технологии : учебное пособие / А. В. Наседкин, А. А. Наседкина ; Южный Федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2019. – 176 с.  
ISBN 978-5-9275-3184-4

Пособие частично соответствует материалу курса лекций, реализуемого в рамках магистерских программ направления 01.02.04 «Прикладная математика и информатика» в Институте математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Данное пособие может быть также использовано студентами, аспирантами и специалистами, специализирующимися или работающими в различных областях прикладной математики и механики. В курсе лекций рассмотрены вопросы математического моделирования связанных физико-механических задач и применения методов конечных элементов для их решения. Особое внимание уделено связанным задачам электроупругости, термоупругости, пороупругости и задачам взаимодействия деформируемых тел с акустическими средами. Акцентируются математические особенности рассматриваемых задач в их классических и обобщенных постановках. Теоретическая часть пособия подкреплена лабораторными работами по решению модельных задач пьезоэлектричества, термоупругости и задач о взаимодействии твердотельных тел с акустическими средами с использованием программного комплекса ANSYS версии 11.0 и выше.

Пособие является переработанной версией в авторском переводе соответствующего англоязычного пособия: Nasedkin A. V., Nasedkina A. A. Finite element modeling of coupled problems: textbook / Rostov-on-Don: publishing house of Southern Federal University, 2015.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 519.6+539.3+004.4  
ББК 22.251

ISBN 978-5-9275-3184-4

© Южный федеральный университет, 2019  
© Наседкин А. В., Наседкина А. А., 2019

---

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Некоторые модели связанных задач механики деформируемого твердого тела</b>	<b>9</b>
1.1. Основные обозначения. Векторные и тензорные величины . . . . .	9
1.1.1. Векторные и тензорные величины. Краткие сведения . . . . .	9
1.1.2. Основные обозначения и величины в связанных задачах теории упругости . . . . .	13
1.2. Общие положения . . . . .	15
1.3. Моделирование задач электроупругости . . . . .	19
1.3.1. Классические постановки задач электроупругости . . . . .	21
1.3.2. Обобщенные постановки задач электроупругости . . . . .	28
1.3.3. Полудискретные аппроксимации в задачах электроупругости . . . . .	38
1.3.4. Обзор основных особенностей задач электроупругости . . . . .	41
1.4. Моделирование задач термоупругости . . . . .	45
1.4.1. Классические постановки задач термоупругости . . . . .	45
1.4.2. Обобщенные постановки задач термоупругости . . . . .	49
1.4.3. Полудискретные аппроксимации в задачах термоупругости . . . . .	53
1.5. Задачи пороупругости. Поротермоупругая аналогия . . . . .	54
1.6. Моделирование взаимодействия твердых деформируемых тел с акустическими средами . . . . .	58
1.6.1. Классические постановки задач акустики . . . . .	58
1.6.2. Полудискретные аппроксимации на основе обобщенных постановок и сопряжение уравнений акустики с уравнениями твердотельной структуры . . . . .	62
Задачи к главе 1 . . . . .	65
<b>Глава 2. Метод конечных элементов для решения связанных физико-механических задач</b>	<b>71</b>
2.1. Общая схема метода Бубнова—Галеркина. Динамические и статические задачи . . . . .	71
2.2. МКЭ как вариант метода Бубнова—Галеркина. Основные идеи МКЭ . . . . .	75
2.3. Базовые конечно-элементные аппроксимации . . . . .	83
Задачи к главе 2 . . . . .	97
<b>Глава 3. Примеры решения задач в ANSYS и лабораторные работы</b>	<b>101</b>
3.1. Лабораторная работа №1. Статическое деформирование пьезокерамического преобразователя с многоэлектродным покрытием . . . . .	101

3.1.1.	Описание модельной задачи и методов ее решения . . . . .	102
3.1.2.	Индивидуальные задания . . . . .	128
3.2.	Лабораторная работа №2. Плоская задача о нагреве и охлаждении термоупругого тела . . . . .	131
3.2.1.	Краткие сведения о решении в ANSYS нестационарных задач термоупругости для изотропных тел . . . . .	132
3.2.2.	Описание модельной задачи и методов ее решения . . . . .	134
3.2.3.	Индивидуальные задания . . . . .	145
3.3.	Лабораторная работа №3. Установившиеся колебания упругого излу- чателя в акустической среде . . . . .	146
3.3.1.	Краткие сведения о технике решения в ANSYS задач о взаимодействии твердых тел с акустическими средами . . . . .	146
3.3.2.	Описание модельной задачи и методов ее решения . . . . .	150
3.3.3.	Индивидуальные задания . . . . .	167
<b>Список литературы</b>		<b>172</b>

---

# Введение

Основной целью пособия является описание математических моделей и численных методов решения связанных физико-механических задач с использованием современных программных средств и компьютерной техники с ориентацией на конечно-элементный комплекс ANSYS.

В соответствии с этой целью в первой главе пособия рассмотрены вопросы математического моделирования связанных физико-механических задач, таких как задачи электроупругости, термоупругости, пороупругости и задачи взаимодействия деформируемых тел с акустическими средами. Во второй главе кратко излагается классическая техника конечно-элементных аппроксимаций и базовые конечные элементы. Теоретическая часть пособия дополнена в третьей главе набором лабораторных задач по решению связанных физико-механических задач в программном комплексе ANSYS версии 11.0 и выше.

Методология исследования связанных физико-механических задач включает следующие общие характерные этапы: формулировку классической постановки задачи (системы дифференциальных уравнений и граничные и начальные условия); переход от классических постановок к обобщенным; применение дискретных по пространственным переменным аппроксимаций; получение соответствующих систем дискретизированных уравнений.

Несмотря на общность моделирования всех рассматриваемых в первой главе задач, каждая из типов связанных задач имеет свои особенности.

Для задач электроупругости характерны нестандартные граничные условия для электродированных поверхностей, особенно для электродов, запитываемых генераторами токов. Эти условия являются аналогом граничных условий контактного типа с жесткими штампами для упругого тела.

В задачах электроупругости возможны постановки для многослойных тел с различными физическими свойствами: пьезоэлектрические тела, упругие тела, диэлектрики.

Для практических применений пьезоэлектрических устройств важную роль играют два набора собственных частот: частот электрических резонансов и антирезонансов. Для их нахождения нужно дважды решить обобщенную задачу на собственные значения с несколько отличающимися граничными условиями для электродов. Необходимость решения данных задач существенна для полноты анализа большинства пьезопреобразователей, работающих в динамических режимах.

Для задач термоупругости характерно наличие условий третьего рода — условий конвективного теплообмена. Эти граничные условия дают дополнительный вклад в симметричные билинейные формы обобщенной постановки задачи. Важными классами задач термоупругости являются слабосвязанные задачи, особенно задачи о температурных напряжениях, в которых задача для поля температур не зависит от поля перемещений.

Задачи пороупругости интересны тем, что показывают, как анализ одного класса задач может быть проведен с помощью аппарата, разработанного для анализа другого класса задач. Именно, с использованием имеющейся поротермоупругой аналогии задачи пороупругости можно решать как задачи термоупругости. Важным методическим примером является демонстрация эффективности перехода к безразмерной постановке в задаче пороупругости, позволяющего выровнять порядки коэффициентов систем и в результате повысить эффективность численных методов, особенно для нелинейных задач.

Задачи о взаимодействии твердых деформируемых тел с акустическими средами интересны тем, что в них объединяются в единые постановки задачи для разных типов полей, заданных в различных средах: в твердотельной структуре и в окружающей ее акустической (жидкой или газообразной) среде. Здесь связность возникает из-за граничных условий контакта между твердотельной структурой и акустической средой. Особенностью задачи являются также неотражающие или импедансные граничные условия, обуславливающие демпфирующие свойства в задаче. На примере этих задач можно показать, как выбор основных неизвестных функций влияет на удобство получающихся систем дискретизированных уравнений. Как оказывается, постановки задач акустики на основе функции потенциала акустической скорости являются более удобными для сопряжения с постановками задач для твердотельной структуры, чем постановки задач акустики на основе функции избыточного давления.

Получающиеся краевые или начально-краевые задачи достаточно сложны, и поэтому нужны численные методы, способные эффективно решать эти задачи, причем для областей сложной формой. Таким методом

в настоящее время является метод конечных элементов. В связи с этим во второй главе дается краткое изложение метода конечных элементов с акцентом на его применение к решению связанных физико-механических задач.

Показывается, что метод конечных элементов является частным случаем общей процедуры дискретизации по методу Бубнова—Галеркина при выборе специального типа базиса из кусочно-полиномиальных функций на канонических областях. Эти функции обычно невысокого порядка и имеют компактный носитель. Отмечается, что выбор базисов метода конечных элементов определяет вычислительную эффективность метода: разреженность матриц, простоту вычисления конечно-элементных объектов, возможность реализации процедуры ансамблирования, простоту учета главных граничных условий. То, что метод конечных элементов строится на основе обобщенных постановок, имеющих энергетический и вариационный смысл, приводит к сходимости приближенных решений по энергетическим нормам, а также к возможности реализации методов поиска минимума квадратичных функционалов для задач с положительно определенными симметричными операторами.

Популярность метода конечных элементов в достаточной степени обусловлена его развитой технологией, которой в курсе уделяется некоторое внимание. Рассматриваются вопросы формирования глобальных конечно-элементных объектов из соответствующих элементных с использованием процедуры ансамблирования, а также вопросы учета главных граничных условий.

В рамках общего подхода описаны изопараметрические конечные элементы. Рассмотрены базовые лагранжевы конечные элементы для одномерных, двумерных и трехмерных задач. Для одномерных задач приведены функции формы линейного и квадратичного конечных элементов. Для двумерных задач описаны линейные и квадратичные конечные элементы для треугольников и четырехугольников, в том числе рассмотрены элементы серендипова типа. Идеология, использованная при построении двумерных задач, обобщена на трехмерные элементы для тетраэдров и гексаэдров с линейными и квадратичными аппроксимациями на канонических фигурах. Приведены также базисные функции конечных элементов в виде призм и пирамид. Обсуждаются вопросы согласованности конечно-элементных сеток.

В третьей главе представлены лабораторные работы, подкрепляющие теоретическую часть пособия. Работы посвящены решению модельных задач пьезоэлектричества, термоупругости и задач о взаимодействии твер-



дотельных тел с акустическими средами с использованием программного комплекса ANSYS версии 11.0 и выше. К каждой работе дается описание техники и нестандартных приемов решения в ANSYS конкретных типов связанных физико-механических задач, приводятся программы на командном языке APDL ANSYS с подробными комментариями и дается анализ получаемых результатов. Для самостоятельного выполнения приведены наборы индивидуальных заданий по решению модельных задач пьезоэлектричества, термоупругости и задач о взаимодействии твердотельных тел с акустическими средами в программном комплексе ANSYS. При этом предполагается, что обучающиеся имеют базовые навыки работы в пакете ANSYS [34, 37, 38] и знакомы с его командным языком APDL.

Настоящее учебное пособие является переработанным вариантом соответствующего англоязычного пособия [36]. Данное учебное пособие ранее не издавалось на русском языке, а его материал ориентирован в первую очередь на поддержку курса «Современные проблемы прикладной математики и информатики», как в его лекционной части, так и для выполнения лабораторных работ. Курс «Современные проблемы прикладной математики и информатики» относится к циклу базовых дисциплин учебных планов всех магистерских программ по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» в Институте математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. При этом, пособие будет полезно и для поддержки англоязычного варианта курса «Modern problems of applied mathematics and informatics», поскольку обучающиеся будут иметь как англоязычный вариант пособия, так и его русскоязычный вариант.

Пособие может использоваться также студентами и магистрантами различных специальностей, изучающими прикладную математику, численные методы или проблемы конкретных связанных физико-механических задач, а также научными работниками и инженерами, желающими углубить свои познания в методологиях математического моделирования связанных задач математической физики и конечно-элементных технологиях их решения.

---

# Глава 1

## Некоторые модели связанных задач механики деформируемого твердого тела

### 1.1. Основные обозначения. Векторные и тензорные величины

Данный раздел носит справочный характер и касается применяемых в дальнейшем обозначений векторных и тензорных величин. Более подробные сведения о векторах и тензорах можно найти в многочисленной литературе (см., например, [8, 10, 33] и др.) Здесь же эти сведения даются в минимальном объеме.

#### 1.1.1. Векторные и тензорные величины. Краткие сведения

Пусть  $\mathbb{R}^n$  — евклидово пространство. Элементы этого пространства, называемые *векторами*, будем обозначать полужирными, как правило, строчными буквами:  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ .

В  $\mathbb{R}^n$  выделим ортонормированный базис  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда любой вектор  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  можно представить в виде разложения по базису

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \stackrel{\text{def}}{=} a_i \mathbf{e}_i$$

с координатами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Здесь и всюду далее применяется *правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам*, причем верхний и нижний индексы не различаются.

Поскольку  $\mathbb{R}^n$  — линейное пространство, то в нем определены операции сложения и умножения на число. Таким образом, если  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ , то  $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = (\lambda a_i + \mu b_i) \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ .

В  $\mathbf{R}^n$ , как в евклидовом пространстве, определена операция *скалярного произведения*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot (b_j \mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i.$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ), и использовано, что для ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ .

В векторно-матричных обозначениях набор координат вектора  $\mathbf{a}$  будем записывать в виде вектор-столбца  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  или вектор-строки  $\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Если в тензорных обозначениях вектор-столбец и вектор-строку можно не различать, то в матричной алгебре умножение матрицы  $\mathbf{K}$  на вектор-столбец  $\mathbf{a}$  справа будем записывать как  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}$ , а умножение матрицы  $\mathbf{K}$  на вектор-строку  $\mathbf{a}^*$  слева — как  $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{K}$ . Тогда, если  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, то  $\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a}$ . Таким образом, скалярное произведение двух векторов можно представлять в различных формах:  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (при тензорных обозначениях) или  $\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a}$  (при матричных обозначениях).

Если  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$  — другой ортонормированный базис в  $\mathbf{R}^n$ , то можно ввести матрицу  $\mathbf{Q}$  (матрицу направляющих косинусов)

$$[\mathbf{Q}]_{ij} = q_{ij} = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}'_j, \quad (1.1)$$

выразить векторы одного базиса через другой

$$\mathbf{e}_i = q_{ij} \mathbf{e}'_j, \quad \mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \quad \alpha_{ij} = q_{ji}, \quad (1.2)$$

и получить *формулы для пересчета коэффициентов вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = a'_j \mathbf{e}'_j$  при изменении базиса*

$$a_i = q_{ij} a'_j, \quad a'_i = \alpha_{ij} a_j, \quad (1.3)$$

или в матричной записи

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}', \quad \mathbf{a}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}^*, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{Q}^*$  — транспонированная матрица.

Как несложно установить, матрица перехода  $\mathbf{Q}$  является ортогональной:

$$\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^*)^{-1}.$$

В результате вектор  $\mathbf{a}$  можно понимать как отнесенный к базису  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  набор чисел  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , который при переходе к другому базису  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  изменяется по законам (1.3), (1.4).

Рассмотрим теперь декартово произведение  $p$  евклидовых пространств  $\mathbf{R}^n$ :

$$\mathbf{T}_p^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbf{R}^n}_p.$$

Элементы этого пространства будем называть *тензорами* (евклидовыми тензорами) ранга  $p$  и обозначать, как и векторы, полужирными буквами.

В  $T_p^n$  можно выделить базис из элементов

$$\underbrace{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p},$$

где  $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\mathbf{e}_{i_k}$  — векторы ортонормированного базиса в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда любой элемент  $\mathbf{X} \in T_p^n$  можно представить в виде разложения по базису

$$\mathbf{X} = X_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p}$$

с компонентами  $X_{i_1 i_2 \dots i_p}$ , и очевидно, что  $\dim T_p^n = n^p$ .

Векторы можно считать тензорами первого ранга, т.е.  $\mathbb{R}^n \equiv T_1^n$ ; а из компонент тензора второго ранга  $\mathbf{X} = X_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  можно составить квадратную матрицу  $[\mathbf{X}]_{ij} = X_{ij}$  порядка  $n \times n$ .

С декартовым произведением евклидовых пространств  $\mathbb{R}^n$  тесно связана операция *тензорного умножения* (*внешнего умножения*)

$$\mathbf{X} = X_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} \in T_p^n, \quad \mathbf{Y} = Y_{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_q} \in T_q^n :$$

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} X_{i_1 i_2 \dots i_p} Y_{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_q} \in T_{p+q}^n.$$

Соответственно, из двух векторов  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{b} = b_j \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n = T_1^n$  можно составить тензор второго ранга  $\mathbf{a} \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \in T_2^n$ , называемый *диадой*. Компоненты этого тензора образуют матрицу  $\mathbf{a} \mathbf{b}^*$ :  $[\mathbf{a} \mathbf{b}^*]_{ij} = a_i b_j$ .

Для тензора второго ранга  $\mathbf{X} = X_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  будем использовать *операцию транспонирования*:

$$\mathbf{X}^* = X_{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

приводящую к транспонированию матрицы коэффициентов тензора.

Тензор второго ранга  $\mathbf{X} \in T_2^n$  называется *симметричным*, если  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ .

Аналогично, можно говорить о симметрии тензора произвольного ранга по некоторой паре индексов. Так, тензоры пьезомодулей третьего ранга  $\mathbf{e} = e_{ikl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ , используемые далее в разделе 1.3, будут симметричными по двум последним индексам:  $e_{ikl} = e_{ilk}$ . Для таких тензоров операция транспонирования будет означать перестановку первого и третьего индексов или пары первых двух и третьего индексов:  $\mathbf{e}^* = e_{lki} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = e_{lik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ .

По аналогии с векторами, для тензоров произвольного ранга можно рассматривать операции сложения и умножения на числа. Именно,

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{X} = X_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p}, \quad \mathbf{Y} = Y_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} \in T_p^n :$$

$$\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{Y} = (\lambda X_{i_1 i_2 \dots i_p} + \mu Y_{i_1 i_2 \dots i_p}) \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} \in \mathbb{T}_p^n.$$

Хотя для тензоров и существует отдельное понятие скалярного умножения, для дальнейшего более важной будет операция *внутреннего произведения* (*простого умножения* или *свертки*)

$$\forall \mathbf{X} = X_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} \in \mathbb{T}_p^n, \quad \mathbf{Y} = Y_{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_q} \in \mathbb{T}_q^n :$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} X_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} k} Y_{k i_p \dots i_{p+q-2}} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_{p+q-2}} \in \mathbb{T}_{p+q-2}^n,$$

при которой производится свертка последнего индекса у  $\mathbf{X}$  и первого индекса у  $\mathbf{Y}$  (суммирование по  $k$  в последней формуле).

Для тензоров  $\mathbf{X} \in \mathbb{T}_p^n$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{T}_q^n$  при  $p \geq 2$ ,  $q \geq 2$  можно определить операцию *двойного внутреннего произведения* (*двойной свертки*)

$$\forall \mathbf{X} = X_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} \in \mathbb{T}_p^n, \quad \mathbf{Y} = Y_{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_q} \in \mathbb{T}_q^n, \quad p, q \geq 2 :$$

$$\mathbf{X} : \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} X_{i_1 i_2 \dots i_{p-2} l k} Y_{k l i_{p-1} \dots i_{p+q-4}} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_{p+q-4}} \in \mathbb{T}_{p+q-4}^n,$$

которая, как видно, состоит в последовательном применении операции простого умножения (свертки) два раза.

Например, для вводимых далее в разделе 1.3 тензора упругих жесткостей  $\mathbf{c}^E = c_{ijkl}^E \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \in \mathbb{T}_4^3$  четвертого ранга и тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{rs} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s \in \mathbb{T}_2^3$  второго ранга:  $\mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{lk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \in \mathbb{T}_2^3$ .

При переходе к другому ортонормированному базису  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$  в  $\mathbf{R}^n$  согласно законам (1.1), (1.2) компоненты тензора  $\mathbf{X} \in \mathbb{T}_p^n$  изменяются по законам, обобщающим (1.3)

$$\mathbf{X} = X_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} = X'_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{e}'_{j_1} \mathbf{e}'_{j_2} \dots \mathbf{e}'_{j_p},$$

$$X_{i_1 i_2 \dots i_p} = q_{i_1 j_1} q_{i_2 j_2} \dots q_{i_p j_p} X'_{j_1 j_2 \dots j_p}, \quad X'_{i_1 i_2 \dots i_p} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_p j_p} X_{j_1 j_2 \dots j_p}. \quad (1.5)$$

Изменение компонент тензора  $\mathbf{X} \in \mathbb{T}_p^n$  при переходе от одного ортонормированного базиса к другому согласно формулам (1.5) является фундаментальным свойством, определяющим само понятие тензора.

Пусть  $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_p^3$  — *тензорная функция* от вектора пространственных координат  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ , имеющая достаточные свойства гладкости (*тензорное поле*). *Оператор градиента*

$$\nabla = \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

называемый *набла-оператором*, имеет ранг вектора (т.е. является тензором первого ранга).

С набла-оператором и тензорным полем можно осуществлять различные тензорные операции. Так, тензорное умножение оператора  $\nabla$  и векторного поля  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \in T_1^3$  дает тензор второго ранга

$$\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Внутреннее умножение набла-оператора  $\nabla$  и тензорного поля  $\Phi(\mathbf{x}) \in T_p^3$  дает тензор ранга  $p - 1$ , называемый *дивергенцией* тензорного поля

$$\operatorname{div} \Phi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \Phi = \mathbf{e}_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi_{ki_2 \dots i_p}}{\partial x_k} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p}.$$

В частности, дивергенция векторного поля  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$  есть скалярная величина (тензор нулевого ранга)

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \stackrel{\text{def}}{=} a_{k,k}.$$

Наконец, приведем формулу Гаусса—Остроградского для тензорных полей. Если  $\Omega$  — ограниченный объем в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  — замкнутая кусочно-гладкая поверхность,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$  — вектор внешней единичной нормали к точке  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , то для непрерывно-дифференцируемого тензорного поля  $\Phi \in T_p^3$  произвольного ранга  $p$  имеет место *формула Гаусса—Остроградского*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \Phi \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \Phi \, d\Gamma,$$

обобщающая аналогичную формулу из математического анализа для векторных полей.

### 1.1.2. Основные обозначения и величины в связанных задачах теории упругости

В данном разделе собраны основные полевые характеристики, материальные свойства и внешние воздействия, вводимые и используемые далее в разделах 1.3 — 1.6. В конце описания каждой величины приводится ее размерность в международной системе единиц Си, причем безразмерная величина обозначается символом «1».

*Характеристики механических, электрических, тепловых, фильтрационных и акустических полей:*

$\mathbf{u}$  — вектор перемещений, м;

$\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформаций, 1;

- $\sigma$  — тензор напряжений,  $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ;  
 $\varphi$  — электрический потенциал, В;  
 $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля, В/м;  
 $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции (электрического смещения),  $\text{Кл/м}^2$ ;  
 $T$  — температура, К;  
 $T_0$  — температура естественного состояния, К;  
 $\theta$  — прирост температуры, К;  
 $S$  — плотность энтропии (термодинамической энтропии), отчитываемой от естественного состояния,  $\text{Дж}/(\text{К} \cdot \text{м}^3) = \text{Н}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}) = \text{Па/К}$ ;  
 $\mathbf{q}$  — вектор потока тепла (вектор удельного теплового потока, вектор плотности теплового потока),  $\text{Вт/м}^2$ ;  
 $\phi$  — пористость, 1;  
 $\mathbf{v}$  — скорость фильтрации (в пороупругости), акустическая скорость (в акустике), м/с;  
 $p$  — поровое давление (в пороупругости), избыточное акустическое давление (в акустике),  $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ;  
 $\psi$  — потенциал скорости,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

*Материальные свойства:*

- $\rho$  — плотность,  $\text{кг/м}^3$ ;  
 $\mathbf{c}^E$  ( $\mathbf{c}$ ) — тензор упругих модулей, вычисленных при постоянном электрическом поле,  $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ;  
 $\mathbf{e}$  — тензор пьезомодулей,  $\text{Кл/м}^2$ ;  
 $\boldsymbol{\epsilon}^S$  — тензор диэлектрических проницаемостей, вычисленных при постоянных деформациях, Ф/м;  
 $\alpha_d$  — коэффициент демпфирования (первый коэффициент демпфирования при учете демпфирования по Релею), 1/с;  
 $\beta_d$  — коэффициент демпфирования (второй коэффициент демпфирования при учете демпфирования по Релею), с;  
 $\boldsymbol{\gamma}$  — тензор коэффициентов температурных напряжений,  $\text{Дж}/(\text{К} \cdot \text{м}^3) = \text{Н}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}) = \text{Па/К}$ ;  
 $c_\varepsilon$  — удельная теплоемкость при постоянной деформации,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = \text{м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$ ;  
 $\mathbf{k}$  — тензор коэффициентов теплопроводностей,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;  
 $\rho_f$  — плотность жидкости,  $\text{кг/м}^3$ ;  
 $\mathbf{b}$  — тензор Био, 1;  
 $N$  — модуль Био,  $\text{м}^2/\text{Н} = 1/\text{Па}$ ;  
 $\mathbf{K}$  — тензор коэффициентов фильтрации, м/с;  
 $c_0$  — скорость звука в акустической среде, м/с.

*Внешние воздействия и связи:*

$\mathbf{f}$  — вектор плотности массовых сил,  $\text{Н/кг} = \text{м/с}^2$ ;

$\sigma_\Omega$  — объемная плотность электрических зарядов,  $\text{Кл/м}^3$ ;

$W$  — интенсивность источников тепла,  $\text{Вт/м}^3$ ;

$\mathbf{u}_\Gamma$  — вектор перемещений на границе, м;

$\mathbf{p}_\Gamma$  — вектор напряжений,  $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ;

$V_j$  — электрический потенциал на электроде  $\Gamma_{\varphi_j}$ , В;

$Q_j$  — суммарный электрический заряд на электроде  $\Gamma_{\varphi_j}$ , Кл;

$\sigma_\Gamma$  — поверхностная плотность электрических зарядов,  $\text{Кл/м}^2$ ;

$\omega$  — круговая частота (угловая частота, радиальная частота, частота вращения),  $\text{рад/с} = \text{рад} \cdot \text{Гц}$ ;

$f = \omega/(2\pi)$  — частота,  $1/\text{с} = \text{Гц}$ ;

$\theta_\Gamma$  — температура (прирост температуры) на части границы, К;

$q_\Gamma$  — поток тепла на поверхности,  $\text{Вт/м}^2$ ;

$h_f$  — коэффициент теплообмена на поверхности,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;

$\theta_b$  — температура (прирост температуры) внешней окружающей среды, К;

$Z$  — импеданс границы,  $\text{Н} \cdot \text{с/м}$ .

## 1.2. Общие положения

В классических задачах математической физики обычно рассматриваются физические поля определенной природы. Например, для деформируемых сред в задачах теории упругости исследуются возникающие при механических внешних воздействиях механические поля, такие как векторное поле перемещений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , тензорные поля деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ , напряжений  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ , и др. В задачах теплопроводности изучается, как под действием тепловых воздействий в телах изменяется поле температур  $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ . В задачах электростатики или квазиэлектростатики диэлектриков исследуются электрические поля, такие как скалярное поле электрического потенциала  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ , вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  и др., возникающие в диэлектриках при электрических внешних воздействиях. Примеры подобных задач легко продолжить.

Во всех приведенных случаях имеем задачи математической физики определенного типа: нестационарные динамические задачи теории упругости описываются системами уравнений гиперболического типа (предельный случай); нестационарные уравнения теплопроводности — уравнениями параболического типа; уравнения квазиэлектростатики диэлектриков — уравнениями эллиптического типа. При этом в случаях задач с



системами дифференциальных уравнений, как, например, для задач теории упругости, все уравнения обычно содержат производные одинакового порядка по пространственным переменным и производные одинакового порядка по времени.

Более сложными с математической точки зрения являются связанные задачи, в которых поля различной природы зависимы друг от друга. Так, можно рассматривать задачи термоупругости, в которых механические и тепловые поля связаны между собой. В задачах электроупругости для пьезоэлектрических сред связаны механические и электрические поля, в задачах термоэлектроупругости — тепловые, механические и электрические поля, и т.д.

Взаимодействие полей различной природы отражается в фундаментальных законах, лежащих в основе теорий связанных физико-механических полей. Эта связанность многообразна и в различных ситуациях и в различных средах проявляется существенно различным образом. В результате получается большое число отдельных важных для практики теорий механики деформируемого твердого тела с усложненными свойствами, в которых также могут рассматриваться еще и различные механизмы связанности полей. Например, в рамках термоупругости существуют следующие теории: теория температурных напряжений, теория теплопроводности с конечной скоростью распространения тепла, теория терморазогрева при установившихся колебаниях и пр.

Расчеты задач со связанными физико-механическими полями являются достаточно сложными, как в силу увеличения количества неизвестных полевых характеристик, так и из-за различных характерных масштабов изменения во времени основных и сопряженных полей. Наиболее эффективным численным методом, позволяющим с успехом проводить анализ задач теории упругости с усложненными свойствами, на сегодняшний день следует признать метод конечных элементов (МКЭ).

Существует ряд «тяжелых» коммерческих конечно-элементных (КЭ) пакетов (ANSYS, ABAQUS, COMSOL, MSC MARC и др.), позволяющих проводить расчеты связанных задач, и некоторые специализированные пакеты, ориентированные на различные классы задач теории упругости с усложненными физико-механическими свойствами (например, ICEPACK для задач термоупругости, PZFlex, ATILA, ACELAN для задач пьезоэлектричества и др.)

Естественно, что в силу сложности связанных задач в методологии и в реализации конечно-элементных расчетов сохраняется еще обширное поле для исследований. Представляет интерес и сравнение различных конечно-

элементных методов и их реализаций с позиций точности, быстродействия и эффективности. Специфические особенности связанных физико-механических задач делают актуальными как их математические исследования, так и разработку эффективных численных методов, специальных программных средств и модулей для имеющихся вычислительных комплексов, позволяющих автоматизировать некоторые важные этапы анализа связанных задач.

Дадим некоторую классификацию связанных задач на примере двух полей различной природы, например, поля перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и поля температур (точнее, прироста температуры)  $\theta(\mathbf{x}, t)$ . Систему связанных дифференциальных уравнений для основного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и сопряженного поля  $\theta(\mathbf{x}, t)$  можно в общем случае записать в форме

$$L_{uu}(\nabla, \partial_t)\mathbf{u} + L_{u\theta}(\nabla, \partial_t)\theta = \mathbf{f}_u,$$

$$L_{\theta u}(\nabla, \partial_t)\mathbf{u} + L_{\theta\theta}(\nabla, \partial_t)\theta = \mathbf{f}_\theta,$$

где  $L_{uu}$ ,  $L_{u\theta}$ ,  $L_{\theta u}$ ,  $L_{\theta\theta}$  — дифференциальные операторы, причем возможно нелинейные и зависящие также от функций  $\mathbf{u}$  и  $\theta$ .

Для классических постановок к этой системе надо добавить соответствующие краевые и начальные условия. Для дальнейшего математического анализа и построения численных методов удобно перейти к обобщенным или слабым постановкам задач, которые обычно являются вариационными или энергетическими соотношениями, выражающими принципы равенства возможных работ и баланса энергии системы.

При применении к слабой постановке начально-краевой задачи в соответствующем конечномерном пространстве полудискретных аппроксимаций вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \theta(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{N}_\theta^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(t)$$

с матрицей базисных функций  $\mathbf{N}_u(\mathbf{x})$ , вектором базисных функций  $\mathbf{N}_\theta(\mathbf{x})$  и векторами функций (констант) аппроксимаций  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{T}$  (в методе конечных элементов — узловых степеней свободы) будем иметь систему уравнений

$$\mathbf{A}_{uu}(\partial_t) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{A}_{u\theta}(\partial_t) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_u, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A}_{\theta u}(\partial_t) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{A}_{\theta\theta}(\partial_t) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_\theta, \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{A}_{uu} \neq 0$ ;  $\mathbf{A}_{\theta\theta} \neq 0$ .

Важнейшие типы связанных задач можно характеризовать следующим образом:

– если  $\mathbf{A}_{u\theta} \neq 0$ ;  $\mathbf{A}_{\theta u} \neq 0$ , то имеем задачи с полной матричной связностью;

- если  $\mathbf{A}_{u\theta} = 0$ ;  $\mathbf{A}_{\theta u} = 0$ , но некоторые диагональные блоки ( $\mathbf{A}_{uu}$  или  $\mathbf{A}_{\theta\theta}$ ) зависят от полей другой природы (например,  $\mathbf{A}_{uu} = \mathbf{A}_{uu}(\mathbf{T})$ ) то имеем задачи с блочно-диагональной матричной связностью;
- если один из блоков  $\mathbf{A}_{u\theta}$  или  $\mathbf{A}_{\theta u}$  равен нулю, то имеем задачи с частичной связностью.

Также возможны случаи, когда в каких-то из матричных блоков отсутствуют производные по времени, а в других — имеются.

К классам связанных физико-механических задач относятся задачи термоупругости, электроупругости, магнитоупругости, акустоупругости, термоэлектроупругости, акустоэлектроупругости и т.д.

Методы решения связанных задач зависят от типа связности. В задачах с полной матричной связностью используются обычные, например, конечно-элементные алгоритмы для единого вектора неизвестных  $\mathbf{a} = \{\mathbf{U}, \mathbf{T}\}$ . Для задач с различными порядками производных по времени в системах уравнений более подходящими могут оказаться блочные алгоритмы, использующие редукцию квазистатических степеней свободы. В задачах электроупругости, например, в ряде случаев удобно редуцировать степени свободы электрического потенциала.

Задачи с блочно-диагональной матричной связностью являются обычно нелинейными задачами, для решений которых применимы методы Ньютона—Рафсона решения нелинейных задач.

В задачах с частичной связностью, например, при  $\mathbf{A}_{\theta u} = 0$ , дискретизованные задачи решаются в два этапа. Сначала решается задача для сопряженного поля  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{A}_{\theta\theta}(\partial_t) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_\theta.$$

Затем найденные значения  $\mathbf{T}$  подставляются в уравнение для основного поля  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{A}_{uu}(\partial_t) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}_u - \mathbf{A}_{u\theta}(\partial_t) \cdot \mathbf{T}.$$

Эта задача по существу является обычной задачей для основного поля, но с дополнительной добавкой в векторе правых частей.

Наконец, имеются связанные задачи, в которых векторы правых частей зависят от неизвестных функций, например,  $\mathbf{F}_u = \mathbf{F}_u(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ ,  $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{F}_\theta(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ . Такие ситуации возникают и при решении задач с полной матричной связностью с использованием итерационных алгоритмов. Например, задачу (1.6), (1.7) с полной матричной связностью можно записать в виде

$$\mathbf{A}_{uu}(\partial_t) \cdot \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{F}}_u, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A}_{\theta\theta}(\partial_t) \cdot \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{F}}_\theta, \quad (1.9)$$

с  $\tilde{\mathbf{F}}_u = \mathbf{F}_u - \mathbf{A}_{u\theta}(\partial_t) \cdot \mathbf{T}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_\theta = \mathbf{F}_\theta - \mathbf{A}_{\theta u}(\partial_t) \cdot \mathbf{U}$ , а для ее решения применять итерационные методы.

В более общем случае, если  $\mathbf{A}_{ui} = \mathbf{A}_{ui}(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ ,  $\mathbf{A}_{\theta\theta} = \mathbf{A}_{\theta\theta}(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_u = \tilde{\mathbf{F}}_u(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_\theta = \tilde{\mathbf{F}}_\theta(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ , то задача (1.8), (1.9) является нелинейной, и для ее решения требуются специальные итерационные методы. Такая задача по терминологии ANSYS [25] называется задачей со слабой (секвенциальной) связанностью.

### 1.3. Моделирование задач электроупругости

Основными объектами исследований в этом разделе будут являться активные диэлектрики, обладающие пьезоэлектрическими свойствами. Пьезоэффект состоит в линейной связи между электрическими и механическими полями. История открытия этого явления описана во многих работах, например, в [11, 28] и др. Здесь приведем лишь краткий экскурс по истории пьезоэффекта. В 1880 г. Пьером и Жаком Кюри было обнаружено, что при сжатии в определенных направлениях некоторых кристаллов на их поверхностях появляются электрические заряды, пропорциональные приложенному давлению. Данное явление получило название *прямого пьезоэффекта* (от греческого глагола *piezein* — давить). Сразу после этого открытия, в 1881 году, Габриэлем Липпманом, исходя из термодинамических соотношений и из своей теоремы об обратимости физических явлений, был предсказан *обратный пьезоэффект*: кристаллы, обладающие пьезосвойствами, при приложении электрического поля должны деформироваться по линейному закону. В этом же году Пьер и Жак Кюри экспериментально подтвердили существование обратного пьезоэффекта и установили, что пьезомодули (коэффициенты пропорциональности) прямого и обратного пьезоэффектов одинаковы.

Пьер Кюри сформулировал также принципы, связывающие свойства симметричности и несимметричности в явлениях и в порождающих их причинах [5]. По принципам Пьера Кюри явление обладает всеми элементами симметрии вызывающих его причин и может иметь более высокую симметрию, чем причины. Асимметрия же явления предопределена асимметрией причин. Иначе говоря, явление может существовать только в системе, являющейся подгруппой симметрии явления.

Согласно этим принципам, в системе «кристалл — внешние воздействия» кристалл изменяет свою симметрию таким образом, что сохраняются лишь элементы симметрии, общие с элементами воздействия. Следовательно, поскольку симметричное сжатие обладает центром симметрии,

то для кристаллов с центром симметрии при симметричном сжатии центральная симметрия должна сохраняться. Однако, так как явление электрической поляризации не обладает центральной симметрией, то такая асимметрия должна быть предопределена асимметрией системы. Таким образом, из принципа Кюри следует вывод о том, что *пьезоэлектрическими свойствами могут обладать только те кристаллы, которые не имеют центра симметрии*. Более детально связь явления пьезоэффекта с кристаллической структурой исследовал в 1884 г. В. Фойхт. Как следует из предыдущих рассуждений, все эти классы кристаллов не могут иметь центра симметрии. В результате было теоретически доказано, что пьезоэлектрические материалы обязательно должны быть анизотропными.

В течение многих лет природные кристаллы были единственными доступными пьезоэлектрическими материалами, и на их основе были созданы многие пьезоэлектрические устройства. В дальнейшем, приблизительно с середины 60-х годов двадцатого века, стали разрабатываться искусственные пьезокерамические материалы. Было обнаружено, что материалы на основе титаната бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) обладают достаточно сильным пьезоэффектом. Последующие разработки показали, что материалы ЦТС или PZT на основе цирконата-титаната свинца обладают еще большей чувствительностью и могут работать при достаточно больших температурах. В итоге возникла целая технология производства новых пьезокерамических материалов и пьезоэлектрических устройств на их основе. Современная пьезоэлектрическая керамика на порядки чувствительнее к электрическим и механическим воздействиям, чем природные пьезокристаллы. Варьируя исходные составы пьезокерамики, можно создавать материалы с различными свойствами, необходимыми потребителю. Пьезокерамика достаточно прочна, химически инертна и относительно дешева в производстве. Кроме того, из нее можно изготавливать пьезоэлектрические элементы практически любой требуемой формы и размеров.

В настоящее время на эффекте связности механических и электрических полей работают многочисленные пьезоэлектрические устройства, выполненные из различных специально разработанных составов пьезокерамики. Современное пьезоэлектрическое приборостроение имеет чрезвычайно широкое поле применений.

Пьезоэлектрические преобразователи преобразуют электрическое внешнее воздействие (электрическое напряжение или ток) в механические движения, как правило, в звуковые или ультразвуковые колебания. Пьезопреобразователи, генерирующие ультразвуковые акустические колебания, используются в медицинской диагностике и терапии, например, для

распыления жидкостей, а также для очистки поверхностей, как, например, в ультразвуковых стиральных машинах, в сварке, для повышения газо- и нефтеотдачи пластов и для многих других приложений. Обратимость пьезоэффекта позволяет пьезопреобразователю не только генерировать механические колебания, но и принимать их и регистрировать, преобразуя механические сигналы в электрические. Поэтому пьезоэлектрические преобразователи широко используются как датчики расстояния, уровня жидкости, параметров среды и т. д.

Другими типами устройств пьезотехники являются генераторы, пьезотрансформаторы напряжения и тока, пьезодатчики, сенсоры, актюаторы, пьезоэлектрические фильтры и линии задержки и пр.

Математические модели пьезоэлектрических устройств базируются на уравнениях связанной теории электроупругости или пьезоэлектричества. Библиография по пьезоэлектричеству достаточно обширна и подразделяется на литературу физического характера, наиболее многочисленную литературу, посвященную прикладным или техническим вопросам пьезоэлектрического приборостроения, и, наконец, на работы, в которых рассматриваются механические, математические и вычислительные проблемы теории электроупругости. Классическими трудами, в которых прекрасно изложены физические и механические аспекты пьезоэлектричества, являются монографии [3, 11] и др. Различные проблемы теории электроупругости как раздела механики изложены в [12, 16, 20, 32], а численные методы решения задач электроупругости — в [32, 13, 36]. Современные подходы к расчету пьезоэлектрических устройств базируются на конечно-элементных технологиях, алгоритмах триангуляции, ансамблирования и на методах решения задач вычислительной математики с большими разреженными матрицами. Основой этих подходов являются слабые или вариационные постановки связанных задач электроупругости и их аппроксимации. Данные вопросы и будут рассмотрены в следующих разделах.

### 1.3.1. Классические постановки задач электроупругости

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$ , занимаемая пьезоэлектрическим телом;  $\Gamma = \partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ ;  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$  — вектор внешней единичной нормали к  $\Gamma$  ( $\mathbf{x} \in \Gamma$ ).

Будем считать, что состояние пьезоэлектрической среды определяется вектор-функцией перемещений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и скалярной функцией электрического потенциала  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ .

По вектор-функции перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  задается тензор малых деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2, \quad (1.10)$$

а по функции электрического потенциала — вектор напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (1.11)$$

Отметим, что как компоненты  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформаций, так и компоненты  $E_i$  вектора напряженности электрического поля определяются через первые производные по пространственным координатам от полевых функций  $u_i(\mathbf{x}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , соответственно,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.12)$$

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\varphi_{,i}. \quad (1.13)$$

Для пьезоэлектрической среды в линейном приближении существует линейная связь между тензором деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и вектором напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  с тензором напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и вектором электрической индукции  $\mathbf{D}$ . Эти зависимости носят название определяющих соотношений и имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}. \quad (1.15)$$

Здесь  $\mathbf{c}^E$  — тензор четвертого ранга упругих модулей, вычисленных при постоянном электрическом поле ( $E$ );  $\mathbf{e}$  — тензор третьего ранга пьезомодулей;  $\boldsymbol{\epsilon}^S$  — тензор второго ранга диэлектрических проницаемостей, вычисленных при постоянных деформациях ( $S$ ).

В покомпонентной записи уравнения (1.14), (1.15) можно записать в форме:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (1.16)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k. \quad (1.17)$$

Заметим, что тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  является симметричным тензором второго ранга, т. е.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Тензор упругих модулей  $\mathbf{c}^E$  является полусимметричным тензором четвертого ранга

$$c_{ijkl}^E = c_{jikl}^E = c_{ijlk}^E = c_{klij}^E, \quad (1.18)$$

а тензор пьезомодулей  $\mathbf{e}$  третьего ранга симметричен только по двум последним индексам

$$e_{ikl} = e_{ilk}. \quad (1.19)$$

Компоненты  $c_{ijkl}^E$ ,  $e_{ijk}$ ,  $\epsilon_{ij}^S$  являются материальными константами, характеризующими, соответственно, упругие (жесткостные), пьезоэлектрические и диэлектрические свойства материала тела. В большинстве случаев эти величины постоянные (для однородных тел) или кусочно-постоянные (для кусочно-однородных тел). Однако для неоднородных тел модули могут быть непрерывными или кусочно-непрерывными функциями от  $\mathbf{x}$ .

Если свернуть уравнение (1.14) двойным внутренним произведением (двойной сверткой) с  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , уравнение (1.15) умножить скалярно на  $\mathbf{E}^*$ , а затем сложить полученные соотношения, то придем к выражению для плотности внутренней энергии пьезоэлектрического тела

$$\Pi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}). \quad (1.20)$$

Из физического требования положительной определенности внутренней энергии следуют условия положительной определенности для тензоров упругих модулей и диэлектрических проницаемостей:

$$\exists \alpha_1 > 0 : \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon} \geq \alpha_1 \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.21)$$

$$\exists \alpha_2 > 0 : \quad \forall \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E} \geq \alpha_2 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}. \quad (1.22)$$

Для сплошной среды должны удовлетворяться уравнения движения, которые в линейном приближении и при пренебрежении демпфирующими факторами имеют такой же вид, как и в обычной теории упругости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.23)$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  — плотность материала,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — вектор плотности массовых сил,  $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ .

В силу того, что скорости упругих и электромагнитных волн отличаются на порядки, а пьезоэлектрические среды являются диэлектриками, не проводящими электрический ток, можно принять уравнение приближения квазиэлектростатики

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \sigma_\Omega, \quad (1.24)$$

где  $\sigma_\Omega$  — объемная плотность электрических зарядов, причем обычно в диэлектриках  $\sigma_\Omega = 0$ .

В покомпонентной записи уравнения (1.23), (1.24) имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho u_{i,tt}, \quad (1.25)$$



$$D_{i,i} = \sigma_{\Omega}. \quad (1.26)$$

Подставляя в (1.23), (1.24) определяющие соотношения (1.14), (1.15) и формулы (1.10), (1.11), получаем итоговую систему дифференциальных уравнений линейной электроупругости относительно функций  $\mathbf{u}$  и  $\varphi$ :

$$\nabla \cdot (\mathbf{c}^E : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{e}^* \cdot \nabla \varphi) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{e} : \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \nabla \varphi) = \sigma_{\Omega}. \quad (1.28)$$

(Здесь использовано, что в силу свойств симметрии (1.18), (1.19) тензоров  $\mathbf{c}^E$  и  $\mathbf{e}$  имеют место равенства:  $\mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{c}^E : \nabla \mathbf{u}$ ;  $\mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} : \nabla \mathbf{u}$ .)

В покомпонентной записи система (1.27), (1.28) записывается так:

$$(c_{ijkl}^E u_{k,l} + e_{kij} \varphi_{,k})_{,j} + \rho f_i = \rho u_{i,tt}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.29)$$

$$(e_{ikl} u_{k,l} - \epsilon_{ik}^S \varphi_{,k})_{,i} = \sigma_{\Omega}. \quad (1.30)$$

Как видно, для пьезоэлектрической среды имеем связанную систему (1.29), (1.30) четырех дифференциальных уравнений относительно четырех функций  $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ . Все эти уравнения являются уравнениями второго порядка по пространственным переменным. Между тем, производные по времени (второго порядка) имеются в уравнениях (1.29), но отсутствуют в уравнении квазиэлектростатики (1.30). Это обстоятельство составляет существенную особенность уравнений электроупругости.

Для постановки начально-краевой задачи электроупругости необходимо к системе уравнений (1.27), (1.28) или (1.29), (1.30) присовокупить граничные и начальные условия.

Граничные условия можно подразделить на механические и электрические. Для формулировки механических граничных условий предположим, что граница  $\Gamma$  разбивается на два участка  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_{\sigma}$ , на которых задаются, соответственно, векторы перемещений  $\mathbf{u}_{\Gamma}$  и напряжений  $\mathbf{p}_{\Gamma}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\Gamma}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma}, \quad (1.32)$$

где, вообще говоря, внешние воздействия  $\mathbf{u}_{\Gamma}$  и  $\mathbf{p}_{\Gamma}$  могут зависеть от  $\mathbf{x}$  и  $t$ .

Таким образом, здесь мы ограничиваемся только основными условиями первого и второго рода: условие (1.31) — условие первого рода или условие типа Дирихле, условие (1.32) — условие второго рода или условие типа Неймана. Стоит отметить, что эти условия могут быть заданы на частях границы, т. е. совсем не обязательно, чтобы  $\Gamma = \Gamma_u$  или  $\Gamma = \Gamma_{\sigma}$ .

Важными случаями являются однородные условия первого или второго рода, когда  $\mathbf{u}_\Gamma = 0$  или  $\mathbf{p}_\Gamma = 0$ . В случае  $\mathbf{u}_\Gamma = 0$  говорят о жестко закрепленном участке границы  $\Gamma_u$ , а при  $\mathbf{p}_\Gamma = 0$  — о свободной от напряжений границе  $\Gamma_\sigma$ . Как и для упругого тела, условие жесткого закрепления в теории электроупругости является наиболее распространенным типом граничного условия первого рода (1.31), а на большей части границы  $\Gamma = \Gamma_\sigma$  вектор  $\mathbf{p}_\Gamma$  обычно равен нулю.

Отметим, что для единственности решения удобно потребовать, чтобы граница  $\Gamma_u$  была не пуста, т.е. чтобы не допускались решения однородной краевой задачи в виде движения тела как твердого целого:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{rigid} = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}_c = \text{const}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_c = \text{const}$ .

Для задания электрических граничных условий будем считать, что существует еще одно независимое разбиение границы  $\Gamma$ :  $\Gamma = \Gamma_\varphi \cup \Gamma_D$ .

Участок  $\Gamma_\varphi$  может в свою очередь состоять из несоприкасающихся между собой частей  $\Gamma_{\varphi j}$ ;  $j = 0, 1, \dots, M$ , т.е.  $\Gamma_\varphi = \cup_j \Gamma_{\varphi j}$ . Эти участки назовем электродированными поверхностями. В реальности участки  $\Gamma_{\varphi j}$  есть части границы пьезоэлектрического тела, покрытые металлизированными поверхностями, которые и называются электродами. Металлическое нанесение обычно очень тонкое, и математически его можно считать бесконечно тонким. Однако, в силу принятого допущения квазиэлектростатики, попадающий на электрод  $\Gamma_{\varphi j}$  электрический потенциал  $\Phi_{\Gamma j}$  мгновенно распространяется на весь участок  $\Gamma_{\varphi j}$ , и поэтому  $\Phi_{\Gamma j}$  не зависит от  $\mathbf{x}$  на  $\Gamma_{\varphi j}$ . Таким образом, электрод следует считать эквипотенциальной поверхностью.

Наличие электродов является важной отличительной особенностью задач квазиэлектростатики диэлектриков и более общих задач электроупругости.

Кроме того, для электродов следует различать два важных случая. На некоторых электродированных поверхностях  $\Gamma_{\varphi j}$  значения потенциалов  $\Phi_{\Gamma j}$  могут считаться известными ( $\Phi_{\Gamma j} = V_j$ ), и такие электроды будем называть электродами, запитываемыми генераторами электрического напряжения. На других электродированных поверхностях  $\Gamma_{\varphi j}$  потенциалы  $\Phi_{\Gamma j}$ , по прежнему не зависящие от  $\mathbf{x}$ , являются неизвестными величинами. Тем не менее для них считается известным суммарный электрический заряд  $Q_j$  или ток  $I_j = \pm dQ_j/dt$ , где знак «+» или «-» определяется принятым направлением тока во внешней цепи. Участки  $\Gamma_{\varphi j}$  второго типа будем называть электродами, запитываемыми генераторами тока.

Для электродов первого типа при  $V_j = 0$  будем говорить о короткозамкнутых или заземленных электродах, а для электродов второго

типа при  $Q_j = 0$  будем говорить о свободных электродах, к которым не подводится электрический ток.

Описанные выше граничные условия на электродах математически можно сформулировать следующим образом. Пусть  $\Gamma_\varphi = \Gamma_V \cup \Gamma_Q$ ;  $\Gamma_V = \cup \Gamma_{\varphi_j}$ ,  $j \in J_V = \{0, m+1, \dots, M\}$ ;  $\Gamma_Q = \cup \Gamma_{\varphi_j}$ ,  $j \in J_Q = \{1, 2, \dots, m\}$ , причем участки  $\Gamma_{\varphi_j}$  не соприкасаются друг с другом. (Последнее нужно, чтобы не допускались ситуации с разрывными граничными условиями для электрического потенциала.)

На электродах  $\Gamma_{\varphi_j} \subseteq \Gamma_V$ , запитываемых генераторами электрического напряжения, задаются потенциалы  $V_j$ :

$$\varphi = \Phi_{\Gamma_j}; \quad \Phi_{\Gamma_j} = \Phi_{\Gamma_j}(t) = V_j(t); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_V. \quad (1.33)$$

На электродах  $\Gamma_{\varphi_j} \subseteq \Gamma_Q$ , запитываемых генераторами тока, ставятся следующие граничные условия:

$$\varphi = \Phi_{\Gamma_j}; \quad \Phi_{\Gamma_j} = \Phi_{\Gamma_j}(t); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_Q, \quad (1.34)$$

$$\int_{\Gamma_{\varphi_j}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\Gamma = -Q_j; \quad I_j = \pm \dot{Q}_j; \quad j \in J_Q. \quad (1.35)$$

Необычность граничных условий (1.34), (1.35) состоит не только в том, что функция  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  должна принимать постоянные значения  $\Phi_{\Gamma_j}$  (при каждом фиксированном моменте времени  $t$ ), но и в том, что задается некоторое интегральное условие, фактически и являющееся дополнительным уравнением для нахождения  $\Phi_{\Gamma_j}$ .

В теории упругости аналогом условий (1.34), (1.35) являются условия контактного типа. Если жесткий штамп вдавливается в деформируемое тело, то осадка штампа аналогична потенциалу  $\Phi_{\Gamma_j}$ , а для нахождения осадки задается интегральное условие, выражающее равенство интеграла от контактных напряжений под штампом суммарной силе, действующей на штамп (если не учитывать моменты и повороты штампа).

Отличие от задач теории упругости здесь состоит в том, что если для задач теории упругости граничные условия типа (1.34), (1.35) принимаются только для некоторых типов задач, то для задач электроупругости условия (1.34), (1.35) требуются для анализа работы большинства реальных пьезоэлектрических устройств.

Наконец, на неэлектропроводных поверхностях  $\Gamma_D$  задается поверхностная плотность электрических зарядов  $\sigma_\Gamma = \sigma_\Gamma(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -\sigma_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D. \quad (1.36)$$

Из (1.36) становится более ясна формула (1.35). Поскольку, как известно из электростатики диэлектриков,  $(-\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})$  есть поверхностная плотность зарядов, то интегрирование функции  $(-\mathbf{n} \cdot \mathbf{D})$  во всему участку  $\Gamma_{\varphi j}$  дает суммарный электрический заряд на этом участке.

Итак, основные типы граничных условий электроупругости даются формулами (1.31) – (1.36).

Для нестационарных задач, как известно, нужны еще начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, +0) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}); \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, +0) = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.37)$$

где  $\mathbf{u}_s, \mathbf{v}_s$  — начальные смещения и скорости точек тела, соответственно.

Таким образом, постановка начально-краевых задач электроупругости включает систему дифференциальных уравнений (1.27), (1.28) или (1.29), (1.30), граничные условия (1.31)–(1.36) и начальные условия (1.37).

Отметим, что представленная выше система дифференциальных уравнений динамической теории электроупругости (1.27), (1.28) или (1.29), (1.30) имеет один существенный для практических применений недостаток. В этой системе не учитываются эффекты затухания, демпфирования или вязкости. (Эти слова будем далее использовать как синонимы.) По аналогии с классическими задачами теории упругости примем здесь способ учета демпфирования по Релею, удобный для дальнейшего применения численных методов. Именно, в уравнения движения (1.23) добавим слагаемое, пропорциональное скорости точек тела

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (1.38)$$

а определяющее соотношение (1.14) изменим следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E : (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}. \quad (1.39)$$

Здесь в (1.38), (1.39)  $\alpha_d$  и  $\beta_d$  — неотрицательные коэффициенты демпфирования.

Тогда система дифференциальных уравнений теории электроупругости с демпфированием по Релею будет определяться уравнениями (1.10), (1.11), (1.39), (1.15), (1.38), (1.24), и, следовательно, в системе (1.27), (1.28) вместо (1.27) будем иметь

$$\nabla \cdot (\mathbf{c}^E : (\nabla \mathbf{u} + \beta_d \nabla \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{e}^* \cdot \nabla \varphi) + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}. \quad (1.40)$$

Принятый способ учета демпфирования по Релею имеет много недостатков. Так, добавление слагаемого  $\alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}$  в (1.38) термодинамически

не обосновано, а вместо (1.39) для анизотропных тел логичнее было бы принять хотя бы соотношение

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\mathbf{c}}^E : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E},$$

где  $\tilde{\mathbf{c}}^E = \beta_d \mathbf{c}^E$  будет лишь частным случаем этого более общего соотношения. Другие, еще более общие формы определяющих соотношений могут быть построены в рамках теории вязкоэлектроупругости.

Однако, несмотря на все отмеченные недостатки, способ учета демпфирования по Релею является одним из наиболее простых, позволяет качественно описать основные эффекты затухания волн, и этот способ принят в моделях, заложенных в таких известных конечно-элементных программных комплексах, как ANSYS, ABAQUS и др.

В связи с изложенным, далее при необходимости учета затухания в задачах электроупругости будем использовать способ учета демпфирования по Релею, т.е. начально-краевые задачи электроупругости будем описывать уравнениями (1.10), (1.11), (1.39), (1.15), (1.38), (1.24), граничными условиями (1.31) – (1.36) и начальными условиями (1.37).

В случае статических задач все внешние воздействия не зависят от времени  $t$ , начальные условия отсутствуют, и в уравнениях движения (1.23) или в (1.38), (1.39) следует опустить члены, содержащие производные по времени (поскольку для задач статики  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , и  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} = 0$ ).

Пару функций  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$ , удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, граничным условиям и начальным условиям (для нестационарных задач), будем называть классическим или обычным решением.

Установление свойств гладкости решения в зависимости от гладкости внешних воздействий, области  $\Omega$ , ее границы  $\Gamma$ , участков с различными краевыми условиями, материальных констант ( $c_{ijkl}^E$ ,  $e_{kij}$ ,  $\epsilon_{ik}^S$ ), внешних воздействий ( $\mathbf{f}$ ,  $\sigma_\Omega$ ,  $\mathbf{u}_\Gamma$ ,  $\mathbf{p}_\Gamma$ ,  $V_j$ ,  $Q_j$  или  $I_j$ ,  $\sigma_\Gamma$ ) и начальных условий ( $\mathbf{u}_s$ ,  $\mathbf{v}_s$ ) является задачей отдельного математического исследования. Очевидно, что функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  должны быть по крайней мере дважды дифференцируемыми по  $\mathbf{x}$  и по  $t$ , поскольку вторые производные фигурируют в системе дифференциальных уравнений (1.29), (1.30). В следующем разделе будет сформулировано другое понятие решения задачи электроупругости с более слабыми требованиями на гладкость, чем у классического решения.

### 1.3.2. Обобщенные постановки задач электроупругости

Переход от классической постановки задачи к обобщенной достаточно стандартен, и для задачи электроупругости состоит из тех же шагов, что

и для других краевых задач с системами дифференциальных уравнений дивергентного типа.

Эти этапы при преобразованиях только по пространственным координатам состоят в следующем:

1) умножение дифференциальных уравнений на пока произвольные, но достаточно гладкие проекционные функции и интегрирование по области  $\Omega$ ;

2) интегрирование по частям интегралов с оператором дивергенции, понижение порядка старших производных по пространственным координатам и получение (по возможности) симметричных интегральных форм;

3) применение формул Гаусса—Остроградского для перехода от интегралов по области с оператором дивергенции к интегралам по границе;

4) преобразование интегралов по границе, полученных после применения формул Гаусса—Остроградского, с использованием краевых условий;

4.1) на части границы задаются ограничения на проекционные функции, соответствующие однородным краевым условиям (главным граничным условиям) на этих участках;

4.2) на других участках границы используются краевые условия с проекциями по нормали потоковых величин ( $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$  и т.д.);

5) снятие неоднородности главных граничных условий путем подбора функций, удовлетворяющих неоднородным главным краевым условиям на части границы;

6) определение необходимых функциональных пространств и формулировка слабой (обобщенной) постановки задачи.

Отметим, что для уравнений порядка  $2m$  второй этап требуется повторить  $m$  раз. Например, задачи изгиба балок описываются дифференциальными уравнениями четвертого порядка, и для них требуется два раза применять процедуру интегрирования по частям.

Описанная схема служит основой так называемых полудискретных численных алгоритмов, когда вначале по времени не производится никаких преобразований, и поэтому проекционные функции могут зависеть только от  $\mathbf{x}$ , но не зависят от  $t$ . Слабая или обобщенная формулировка задачи в этом случае соответствует вариационному принципу Лагранжа.

Альтернативный подход состоит в интегрировании по области  $\Omega$  и по времени  $t$  на некотором интервале  $[0, T]$ . В этом случае проекционные функции должны зависеть как от  $\mathbf{x}$ , так и от  $t$ , а для интегрирования по времени может использоваться операция свертки. Дальнейшие преобразования приводят к совершенно другой обобщенной постановке, соответствующей вариационному принципу Гамильтона.

В случае стационарных (статических) задач возможна только первая схема, поскольку нет зависимости от времени (кроме задач с памятью, типа задач теории вязкоупругости). Рассмотрим, например, статическую или квазистатическую задачу электроупругости, когда в (1.23) нет члена с  $\rho\ddot{\mathbf{u}}$ , и уравнение движения переходит в уравнение равновесия. Следуя описанной выше схеме, умножим уравнение статики (1.23) без  $\rho\ddot{\mathbf{u}}$  скалярно на некоторую, пока произвольную, но достаточно гладкую вектор-функцию  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$  и проинтегрируем по области  $\Omega$ . Аналогично, уравнение (1.24) умножим на произвольную достаточно гладкую функцию  $\chi(\mathbf{x})$  и также проинтегрируем по  $\Omega$ .

Используя формулы тензорного анализа

$$\mathbf{v}^* \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)) = \nabla \cdot (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)) - (\nabla \mathbf{v}^*)^* : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi), \quad (1.41)$$

$$\chi \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) = \nabla \cdot (\chi \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)) - (\nabla \chi)^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi), \quad (1.42)$$

получаем

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}^*)^* : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Omega, \quad (1.43)$$

$$- \int_{\Omega} (\nabla \chi)^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \chi \sigma_{\Omega} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\chi \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Omega. \quad (1.44)$$

Последние интегралы в (1.43), (1.44) есть интегралы с оператором дивергенции и могут быть преобразованы к поверхностным интегралам по формуле Гаусса—Остроградского

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v}^* \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v}^* \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Gamma, \quad (1.45)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\chi \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Omega = \int_{\Gamma} \chi (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Gamma. \quad (1.46)$$

Теперь в интегралах по границе  $\Gamma$  нужно попытаться учесть краевые условия.

Для механических граничных условий  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma}$ , и на  $\Gamma_{\sigma}$  по (1.32) задан вектор напряжений  $\mathbf{p}_{\Gamma} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)$ . На  $\Gamma_u$  величина  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)$  неизвестна, и единственной возможностью исключить зависимость от  $\mathbf{u}, \varphi$  является требование, чтобы  $\mathbf{v}$  обращалась в нуль на  $\Gamma_u$ .

Итак, на проекционную функцию  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  необходимо наложить однородное краевое условие, соответствующее (1.31):

$$\mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (1.47)$$

Тогда поверхностный интеграл в (1.45) может быть представлен в виде

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v}^* \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{p}_\Gamma d\Gamma. \quad (1.48)$$

Для электрических граничных условий  $\Gamma = \Gamma_\varphi \cup \Gamma_D$ ;  $\Gamma_\varphi = \Gamma_V \cup \Gamma_Q$ ;  $\Gamma_V = \cup \Gamma_{\varphi j}$ ,  $j \in J_V = \{0, m+1, \dots, M\}$ ;  $\Gamma_Q = \cup \Gamma_{\varphi j}$ ,  $j \in J_Q = \{1, 2, \dots, m\}$ ; и имеем формулы (1.33)–(1.36).

На участке  $\Gamma_D$  величина  $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)$  известна по (1.36) и равна  $(-\sigma_\Gamma)$ .

На  $\Gamma_V$ , аналогично механическому граничному условию на  $\Gamma_u$ , следует потребовать, чтобы проекционная функция  $\chi$  обращалась в нуль:

$$\chi = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j \in J_V. \quad (1.49)$$

На  $\Gamma_Q$  достаточно наложить условие, чтобы функция  $\chi(\mathbf{x})$  принимала значения, не зависящие от  $\mathbf{x}$ :

$$\chi = X_j; \quad X_j = \text{const}_j; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}, \quad j \in J_Q. \quad (1.50)$$

Тогда, на участках  $\Gamma_{\varphi j}$ ,  $j \in J_Q$ , запитываемых генераторами тока, имеем:

$$\int_{\Gamma_{\varphi j}} \chi(\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Gamma = X_j \int_{\Gamma_{\varphi j}} \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) d\Gamma = -X_j Q_j, \quad j \in J_Q.$$

В результате, при выполнении требований (1.49), (1.50) на проекционную функцию  $\chi$  поверхностный интеграл в (1.46) преобразуется к виду

$$\int_{\Gamma} \chi(\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi)) d\Gamma = - \int_{\Gamma_D} \chi \sigma_\Gamma d\Gamma - \sum_{j \in J_Q} X_j Q_j. \quad (1.51)$$

Таким образом, последние интегралы в (1.43), (1.44) можно представить как функционалы от  $\mathbf{v}$  и  $\chi$ , используя (1.45), (1.46), (1.48), (1.51). С учетом этих преобразований и (1.14), (1.15), соотношения (1.43), (1.44) запишем в почти окончательной форме

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - e(\mathbf{v}, \varphi) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}), \quad (1.52)$$

$$e(\mathbf{u}, \chi) + \epsilon(\chi, \varphi) = \tilde{L}_\varphi(\chi), \quad (1.53)$$

где

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^* : \mathbf{c}^E : \nabla \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (1.54)$$

$$e(\mathbf{v}, \varphi) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}(\varphi) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{E}^*(\varphi) \cdot \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad (1.55)$$



$$\epsilon(\chi, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{E}^*(\chi) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}(\varphi) \, d\Omega, \quad (1.56)$$

$$\tilde{L}_u(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \rho \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} \, d\Gamma, \quad (1.57)$$

$$\tilde{L}_{\varphi}(\chi) = \int_{\Omega} \chi \sigma_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\Gamma_D} \chi \sigma_{\Gamma} \, d\Gamma + \sum_{j \in J_Q} X_j Q_j. \quad (1.58)$$

Как можно заметить, если  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  — классическое решение статической задачи электроупругости, то для любых достаточно гладких функций  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющих (1.47), и функций  $\chi$ , удовлетворяющих (1.49), (1.50), выполняются интегральные соотношения (1.52), (1.53). При этом, однако, функции  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  должны удовлетворять неоднородным условиям (1.31), (1.33), (1.34).

Получается, что проекционные функции  $\mathbf{v}$ ,  $\chi$  должны удовлетворять однородным условиям (1.47), (1.49), а решение  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  удовлетворяет аналогичным, но неоднородным, граничным условиям (1.31), (1.33). Снять неоднородность этих краевых условий можно следующим образом. Подберем такие функции  $\mathbf{u}_n$ ,  $\varphi_n$ , которые удовлетворяют неоднородным условиям (1.31), (1.33), а также некоторым условиям типа (1.34):

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{\Gamma}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.59)$$

$$\varphi_n = \Phi_{n\Gamma_j}; \quad \Phi_{n\Gamma_j} = \text{const}_j = V_j; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_V, \quad (1.60)$$

$$\varphi_n = \Phi_{n\Gamma_j}; \quad \Phi_{n\Gamma_j} = \text{const}_j; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_Q, \quad (1.61)$$

где  $\Phi_{n\Gamma_j}$  в (1.61) — вообще говоря, неопределенные величины, не зависящие от  $\mathbf{x}$ .

Решение  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_n, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_n, \quad (1.62)$$

где теперь функции  $\mathbf{u}_0$  и  $\varphi_0$  удовлетворяют условиям, аналогичным условиям для  $\mathbf{v}$  и  $\chi$ :

$$\mathbf{u}_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.63)$$

$$\varphi_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_V, \quad (1.64)$$

$$\varphi_0 = \Phi_{0\Gamma_j}; \quad \Phi_{0\Gamma_j} = \Phi_{\Gamma_j} - \Phi_{n\Gamma_j} = \text{const}_j; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi_j}, \quad j \in J_Q. \quad (1.65)$$

Используя (1.62), представим (1.52), (1.53) как соотношения для нахождения  $\mathbf{u}_0$  и  $\varphi_0$ :

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - e(\mathbf{v}, \varphi_0) = L_u(\mathbf{v}), \quad (1.66)$$

$$e(\mathbf{u}_0, \chi) + \epsilon(\chi, \varphi_0) = L_\varphi(\chi), \quad (1.67)$$

где

$$L_u(\mathbf{v}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) - c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_n) + e(\mathbf{v}, \varphi_n), \quad (1.68)$$

$$L_\varphi(\chi) = \tilde{L}_\varphi(\chi) - e(\mathbf{u}_n, \chi) - \epsilon(\chi, \varphi_n). \quad (1.69)$$

Для того чтобы дать строгие определения понятия обобщенного решения, осталось ввести необходимые функциональные пространства.

На множестве вектор-функций  $\mathbf{v} \in C^1$ , удовлетворяющих (1.47), введем скалярное произведение

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{\mathbf{H}_u^1} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^* \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\Omega. \quad (1.70)$$

Замыкание данного множества в норме, порожденной скалярным произведением (1.70), назовем пространством  $\mathbf{H}_u^1$ .

Аналогично, на множестве функций  $\chi \in C^1$ , удовлетворяющих (1.49), (1.50), введем скалярное произведение

$$(\chi, \varphi)_{\mathbf{H}_\varphi^1} = \int_{\Omega} (\nabla \chi)^* \cdot \nabla \varphi \, d\Omega. \quad (1.71)$$

Замыкание данного множества в норме, порожденной скалярным произведением (1.71), назовем пространством  $\mathbf{H}_\varphi^1$ .

Теперь наконец можно строго сформулировать понятие обобщенного решения статической задачи электроупругости.

**Определение.** *Обобщенным или слабым решением краевой статической задачи электроупругости называется пара функций  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_n$ ;  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_n$ ;  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_u^1$ ;  $\varphi_0 \in \mathbf{H}_\varphi^1$ , удовлетворяющих системе уравнений (1.66), (1.67) для  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_u^1$ ;  $\forall \chi \in \mathbf{H}_\varphi^1$ . При этом  $\mathbf{u}_n, \varphi_n$  считаются специально подобранными (известными) функциями, для которых выполняются условия (1.59)–(1.61).*

Отметим разграничение граничных условий.

Граничные условия (1.63)–(1.65) (или (1.47), (1.49), (1.50)) вошли в характеризацию пространств  $\mathbf{H}_u^1, \mathbf{H}_\varphi^1$ , в которых ищется обобщенное решение  $\mathbf{u}_0, \chi_0$ . Поэтому *граничные условия, которым должны удовлетворять функции слабой постановки задачи, называются главными граничными условиями.* В аналогичном неоднородном случае, как, например, для (1.31), (1.33), (1.34), будем также говорить о главных граничных условиях (которые можно снять при подборе специальных функций  $\mathbf{u}_0$  и  $\varphi_0$ ).

Краевые условия (1.32), (1.35), (1.36) участвуют лишь в формировании функционалов  $\tilde{L}_u(\mathbf{u}), \tilde{L}_\varphi(\chi)$  в (1.57), (1.58), т.е. естественным образом

входят в постановку задачи. По этой причине такие граничные условия будем называть *естественными граничными условиями*.

Отметим, что условия (1.34), (1.35), которые должны рассматриваться в совокупности, здесь отнесены к различным типам граничных условий. Таким образом, принятая классификация для таких сложных форм граничных условий является достаточно условной.

Очевидно, что, если пара функций  $\{\mathbf{u}, \varphi\}$  является классическим решением статической задачи электроупругости, то выполняются интегральные соотношения (1.66), (1.67) для любых достаточно гладких функций  $\mathbf{v}$ ,  $\chi$ , удовлетворяющих (1.47), (1.49), (1.50).

Таким образом, если существует классическое решение, то оно является и обобщенным решением.

Обратное утверждение, вообще говоря, может не выполняться, т. е. обобщенное решение может существовать, но классического решения может не быть. Для обобщенного решения в результате интегрирования по частям с применением формулы Гаусса—Остроградского, по сравнению с классическим решением, понижены требования на гладкость. Действительно, для существования интегралов в (1.54)–(1.56) достаточно, чтобы функции  $\mathbf{u}$  и  $\varphi$  имели только первые производные в обобщенном смысле, интегрируемые с квадратом, тогда как классическое решение должно быть по крайней мере дважды дифференцируемо.

Важным примером, когда классического решения во всей области  $\Omega$  нет, но существует обобщенное решение, является случай кусочно-однородной среды. Пусть тело  $\Omega$  состоит из двух областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ( $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ) с различными однородными свойствами. Тогда какие-то из модулей в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  отличаются, например,  $c_{ijkl}^{E(1)} \neq c_{ijkl}^{E(2)}$ , где верхний индекс (1) или (2) указывает на принадлежность к подобласти  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$ .

На границе раздела сред  $\Gamma_{12}$  при жестком контакте должны удовлетворяться условия непрерывности:

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\varphi] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{12}. \quad (1.72)$$

Здесь через  $[\mathbf{a}]$  обозначен скачок величины вектора или тензора  $\mathbf{a}$  через поверхность раздела  $\Gamma_{12}$ :  $[\mathbf{a}] = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ , где  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_1$  — предельные значения  $\mathbf{a}$  на  $\Gamma_{12}$  при подходе к  $\Gamma_{12}$ , соответственно, с положительной и отрицательной сторон нормали  $\mathbf{n}$ , внешней по отношению к  $\Omega_1$ .

Тогда, если  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  не изменяется при переходе через границу раздела  $\Gamma_{12}$ , то в силу (1.14) и неравенства  $c_{ijkl}^{E(1)} \neq c_{ijkl}^{E(2)}$  какие-то из компонент тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  должны быть разрывны. Следовательно, соответствующие первые производные претерпевают скачок, и решение  $\mathbf{u}$  не принадлежит

даже классу  $C^1$ . Таким образом, классического решения для всей кусочно-однородной среды не существует. Между тем, обобщенное решение здесь существует, так как  $\mathbf{u}$  обладает первыми производными в обобщенном смысле.

Естественно, что задачи для кусочно-однородных сред имеют многочисленные практические применения, и их решение при правильной формулировке задачи должно существовать. В случае постановки в форме краевой задачи причина отсутствия обычного решения состоит в том, что классическое решение нужно искать по отдельности в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  с условиями сопряжения между ними. Тогда классическое решение  $\mathbf{u}^{(j)}$  будет существовать в каждой из областей  $\Omega_j$ . Обобщенное же решение существует сразу во всей области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , и в этом смысле оно ближе к практике.

Другое преимущество обобщенной постановки состоит в ее энергетической форме.

Под функциями  $\mathbf{v}$  и  $\chi$  можно понимать вариации действительных полей перемещений  $\mathbf{u}$  и электрического потенциала  $\varphi$ , соответственно. Тогда в обозначениях, принятых в вариационном исчислении, положим в (1.52), (1.53) или в (1.66), (1.67)  $\mathbf{v} = \delta\mathbf{u}$ ,  $\chi = \delta\varphi$ .

Заметим, что  $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}_0$ ,  $\delta\varphi = \delta\varphi_0$ , поскольку  $\delta\mathbf{u}_n = 0$ ,  $\delta\chi_n = 0$ . В терминах механики это означает, что вариации должны быть совместимы с кинематическими связями.

Тогда слабую постановку, основанную на (1.66), (1.67) или на (1.52), (1.53), можно трактовать как вариационный принцип Лагранжа или как вариационный принцип виртуальных работ, основанный на принципе возможных перемещений и электрических потенциалов. Например, из (1.52), (1.53) имеем:

$$c(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}) - e(\delta\mathbf{u}, \varphi) = \tilde{L}_u(\delta\mathbf{u}), \quad (1.73)$$

$$e(\mathbf{u}, \delta\varphi) + \epsilon(\delta\varphi, \varphi) = \tilde{L}_\varphi(\delta\varphi). \quad (1.74)$$

Правая часть соотношения (1.73)

$$\tilde{L}_u(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\delta\mathbf{u})^* \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\delta\mathbf{u})^* \cdot \mathbf{p}_\Gamma d\Gamma \quad (1.75)$$

является работой массовых (объемных) и поверхностных сил на виртуальных перемещениях, т.е. виртуальной работой внешних сил.

Правая часть соотношения (1.74)

$$\tilde{L}_\varphi(\delta\varphi) = \int_{\Omega} \delta\varphi \sigma_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma_D} \delta\varphi \sigma_\Gamma d\Gamma + \sum_{j \in J_Q} \delta\Phi_{\Gamma_j} Q_j \quad (1.76)$$

является электрической работой зарядов на виртуальных электрических потенциалах.

Левая часть соотношения (1.73)

$$c(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) - e(\delta \mathbf{u}, \varphi) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \varphi) d\Omega \quad (1.77)$$

является приращением работы деформаций, вызванных виртуальным перемещением  $\delta \mathbf{u}$ , а левая часть соотношения (1.74)

$$e(\mathbf{u}, \delta \varphi) + \epsilon(\delta \varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\delta \varphi) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}, \varphi) d\Omega \quad (1.78)$$

есть приращение работы электрического поля, вызванного виртуальным электрическим потенциалом  $\delta \varphi$ .

Таким образом, по (1.75)–(1.78) соотношения (1.73), (1.74) определяют равенства виртуальных механических и электрических работ внешних сил приращениям работ виртуальных деформаций и электрического поля.

Если из соотношения (1.73) вычесть (1.74), то можно получить вариационный принцип стационарности виртуальной электрической энтальпии

$$\delta H(\mathbf{u}, \varphi) = \delta[\tilde{L}_u(\mathbf{u}) - \tilde{L}_\varphi(\varphi)], \quad (1.79)$$

где

$$H(\mathbf{u}, \varphi) = \frac{1}{2}c(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - e(\mathbf{u}, \varphi) - \frac{1}{2}\epsilon(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) d\Omega \quad (1.80)$$

есть электрическая энтальпия.

Отметим, что электрическая энтальпия не совпадает с внутренней энергией

$$U(\mathbf{u}, \varphi) = \frac{1}{2}c(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\epsilon(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}) d\Omega \quad (1.81)$$

и электрическая энтальпия не является положительно определенной формой по  $\mathbf{u}$  и  $\varphi$ .

В связи с этим, из вариационного принципа (1.79) следует только стационарность функционала

$$\Pi_e(\mathbf{u}, \varphi) = H(\mathbf{u}, \varphi) - \tilde{L}_u(\mathbf{u}) + \tilde{L}_\varphi(\varphi) \quad (1.82)$$

на истинных полях перемещений и электрического потенциала.

Свойств минимальности здесь нет, однако основные формы  $c(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  и  $\epsilon(\varphi, \varphi)$  симметричны и положительно определены.

Важно также отметить, что нормы

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_2^1}^2 = \int_{\Omega} [\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^* : \nabla \mathbf{v}] d\Omega, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_u^1}^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^* : \nabla \mathbf{v} d\Omega,$$

$$\|\mathbf{v}\|_c^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega$$

эквивалентны в  $\mathbf{H}_u^1$ . Здесь для доказательства эквивалентности норм используется один из основных результатов математической теории упругости — неравенство Корна [24]. Для эквивалентности норм также существенно, чтобы в выбранном пространстве исключались движения тела как твердого целого, что и было принято для  $\mathbf{H}_u^1$ .

Аналогично, в  $\mathbf{H}_\varphi^1$  эквивалентны нормы

$$\|\chi\|_{\mathbf{W}_2^1}^2 = \int_{\Omega} [\chi^2 + (\nabla \chi)^* \cdot \nabla \chi] d\Omega, \quad \|\chi\|_{\mathbf{H}_\varphi^1}^2 = \int_{\Omega} (\nabla \chi)^* \cdot \nabla \chi d\Omega,$$

$$\|\chi\|_\epsilon^2 = \int_{\Omega} \mathbf{E}^*(\chi) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}(\chi) d\Omega.$$

Свойство положительной определенности форм  $c(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  и  $\epsilon(\varphi, \varphi)$  важны как в теоретическом плане, так и при обосновании применяемых численных методов.

Таким образом, слабые постановки являются как удобным инструментом для доказательств математических утверждений, так и базой для построения эффективных численных методов, основанных на аппроксимациях энергетических соотношений.

Обобщенные формулировки можно построить и для нестационарных задач с учетом демпфирования по Релею. Здесь аналогичные преобразования приведут к системе

$$\rho(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_0) + d(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_0) + c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - e(\mathbf{v}, \varphi_0) = L_u(\mathbf{v}), \quad (1.83)$$

$$e(\mathbf{u}_0, \chi) + \epsilon(\chi, \varphi_0) = L_\varphi(\chi), \quad (1.84)$$

где

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} d\Omega, \quad d(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \alpha_d \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \beta_d c(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (1.85)$$

$$L_u(\mathbf{v}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_n) - d(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_n) - c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_n) + e(\mathbf{v}, \varphi_n), \quad (1.86)$$

$$L_\varphi(\chi) = \tilde{L}_\varphi(\chi) - e(\mathbf{u}_n, \chi) - \epsilon(\chi, \varphi_n). \quad (1.87)$$

К этой системе надо еще присовокупить начальные условия (1.37), которые можно представить в слабой форме

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, +0)) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_{sn}), \quad (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, +0)) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_{sn}), \quad (1.88)$$

где  $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} d\Omega$  — обычное скалярное произведение в  $L^2$ ;  $\mathbf{u}_{sn} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, +0)$ ;  $\mathbf{v}_{sn} = \mathbf{v}_s - \dot{\mathbf{u}}_n(\mathbf{x}, +0)$ .

Здесь соотношения (1.83)–(1.87) должны выполняться при  $t \in (0, T)$  для любых  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_u^1$ ,  $\chi \in \mathbf{H}_{\varphi}^1$ . При этом для решения  $\{\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_n, \varphi = \varphi_0 + \varphi_n\}$  перемещения  $\mathbf{u}_0$  должны принадлежать пространству  $\mathbf{Q}_u$ , а электрический потенциал  $\varphi_0$  — пространству  $\mathbf{Q}_{\varphi}$ :

$$\mathbf{Q}_u = L^2(0, T; \mathbf{H}_u^1), \quad \mathbf{Q}_{\varphi} = L^2(0, T; \mathbf{H}_{\varphi}^1), \quad (1.89)$$

где для банахова пространства  $X$  с нормой  $\|\cdot\|_X$  через  $L^2(0, T; X)$  обозначено пространство (классов) функций  $t \rightarrow f(t)$  из  $[0, T]$  в  $X$  и таких, что

$$\left( \int_0^T \|f(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2(0, T; X)} < \infty.$$

Постановка задачи в форме (1.83), (1.84) также имеет энергетический смысл принципа виртуальных работ, аналогичный случаю статики, рассмотренному ранее. Как и в теории упругости, форма  $\rho(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}})$  является виртуальной силой инерции, взятой с обратным знаком.

Обобщенная или слабая постановка динамических задач электроупругости в форме (1.83)–(1.88) служит основой для построения полудискретных аппроксимаций метода Галеркина (Бубнова–Галеркина), которые рассматриваются в следующем разделе.

### 1.3.3. Полудискретные аппроксимации в задачах электроупругости

Главный вопрос, который остался открытым в п.1.3.2, состоит в том, как находить слабые решения задачи электроупругости. В основе общего подхода, называемого методом Бубнова–Галеркина, лежит идея о поиске решений для слабых постановок в конечномерных пространствах.

При рассмотрении нестационарных задач электроупругости со слабыми постановками (1.83), (1.84), соответствующими принципу виртуальных работ, ищутся полудискретные аппроксимации  $\mathbf{u}_{h0} \approx \mathbf{u}_0$ ,  $\varphi_{h0} \approx \varphi_0$  в форме

$$\mathbf{u}_{h0} = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \varphi_{h0} = \mathbf{N}_{\varphi}^*(\mathbf{x}) \cdot \Phi(t), \quad (1.90)$$

где  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\Phi(t)$  — векторы констант (зависящих от времени) аппроксимаций,  $\mathbf{N}_u^*(\mathbf{x})$  — матрица базисных функций для  $\mathbf{u}_{h0}$ ,  $\mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x})$  — вектор-строка базисных функций для  $\varphi_{h0}$ .

Данные приближения называются полудискретными по той причине, что дискретизации здесь осуществляются только по пространственным переменным, а по времени в (1.90) аппроксимаций нет.

Если базисные функции  $N_s(\mathbf{x})$  одинаковы для всех трех (в случае задачи в  $\mathbb{R}^3$ ) компонент перемещений  $u_{h0j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и электрического потенциала  $\varphi_{h0}$ , то матрица  $\mathbf{N}_u^*(\mathbf{x})$  и вектор-строка  $\mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x})$  имеют вид

$$\mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & N_n(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 & N_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & 0 & N_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (1.91)$$

$$\mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x}) = [N_1(\mathbf{x}), N_2(\mathbf{x}), \dots, N_n(\mathbf{x})], \quad (1.92)$$

где  $n$  — количество базисных функций для аппроксимаций одной из компонент перемещений или электрического потенциала.

Базисные функции должны быть линейно независимы и обладать свойством полноты в  $H_u^1$ ,  $H_\varphi^1$ . Естественно, что они считаются известными, а векторы  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\Phi(t)$  в (1.90) подлежат определению из решения задачи электроупругости в слабой форме.

Пробные функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  и  $\chi(\mathbf{x})$  будем брать из тех же конечномерных пространств

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{U}, \quad \chi = \mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x}) \cdot \delta\Phi, \quad (1.93)$$

где  $\delta\mathbf{U}$ ,  $\delta\Phi$  — произвольные векторы, например, содержащие единицу в одной позиции и нуль — во всех остальных.

Подстановка (1.90), (1.93) в слабую постановку (1.83), (1.84) с учетом (1.54)–(1.58), (1.85)–(1.87) дает следующую систему:

$$\delta\mathbf{U}^* \cdot (\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi) = \delta\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{F}_u, \quad (1.94)$$

$$\delta\Phi^* \cdot (-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi) = \delta\Phi^* \cdot \mathbf{F}_\varphi. \quad (1.95)$$

Здесь

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N}_u^* d\Omega, \quad \mathbf{C}_{uu} = \alpha_d \mathbf{M}_{uu} + \beta_d \mathbf{K}_{uu},$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \mathbf{c}^E : \mathbf{B}_u d\Omega, \quad \mathbf{B}_u = \nabla \mathbf{N}_u^*,$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{B}_\varphi d\Omega, \quad \mathbf{B}_\varphi = \nabla \mathbf{N}_\varphi^*, \quad (1.96)$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\varphi\varphi} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\varphi}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{B}_{\varphi} d\Omega, \\
\mathbf{F}_u &= \tilde{\mathbf{F}}_u - \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n d\Omega - \alpha_d \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u \cdot \dot{\mathbf{u}}_n d\Omega - \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \mathbf{c}^E : (\nabla \mathbf{u}_n + \beta_d \nabla \dot{\mathbf{u}}_n) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \mathbf{e}^* \cdot \nabla \varphi_n d\Omega, \\
\tilde{\mathbf{F}}_u &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} d\Gamma, \\
\mathbf{F}_{\varphi} &= \tilde{\mathbf{F}}_{\varphi} + \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\varphi}^* \cdot \mathbf{e} : \nabla \mathbf{u}_n d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\varphi}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \nabla \varphi_n d\Omega, \\
\tilde{\mathbf{F}}_{\varphi} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\varphi} \sigma_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}_{\varphi} \sigma_{\Gamma} d\Gamma + \sum_{j \in J_Q} \mathbf{N}_{\varphi} |_{\Gamma_{\varphi j}} Q_j.
\end{aligned}$$

Заметим, что каждая из матриц в (1.96) отражает определенные материальные характеристики тела:  $\mathbf{M}_{uu}$  — массу или плотность,  $\mathbf{C}_{uu}$  — демпфирование,  $\mathbf{K}_{uu}$  — жесткость,  $\mathbf{K}_{u\varphi}$  — пьезоэффект,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  — диэлектрическую проницаемость.

Далее, в силу произвольности векторов  $\delta \mathbf{U}$ ,  $\delta \Phi$ , из (1.94), (1.95) получаем окончательную систему

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u, \quad (1.97)$$

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_{\varphi}. \quad (1.98)$$

Для нестационарных задач система (1.97), (1.98) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени. К ней нужно добавить начальные условия, которые можно получить из (1.37) или из (1.88) и представлений (1.90), (1.93). В итоге начальные условия в дискретной форме будут иметь вид:

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_{sn}, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_{sn}, \quad (1.99)$$

где  $\mathbf{U}_{sn}$ ,  $\mathbf{V}_{sn}$  — известные векторы, полученные из начальных данных  $\mathbf{u}_{sn}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}_{sn}(\mathbf{x})$  при их аппроксимациях в конечномерных пространствах.

При численном решении задачи Коши (1.97)–(1.99) можно учесть особенности системы (1.97), (1.98), состоящие в возможности редуцирования вектора  $\Phi$ . Действительно, находя  $\Phi$  из (1.98) и подставляя в (1.97), имеем:

$$\Phi = \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\varphi}, \quad (1.100)$$

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{K}}_{uu} \cdot \mathbf{U} = \bar{\mathbf{F}}_u, \quad (1.101)$$

где

$$\bar{\mathbf{K}}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^*, \quad (1.102)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_u = \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{F}_\varphi. \quad (1.103)$$

В результате получаем задачу (1.101), (1.99) только относительно вектора  $\mathbf{U}$  с симметричной и по меньшей мере неотрицательно определенной матрицей  $\bar{\mathbf{K}}_{uu}$ . Эта задача имеет почти те же свойства, что и для чисто упругой среды. Отличие состоит в наличии обратной матрицы  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1}$ . Если при реализации численных алгоритмов при разреженных матрицах  $\mathbf{M}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  использовать технику разреженных матриц [21], то формировать матрицу  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1}$  в явном виде крайне нежелательно, так как матрица, обратная к разреженной, вообще говоря, заполнена. Поэтому при необходимости реализации умножения  $\mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi$  нужно каждый раз решать систему (1.98) линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $\Phi$  и подставлять результат в (1.97).

#### 1.3.4. Обзор основных особенностей задач электроупругости

Подведем итог рассмотрения задач электроупругости.

Классические постановки задач электроупругости включают системы дифференциальных уравнений с динамическими уравнениями движения (без учета связности — гиперболического типа) и уравнения квазиэлектростатики (без учета связности — эллиптического типа). Поэтому в совокупности порядки старших производных по времени в уравнениях линейной динамической теории электроупругости различаются.

Краевые и начально-краевые задачи электроупругости характеризуются нестандартными электрическими граничными условиями, особенно, для электродов, запитываемых генераторами токов. При этом на отдельных электродированных поверхностях, запитываемых генераторами напряжений, электрический потенциал должен принимать одинаковые значения для всех точек электрода, и эти значения известны. На электродах, запитываемых генераторами токов, электрический потенциал также должен быть одинаков на каждом участке, но эти значения не известны, и для их нахождения задаются дополнительные интегральные условия, определяющие суммарные заряды на электродах.

Обобщенные или слабые постановки задач электроупругости, полученные в результате стандартных преобразований, приводят к вариационному принципу стационарности электрической энтальпии (без свойства минимальности). Таким образом, для задач электроупругости не имеется обычного вариационного принципа виртуальных работ с варьированием

полей перемещений и электрического потенциала, приводящего к минимуму функционала энергии.

Не совсем обычны и функциональные пространства  $\mathbf{H}_\varphi^1$ , в которых определяются слабые решения задач электроупругости. Для пространства  $\mathbf{H}_\varphi^1$  функции должны принимать стационарные (не зависящие от  $\mathbf{x}$ ), но произвольные значения на некоторых участках  $\Gamma_{\varphi j}$ , запитываемых генераторами тока. Стандартно, как, например, для  $\mathbf{H}_u^1$  ставятся лишь ограничения однородности для главных граничных условий ( $\mathbf{u} = 0$ ;  $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ ). Здесь же главные граничные условия могут быть и неоднородными.

При численном решении по методу Бубнова—Галеркина статических задач электроупругости получается связанная система уравнений относительно перемещений и потенциалов с общей матрицей, не являющейся положительно определенной. Матрице этой системы можно придать структуру квазиопределенной матрицы (матрицы для задач с седловой точкой) симметричного вида [4, 26]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^* & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}.$$

При редукции значений электрических потенциалов можно получить системы уравнений с положительно определенными матрицами для определения перемещений, похожие на уравнения структурного анализа (для чисто упругой среды). При этом наличие пьезоэффекта лишь увеличивает свойства положительной определенности матрицы жесткости, т.е.  $\bar{\mathbf{K}}_{uu} \geq \mathbf{K}_{uu}$ , поскольку  $\bar{\mathbf{K}}_{uu} - \mathbf{K}_{uu} = \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^*$  — неотрицательно определенная матрица.

Отметим, что здесь и далее неравенства  $\mathbf{A} > \mathbf{B}$  и  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  для матриц означают, что матрица  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  положительно или неотрицательно определена, соответственно. При этом условие положительной определенности матрицы  $\mathbf{A}$  будем записывать в виде  $\mathbf{A} > 0$ , а условие неотрицательной определенности — в виде  $\mathbf{A} \geq 0$ .

Для пьезоэлектрических тел существенную роль играют специальные наборы собственных частот [13]: частоты электрических резонансов  $f_{rj}$  и частоты электрических антирезонансов  $f_{aj}$ .

Как частоты электрических резонансов  $f_{rj}$ , так и частоты электрических антирезонансов  $f_{aj}$  являются собственными частотами, колебания на которых можно эффективно возбудить при электрических внешних воздействиях, изменяющихся по гармоническому закону. Эти внешние воздействия отличаются для частот  $f_{rj}$  и  $f_{aj}$ .

Для поиска собственных частот пьезоэлектрического (электроупругого) тела нужно рассматривать режимы установившихся колебаний  $\mathbf{U} =$

$\tilde{\mathbf{U}} \exp(i\omega t)$ ,  $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \tilde{\mathbf{\Phi}} \exp(i\omega t)$  с круговой частотой  $\omega$  ( $\omega = f/2\pi$ ). Кроме того, для поиска собственных частот рассматриваются однородные задачи с  $\mathbf{F}_u = 0$ ,  $\mathbf{F}_\varphi = 0$  при отсутствии демпфирования, т.е. при  $\mathbf{C}_{uu} = 0$ . Тогда из (1.97), (1.98) получается обобщенная задача на собственные значения:

$$\mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \tilde{\mathbf{\Phi}} = \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{U}, \quad (1.104)$$

$$-\mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \tilde{\mathbf{\Phi}} = 0, \quad (1.105)$$

где знак « $\tilde{\phantom{x}}$ » у амплитудных значений  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{\Phi}}$  опущен.

При этом в (1.104), (1.105) матрицы  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  для частот электрических резонансов и антирезонансов отличаются. Различие в задачах о поиске собственных частот электрических резонансов и антирезонансов состоит в следующем. Для задачи о поиске частот электрических резонансов некоторые электроды  $\Gamma_{\varphi j}$  считаются короткозамкнутыми ( $\varphi = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}$ ), а для соответствующих задач о поиске частот электрических антирезонансов эти электроды считаются свободными ( $\varphi = \Phi_{\Gamma j}$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi j}$ ;  $\int_{\Gamma_{\varphi j}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} d\Gamma = 0$ ). Таким образом, в двух соответствующих задачах на собственные значения следует рассматривать различные электрические граничные условия на некоторых (не на всех!) электродированных поверхностях  $\Gamma_{\varphi j}$ .

Математически это отличие состоит в различной структуре матриц  $\mathbf{K}_{u\varphi}$  и  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ . Если для задачи о поиске частот электрических антирезонансов матрицы  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  и вектор  $\tilde{\mathbf{\Phi}}$  представить в блочных формах

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u\varphi}^c & \mathbf{K}_{u\varphi}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^c & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{cs} \\ \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{cs*} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^s \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{\Phi}} = \begin{Bmatrix} \Phi_c \\ \Phi_s \end{Bmatrix}, \quad (1.106)$$

то для задачи о поиске частот электрических резонансов матрицы  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  и вектор  $\tilde{\mathbf{\Phi}}$  будут иметь вид:

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \mathbf{K}_{u\varphi}^c, \quad \mathbf{K}_{\varphi\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^c, \quad \tilde{\mathbf{\Phi}} = \Phi_c. \quad (1.107)$$

Здесь в векторе  $\tilde{\mathbf{\Phi}}$  в (1.106) выделены отдельно степени свободы  $\Phi_s$ , для которых при нахождении частот электрических антирезонансов считается, что суммарные электрические заряды на соответствующих электродах равны нулю, а при нахождении частот электрических резонансов  $\Phi_s = 0$ .

Поэтому для нахождения частот электрических резонансов и антирезонансов требуется решать два раза задачи (1.104), (1.105) с различными матрицами  $\mathbf{K}_{u\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  и вектором  $\tilde{\mathbf{\Phi}}$  в формах (1.106) и (1.107).

Обозначим собственные частоты для задачи (1.104)–(1.106) через  $\omega_{aj}$ , а собственные частоты для задачи (1.104), (1.105), (1.107) — через  $\omega_{rj}$ .

Отметим, что в силу положительной определенности матрицы  $\mathbf{M}_{uu}$  (задача 1.20) и по меньшей мере неотрицательной определенности матрицы  $\overline{\mathbf{K}}_{uu}$  (задача 1.24) все эти частоты вещественны и могут быть выбраны неотрицательными.

Если занумеровать частоты в порядке возрастания, то можно показать [2], что имеют место неравенства

$$\omega_{rj} \leq \omega_{aj}; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.108)$$

где  $m$  — порядок матрицы  $\mathbf{M}_{uu}$  или  $\overline{\mathbf{K}}_{uu}$ .

Для практики важную роль играет динамический коэффициент электромеханической связи (КЭМС)  $k_{dj}$  для  $j$ -ой частоты, определяемый формулой

$$k_{dj}^2 = \frac{\omega_{aj}^2 - \omega_{rj}^2}{\omega_{aj}^2}. \quad (1.109)$$

Динамический КЭМС определяет эффективность преобразования энергии на  $j$ -ой моде колебаний. Естественно, если  $k_{dj}$  отличен от нуля, то  $\omega_{rj} \neq \omega_{aj}$ , и именно такие частоты электрически активные. (Некоторые моды колебаний могут быть чисто упругими, и для них  $\omega_{rj} = \omega_{aj}$ .)

Таким образом, для анализа работы пьезоэлектрических устройств в режиме установившихся колебаний часто требуется находить частоты  $\omega_{rj}$ ,  $\omega_{aj}$ , решая два раза немного отличающиеся обобщенные задачи на собственные значения, и при этом находить именно те частоты, для которых  $\omega_{rj}$  и  $\omega_{aj}$  отличаются. Данный тип задач также является отличительной особенностью пьезоэлектрического анализа реальных пьезоэлектрических устройств.

Пьезопреобразователи могут представлять собой тела, составленные из набора упругих и пьезоэлектрических подобластей (например, пьезоизлучатель в корпусе). Кроме того, для некоторых устройств, например, для встречноштыревых преобразователей на поверхностных акустических волнах, нужно учитывать контакт пьезоэлектрического тела со внешней средой (например, воздухом). В таких случаях имеем составные задачи для многослойной среды  $\Omega = \cup \Omega_k$  с, вообще говоря, различными физико-механическими свойствами. Одни области  $\Omega_k = \Omega_k^p$  могут быть пьезоэлектрическими, другие области  $\Omega_k = \Omega_k^e$  — упругими, а остальные области  $\Omega_k = \Omega_k^d$  — диэлектрическими. Для упругих и диэлектрических сред можно воспользоваться теми же моделями электроупругости при коэффициентах связности  $\mathbf{e}$ , равными нулю, и применять либо механическую, либо диэлектрическую части модели. Условия сопряжения (непрерывность  $\mathbf{u}$ ,

$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\varphi$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$  при переходе через границу раздела) будут тогда естественным образом входить в обобщенные постановки задач. При этом численные алгоритмы, предназначенные для решения задач для составных тел с различными физико-механическими свойствами будут иметь особенности, связанные с наличием сред с разными полевыми функциями ( $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  — для пьезоэлектрических сред,  $\mathbf{u}$  — для упругих,  $\varphi$  — для диэлектрических). Нужно также отметить, что внешние диэлектрические среды (окружающая воздушная среда) могут быть сильно протяженными и моделироваться неограниченными областями. Тогда для неограниченных диэлектрических сред нужны условия поведения поля  $\varphi$  на бесконечности, и нужно иметь в арсенале численные методы решения задач для бесконечных областей.

Таким образом, задачи электроупругости имеют ряд существенных особенностей, вызванных как особенностями математических моделей, так и потребностями практики расчета реальных пьезоэлектрических устройств.

## 1.4. Моделирование задач термоупругости

В задачах термоупругости рассматривается связанность механических и температурных полей. Что касается механической части, то здесь имеется много общего с обычной теорией упругости и с уже рассмотренной ранее теорией электроупругости. Однако уравнения для температурных полей существенно отличаются от уравнений квазиэлектростатики диэлектриков. По теории термоупругости имеется обширная литература, из которой отметим базовые монографии В. Новацкого [14, 15].

### 1.4.1. Классические постановки задач термоупругости

Пусть термоупругое тело занимает область  $\Omega$  с границей  $\Gamma = \partial\Omega$ . Состояние тела характеризуется вектором перемещений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и изменением температурного поля  $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ . Функция  $\theta(\mathbf{x}, t)$  описывает прирост температуры  $T(\mathbf{x}, t)$  от естественного состояния  $T_0$ :  $\theta = T - T_0$ .

Постановка задач линейной термоупругости включает следующую группу уравнений.

Полевые уравнения состоят из уравнений движения сплошной среды, идентичных (1.23)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.110)$$

и локального закона сохранения тепловой энергии

$$T_0 \dot{S} + \nabla \cdot \mathbf{q} = W. \quad (1.111)$$

Здесь для механических величин приняты те же обозначения, что и в теории электроупругости в разделе 1.3 ( $\rho$  — плотность;  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений второго ранга;  $\mathbf{f}$  — вектор плотности массовых сил), а также введены следующие обозначения для тепловых величин:  $S$  — плотность энтропии, отчитываемой от естественного состояния;  $\mathbf{q}$  — вектор потока тепла;  $W = W(\mathbf{x}, t)$  — интенсивность источников тепла.

Определяющие соотношения связывают напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$  и энтропию  $S$  с тензором деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и полем температур  $\theta$ . Для линейной среды определяющие соотношения имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \gamma \theta, \quad (1.112)$$

$$S = \gamma : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\rho c_\varepsilon}{T_0} \theta, \quad (1.113)$$

где  $\mathbf{c}$  — полусимметричный тензор упругих модулей четвертого ранга;  $\gamma$  — симметричный тензор коэффициентов температурных напряжений второго ранга;  $c_\varepsilon$  — удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Наконец, соотношения, связывающие потоковые величины  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\mathbf{q}$  с полевыми функциями  $\mathbf{u}$  и  $\theta$  имеют следующую форму:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)/2, \quad (1.114)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta, \quad (1.115)$$

где  $\mathbf{k}$  — тензор второго ранга коэффициентов теплопроводностей.

Формула (1.115) выражает закон Фурье для теплопроводной среды. Тензор  $\mathbf{k}$  в (1.115) должен быть симметричным и положительно определенным:

$$k_{ij} = k_{ji}; \quad \exists \alpha_k > 0 : \quad \forall \mathbf{a} \quad \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \geq \alpha_k \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений термоупругости дается формулами (1.110)–(1.115). Если представить эти уравнения как систему уравнений относительно перемещений  $\mathbf{u}$  и прироста температур  $\theta$ , то будем иметь:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} - \gamma \theta) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.116)$$

$$\rho c_\varepsilon \dot{\theta} + T_0 \gamma : \nabla \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \theta) = W, \quad (1.117)$$

или в покомпонентной записи

$$\rho u_{i,tt} - (c_{ijkl} u_{k,l} - \gamma_{ij} \theta)_{,j} = \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.118)$$

$$\rho c_\varepsilon \theta_{,t} + T_0 \gamma_{ij} u_{i,jt} - (k_{ij} \theta_{,j})_{,i} = W. \quad (1.119)$$

Как видно, связность механических и температурных полей определяется тензором температурных напряжений  $\gamma$ . Если  $\gamma = 0$ , то (1.116) есть просто уравнение движения в динамической теории упругости, а (1.117) — уравнение теплопроводности. Отметим, что уравнение движения теории упругости является уравнением гиперболического типа, а уравнение теплопроводности — параболического типа. Различный порядок старших производных по времени сохраняется и в системе связанных уравнений: в (1.116) — второй, а в (1.117) — первый.

К системе (1.116), (1.117) или (1.118), (1.119) нужно присовокупить граничные условия, которые здесь подразделяются на механические и тепловые краевые условия.

Механические граничные условия примем теми же, что и в разделе 1.3 для электроупругого тела ( $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ ):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.120)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad (1.121)$$

где механический смысл используемых величин тот же, что и для (1.31), (1.32).

Для формулировки температурных граничных условий предположим, что граница  $\Gamma$  разбита на три части  $\Gamma_\theta$ ,  $\Gamma_q$  и  $\Gamma_c$ :  $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$ .

Будем считать, что на  $\Gamma_\theta$  задана температура  $\theta_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ :

$$\theta = \theta_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\theta. \quad (1.122)$$

На  $\Gamma_q$  зададим тепловой поток или, более точно, поверхностную плотность мощности источников теплоты  $q_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -q_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q. \quad (1.123)$$

Наконец, на участке  $\Gamma_c$  зададим условие конвективного теплообмена с внешней средой:

$$\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = -h_f(\theta_b - \theta); \quad \mathbf{x} \in \Gamma_c, \quad (1.124)$$

где  $h_f$  — коэффициент теплообмена или коэффициент теплоотдачи на границе ( $h_f > 0$ ),  $\theta_b$  — температура окружающей внешней среды.

По (1.122)–(1.124) имеем три типа тепловых краевых условий. Условие (1.122) есть условие первого рода, условие типа Дирихле или главное граничное условие; условие (1.123) — условие второго рода, условие типа Неймана или естественное граничное условие; а условие (1.124) — условие третьего рода.



Граничные условия (1.122)–(1.124) являются основными как в задачах теплопроводности, так и более общих задачах термоупругости. Помимо этих условий возможны и другие граничные условия, например, нелинейное условие лучистого теплообмена по закону Стефана-Больцмана и др. Наиболее часто, однако, встречаются именно условия (1.122)–(1.124), которыми здесь и ограничимся.

Отметим, что условия третьего рода характерны именно для задач теплопроводности и термоупругости. Эти условия носят признаки как условий первого рода (при больших  $h_f$  из (1.122) имеем  $\theta - \theta_b = h_f^{-1} \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} \approx 0$ ), так и условий второго рода (при малых  $h_f$  (1.122) может быть аппроксимировано условием  $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q} = 0$ ).

Если для упругого тела большая часть границы обычно есть  $\Gamma_\sigma$  с однородным условием второго рода, т.е. большая часть границы  $\Gamma_\sigma$  свободна от механических напряжений  $\mathbf{p}_\Gamma$ , то для тепловых граничных условий однородные условия второго рода ( $q_\Gamma = 0$  в (1.123)) означают теплоизолированную границу. Случай теплоизолированной границы является большей абстракцией, чем условие конвективного теплообмена с окружающей средой, т.е. чем условие третьего рода.

В случае неустановившихся процессов помимо граничных условий необходимы еще и начальные условия. Здесь, кроме задания начального положения тела  $\mathbf{u}_s(\mathbf{x})$  и начальной скорости  $\mathbf{v}_s(\mathbf{x})$ , нужно определить еще и начальную температуру  $\theta_s(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_s, \quad \theta = \theta_s; \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t = +0. \quad (1.125)$$

Итак, обычная или классическая постановка нестационарных задач термоупругости в линейном приближении включает систему дифференциальных уравнений (1.116), (1.117), краевые условия (1.120)–(1.124) и начальные условия (1.125).

Для стационарного случая начальных условий нет;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\theta = \theta(\mathbf{x})$ ; внешние воздействия не зависят от времени, а система дифференциальных уравнений (1.116), (1.117) принимает вид:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} - \gamma \theta) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.126)$$

$$-\nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \theta) = W. \quad (1.127)$$

Как видно из (1.126), (1.127), в стационарном случае имеем частичную связанность полей: поле перемещений  $\mathbf{u}$  зависит от  $\theta$ , но для поля температур  $\theta$  имеем несвязанную задачу теплопроводности (1.127), (1.122)–(1.124).

Другой вариант термоупругой задачи с частичной связанностью дается теорией температурных напряжений [14, 15]. В этой теории в уравнении (1.117) для поля температур пренебрегают связанностью полей, опуская член  $T_0\boldsymbol{\gamma} : \nabla\dot{\mathbf{u}}$ , однако для механических полей рассматривается динамическое уравнение (1.116). В итоге полевые уравнения теории температурных напряжений имеют вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}\theta, \quad (1.128)$$

$$\rho c_\varepsilon \dot{\theta} + \nabla \cdot \mathbf{q} = W, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta. \quad (1.129)$$

Обоснованием перехода от системы (1.116), (1.117) к (1.128), (1.129) служат данные многих экспериментов и анализ коэффициентов связности при надлежащем обезразмеривании задачи термоупругости.

Итак, как уравнения температурных напряжений (1.128), (1.129), так и уравнения стационарной термоупругости (1.126), (1.127) дают задачи с частичной связанностью полей.

Важно отметить следующее обстоятельство. Для задач связанной термоупругости (1.116), (1.117), (1.120)–(1.125) наличие члена  $T_0\boldsymbol{\gamma} : \nabla\dot{\mathbf{u}}$  с первой производной по времени от перемещений приводит к диссипации энергии, и дополнительный учет демпфирования в этой задаче не особенно важен. Между тем, в частично связанной задаче о температурных напряжениях для механических полей демпфирования нет, и поэтому можно принять способ учета демпфирования по Релею, аналогично проделанному в разделе 1.3.1 для задачи электроупругости. Именно, вместо (1.128) можно использовать соотношения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : (\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \boldsymbol{\gamma}\theta \quad (1.130)$$

с коэффициентами демпфирования  $\alpha_d \geq 0$ ,  $\beta_d \geq 0$ . Относительно недостатков и преимуществ этого способа здесь можно повторить те же рассуждения, что и в разделе 1.3.1.

#### 1.4.2. Обобщенные постановки задач термоупругости

Следуя схеме, изложенной в разделе 1.3.2, получим обобщенную или слабую постановку связанной задачи термоупругости (1.116), (1.117), (1.120)–(1.125).

Умножим скалярно уравнение (1.110) на пока произвольную, но достаточно гладкую функцию  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ , а уравнение (1.111) на произвольную достаточно гладкую функцию  $\eta = \eta(\mathbf{x})$ . Затем проинтегрируем полученные равенства по  $\Omega$ , используем операции тензорного и векторного анализа

(1.41), (1.42), а также формулы Гаусса - Остроградского (1.45), (1.46). (В (1.42), (1.46)  $\chi$  заменяется на  $\eta$ , а  $\mathbf{D}$  — на  $\mathbf{q}$ .)

Наложив на функцию  $\mathbf{v}$  однородное главное граничное условие (1.47)

$$\mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.131)$$

и используя естественные граничные условия (1.121), получаем:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^* : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \theta) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} d\Gamma. \quad (1.132)$$

При преобразованиях уравнения (1.111) с учетом (1.113) имеем:

$$T_0 \int_{\Omega} \eta \dot{S} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{q}(\mathbf{u}, \theta) d\Omega = \int_{\Omega} \eta W d\Omega - \int_{\Gamma} \eta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q}(\mathbf{u}, \theta) d\Gamma. \quad (1.133)$$

Наложим на функцию  $\eta$  условия равенства нулю на  $\Gamma_{\theta}$

$$\eta = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta}. \quad (1.134)$$

Тогда, используя граничные условия (1.123) на  $\Gamma_q$  и (1.124) на  $\Gamma_c$ , последний интеграл в (1.133) можно преобразовать следующим образом:

$$- \int_{\Gamma} \eta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{q}(\mathbf{u}, \theta) d\Gamma = \int_{\Gamma_q} \eta q_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \eta h_f \theta_b d\Gamma - \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta d\Gamma. \quad (1.135)$$

Интегральное тождество (1.133) с учетом (1.135) запишем в виде:

$$T_0 \int_{\Omega} \eta \dot{S} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{q}(\mathbf{u}, \theta) d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta d\Gamma = \int_{\Omega} \eta W d\Omega + \int_{\Gamma_q} \eta q_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \eta h_f \theta_b d\Gamma. \quad (1.136)$$

Теперь в (1.132), (1.136) используем определяющие соотношения (1.112), (1.113) термоупругой среды и получаем основные интегральные соотношения

$$\rho(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{v}, \theta) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}), \quad (1.137)$$

$$T_0 \gamma(\dot{\mathbf{u}}, \eta) + s(\eta, \dot{\theta}) + k(\eta, \theta) = \tilde{L}_{\theta}(\eta), \quad (1.138)$$

где

$$\rho(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} d\Omega, \quad (1.139)$$

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^* : \mathbf{c}^E : \nabla \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{c}^E : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega, \quad (1.140)$$

$$\gamma(\mathbf{v}, \theta) = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v})^* : \gamma \theta \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \gamma \theta \, d\Omega, \quad (1.141)$$

$$s(\eta, \theta) = \int_{\Omega} \rho c_{\varepsilon} \eta \theta \, d\Omega, \quad (1.142)$$

$$k(\eta, \theta) = \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_f \eta \theta \, d\Gamma, \quad (1.143)$$

$$\tilde{L}_u(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \rho \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{p}_{\Gamma} \, d\Gamma, \quad (1.144)$$

$$\tilde{L}_{\theta}(\eta) = \int_{\Omega} \eta W \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \eta q_{\Gamma} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \eta h_f \theta_b \, d\Gamma. \quad (1.145)$$

Остается снять неоднородность в главных граничных условиях (1.120), (1.122). Для этого решение  $\{\mathbf{u}, \theta\}$  будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_n, \quad \theta = \theta_0 + \theta_n, \quad (1.146)$$

где  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta_n = \theta_n(\mathbf{x}, t)$  — специально подобранные функции, удовлетворяющие неоднородным главным граничным условиям

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{\Gamma}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.147)$$

$$\theta_n = \theta_{\Gamma}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta}, \quad (1.148)$$

а, следовательно, функции  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta_0 = \theta_0(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют однородным главным граничным условиям

$$\mathbf{u}_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (1.149)$$

$$\theta_0 = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\theta}. \quad (1.150)$$

Подставляя (1.146) в (1.137), (1.138), получаем окончательную систему, записанную относительно неизвестных функций  $\mathbf{u}_0$  и  $\theta_0$ :

$$\rho(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_0) + c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - \gamma(\mathbf{v}, \theta_0) = L_u(\mathbf{v}), \quad (1.151)$$

$$T_0 \gamma(\dot{\mathbf{u}}_0, \chi) + s(\eta, \dot{\theta}_0) + k(\eta, \theta_0) = L_{\theta}(\eta), \quad (1.152)$$

где

$$L_u(\mathbf{v}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}_n) - c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_n) + \gamma(\mathbf{v}, \theta_n), \quad (1.153)$$

$$L_{\theta}(\eta) = \tilde{L}_{\theta}(\eta) - T_0 \gamma(\dot{\mathbf{u}}_n, \chi) - s(\eta, \dot{\theta}_n) - k(\eta, \theta_n). \quad (1.154)$$

К системе (1.137), (1.138) или к (1.151), (1.152) добавим еще начальные условия (1.125) в слабой форме

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, +0)) &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}_s), & (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, +0)) &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}_s), \\ (\eta, \theta(\mathbf{x}, +0)) &= (\eta, \theta_s), \end{aligned} \quad (1.155)$$

или

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, +0)) &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}_{sn}), & (\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, +0)) &= (\mathbf{v}, \mathbf{v}_{sn}), \\ (\eta, \theta_0(\mathbf{x}, +0)) &= (\eta, \theta_{sn}), \end{aligned} \quad (1.156)$$

где  $\mathbf{u}_{sn}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_s(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, +0)$ , и т. д.

Сравнение (1.151), (1.152) с аналогичной системой (1.83), (1.84) задачи электроупругости показывает, что для  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}_0$  можно выбрать те же функциональные пространства, что и в разделе 1.3:  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_u^1$ ,  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_u = \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}_u^1)$ .

Для  $\eta$  и  $\theta_0$  введем пространства, аналогичные  $\mathbf{H}_u^1$ ,  $\mathbf{Q}_u$ , но в скалярном варианте.

Именно, на множестве функций  $\eta \in \mathbf{C}^1$ , удовлетворяющих (1.134), введем скалярное произведение

$$(\eta, \theta)_{\mathbf{H}_\theta^1} = \int_{\Omega} (\nabla \eta)^* \cdot \nabla \theta \, d\Omega. \quad (1.157)$$

Замыкание данного множества в норме, порожденной скалярным произведением (1.157), назовем пространством  $\mathbf{H}_\theta^1$ , и определим пространство  $\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}_\theta^1)$ .

Теперь можно дать строгое определение обобщенного решения нестационарной задачи термоупругости.

**Определение.** *Обобщенным или слабым решением нестационарной задачи термоупругости называется пара функций  $\{\mathbf{u}, \theta\}$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_n$ ;  $\theta = \theta_0 + \theta_n$ , таких, что  $\mathbf{u}_n, \theta_n$  удовлетворяют граничным условиям (1.147), (1.148),  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{Q}_u, \theta_0 \in \mathbf{Q}_\theta$ ;  $\mathbf{u}_0, \theta_0$  удовлетворяют начальным условиям (1.156), и выполняется система дифференциальных уравнений (1.151), (1.152)  $\forall t \in (0, T), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_u^1; \eta \in \mathbf{H}_\theta^1$ .*

В стационарном случае система (1.151), (1.152) принимает вид

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - \gamma(\mathbf{v}, \theta_0) = L_u(\mathbf{v}), \quad (1.158)$$

$$k(\eta, \theta_0) = L_\theta(\eta), \quad (1.159)$$

и можно дать соответствующее определение обобщенного решения стационарной задачи.

**Определение.** *Обобщенным или слабым решением стационарной задачи термоупругости называется пара функций  $\{\mathbf{u}, \theta\}$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_n$ ;  $\theta = \theta_0 + \theta_n$ , таких, что  $\mathbf{u}_n, \theta_n$  удовлетворяют граничным условиям (1.147), (1.148),  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_u^1, \theta_0 \in \mathbf{H}_\theta^1$ ; и выполняется система уравнений (1.158), (1.159)  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_u^1; \eta \in \mathbf{H}_\theta^1$ .*

Относительно взаимосвязи обобщенного и классического решений и важности обобщенного решения здесь справедливы аналогичные рассуждения из раздела 1.3.

### 1.4.3. Полудискретные аппроксимации в задачах термоупругости

Аналогично разделу 1.3.3, зададимся полудискретными аппроксимациями  $\mathbf{u}_{h0} \approx \mathbf{u}_0$ ,  $\theta_{h0} \approx \theta_0$  в форме

$$\mathbf{u}_{h0} = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \theta_{h0} = \mathbf{N}_\theta^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(t), \quad (1.160)$$

где  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\mathbf{T}(t)$  — векторы констант (зависящих от времени) аппроксимаций,  $\mathbf{N}_u^*(\mathbf{x})$  — матрица базисных функций для  $\mathbf{u}_{h0}$ , определенная в (1.91),  $\mathbf{N}_\theta^*(\mathbf{x})$  — вектор-строка базисных функций для  $\theta_{h0}$ , аналогичной (1.92) структуры.

Проекционные функции  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  и  $\eta(\mathbf{x})$  из этих же конечномерных пространств представим в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{U}, \quad \eta = \mathbf{N}_\theta^*(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{T}. \quad (1.161)$$

Подстановка (1.160), (1.161) в (1.151), (1.152) с учетом (1.139)–(1.145), (1.153), (1.154) дает:

$$\delta \mathbf{U}^* \cdot (\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_{u\theta} \cdot \mathbf{T}) = \delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{F}_u, \quad (1.162)$$

$$\delta \mathbf{T}^* \cdot (T_0 \mathbf{K}_{u\theta}^* \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{\theta\theta} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{T}) = \delta \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{F}_\theta. \quad (1.163)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{M}_{uu}$  и  $\mathbf{K}_{uu}$  определены по (1.96) ранее в разделе 1.3.3,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{u\theta} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \gamma \mathbf{N}_\theta^* d\Omega, \quad \mathbf{C}_{\theta\theta} = \int_{\Omega} \rho c_\varepsilon \mathbf{N}_\theta \mathbf{N}_\theta^* d\Omega, \\ \mathbf{K}_{\theta\theta} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_\theta^* \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_\theta d\Omega + \int_{\Gamma_c} h_f \mathbf{N}_\theta \mathbf{N}_\theta^* d\Gamma, \quad \mathbf{B}_\theta = \nabla \mathbf{N}_\theta^*, \\ \mathbf{F}_u &= \tilde{\mathbf{F}}_u - \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_u \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \mathbf{c} : \nabla \mathbf{u}_n d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^* : \gamma \theta_n d\Omega, \\ \mathbf{F}_\theta &= \tilde{\mathbf{F}}_\theta - T_0 \int_{\Omega} (\nabla \dot{\mathbf{u}}_n)^* : \gamma \mathbf{N}_\theta d\Omega - \int_{\Omega} \rho c_\varepsilon \mathbf{N}_\theta \dot{\theta}_n d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{B}_\theta^* \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \theta_n d\Omega - \int_{\Gamma_c} h_f \mathbf{N}_\theta \theta_n d\Gamma, \\ \tilde{\mathbf{F}}_\theta &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_\theta W d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_\theta q_\Gamma d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}_\theta h_f \theta_b d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.164)$$

а вектор  $\tilde{\mathbf{F}}_u$  также был определен в (1.96) в разделе 1.3.3.

С учетом произвольности  $\delta\mathbf{U}$ ,  $\delta\mathbf{T}$ , из (1.162), (1.163) получаем систему дискретизованных по пространственным переменным уравнений нестационарной термоупругости:

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_{u\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_u, \quad (1.165)$$

$$T_0 \mathbf{K}_{u\theta}^* \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{\theta\theta} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_\theta, \quad (1.166)$$

к которой надо еще добавить начальные условия

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_{sn}, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_{sn}, \quad \theta(0) = \theta_{sn}, \quad (1.167)$$

следующие из начальных условий (1.156) и аппроксимаций (1.160), (1.161).

Отметим, что для системы (1.165), (1.166) матрицы  $\mathbf{M}_{uu}$  и  $\mathbf{C}_{\theta\theta}$  положительно определены ( $\mathbf{M}_{uu} > 0$ ,  $\mathbf{C}_{\theta\theta} > 0$ ), а матрицы  $\mathbf{K}_{uu}$  и  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$  по крайней мере неотрицательно определены (см. задачи 1.20, 1.21, 1.23, 1.30–1.32).

Для статических (стационарных) задач система (1.165), (1.166) становится лишь векторно-связанной:

$$\mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}_u + \mathbf{K}_{u\theta} \cdot \mathbf{T}, \quad (1.168)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_\theta. \quad (1.169)$$

Здесь имеем несвязанную задачу (1.169) для нахождения вектора  $\mathbf{T}$ , а задача (1.168) имеет такой же вид, как для чисто упругой среды, но с добавлением вектора правых частей  $\mathbf{K}_{u\theta} \cdot \mathbf{T}$ .

Наконец, для задачи о температурных напряжениях с учетом демпфирования систему МКЭ также можно записать в виде векторно-связанной системы

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}_u + \mathbf{K}_{u\theta} \cdot \mathbf{T}, \quad (1.170)$$

$$\mathbf{C}_{\theta\theta} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_\theta, \quad (1.171)$$

где матрица демпфирования  $\mathbf{C}_{uu}$  та же, что и в (1.96).

## 1.5. Задачи пороупругости. Поротермоупругая аналогия

В данном разделе рассматриваются вопросы моделирования задач геомеханики деформируемых пористых пород с учетом фильтрации. Данные задачи описываются системами связанных уравнений пороупругости.

Сравнение уравнений пороупругости и термоупругости показывает, что между этими системами уравнений имеется достаточно полная аналогия. Поэтому, используя аналогию между задачами пороупругости и термоупругости, можно моделировать сложные связанные деформационные и фильтрационные процессы в геомеханических средах в рамках задач термоупругости, описанных в предыдущем разделе.

Пороупругие среды будем считать гетерогенными с упругой матрицей и порами, заполняемыми жидкостью. Будем считать, что пористость мала и распространение жидкости в массиве подчиняется законам фильтрации. Тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и пористость  $\phi$  выражаются через тензор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и функцию порового давления  $p$  по определяющим уравнениям пороупругости [27]

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}(p - p_0) \quad (1.172)$$

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{b} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{N}(p - p_0), \quad (1.173)$$

где  $\mathbf{c}$  — тензор упругих жесткостей четвертого ранга,  $\mathbf{b}$  — тензор Био второго ранга,  $N^{-1}$  — обратный модуль Био, связывающий изменение пористости с изменением давления при постоянной деформации,  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ,  $\phi_0$ ,  $p_0$  — начальные напряжения, пористость и поровое давление, соответственно.

Деформация пороупругого массива описывается уравнениями движения (1.23)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (1.174)$$

Для описания процесса фильтрации будем использовать закон Дарси в квазистатическом приближении

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{K}}{\rho_f g} \cdot (\nabla p - \rho_f \mathbf{g}), \quad (1.175)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость фильтрации,  $\mathbf{K}$  — тензор коэффициентов фильтрации второго ранга,  $\rho_f$  — плотность жидкости,  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения,  $g = |\mathbf{g}|$ .

Для получения уравнения для пористости используем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) = 0 \quad (1.176)$$

и уравнение состояния жидкости

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{dp}{K_f}, \quad (1.177)$$



где  $K_f$  — модуль объемного сжатия для жидкости.

Подставляя (1.175), (1.177), (1.173) в уравнения неразрывности (1.176), и считая малым изменения сжимаемости и пористости, получаем

$$\mathbf{b} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{M} \dot{p} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\rho_{f0} g} \cdot \nabla p \right) = 0, \quad (1.178)$$

где  $\rho_{f0}$  — начальная плотность жидкости,  $1/M = 1/N + \phi/K_f$ .

Для насыщенной пористой среды тензор Био можно принять единичным ( $\mathbf{b} = \mathbf{I}$ ), и тогда (1.174) с учетом (1.172) и (1.178) дают следующую систему уравнений пороупругой среды

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - p \mathbf{I}) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.179)$$

$$\mathbf{I} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{M} \dot{p} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\rho_{f0} g} \cdot \nabla p \right) = 0, \quad (1.180)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, и, следовательно,  $\mathbf{I} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \dot{\varepsilon}_{ii}$ .

Система (1.179), (1.180) представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений с различным порядком производных по времени и с сильно отличающимися по величине значениями материальных параметров и физических модулей. При моделировании явлений гидрорасчленения пород и их разрушения модули фильтрации принимаются зависящими от порового давления, а модули упругости могут зависеть от деформаций, что делает систему (1.179), (1.180) нелинейной. Для постановок задач пороупругости к (1.179), (1.180) следует добавить еще краевые и начальные условия, что приводит в итоге к связанным нестационарным линейным или нелинейным начально-краевым задачам геомеханики пороупругих сред.

Для решения задач пороупругости можно воспользоваться аналогией между уравнениями и краевыми условиями для пороупругих и термоупругих сред.

Как было показано в разделе 1.4, дифференциальные уравнения термоупругих сред имеют вид:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{c} : \nabla \mathbf{u} - \gamma \theta) = \rho \mathbf{f}, \quad (1.181)$$

$$T_0 \gamma : \nabla \dot{\mathbf{u}} + \rho c_\varepsilon \dot{\theta} - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla \theta) = W. \quad (1.182)$$

Сравнение (1.179), (1.180) с (1.181), (1.182) показывает, что уравнения связанной пороупругости после умножения (1.180) на  $T_0$  переходят в уравнения связанной термоупругости с  $W = 0$  при заменах

$$p \leftrightarrow \theta, \quad \mathbf{I} \leftrightarrow \gamma, \quad \frac{T_0}{\rho M} \leftrightarrow c_\varepsilon, \quad \frac{T_0 \mathbf{K}}{\rho_{f0} g} \leftrightarrow \mathbf{k}, \quad (1.183)$$

причем в уравнениях пороупругости нужно положить  $T_0 = 1$ .

Таким образом, для решения связанных начально-краевых задач пороупругости можно решать соответствующие начально-краевые задачи термоупругости и использовать программные средства, разработанные для решения задач термоупругости.

Для расчетов задач пороупругости следует также принять во внимание, что в задачах геомеханики значения модулей упругости, коэффициентов фильтрации и пористости имеют существенно различные порядки и отличаются от соответствующих величин задач термоупругости (кроме модулей упругости). В связи с этим для обеспечения устойчивости сходимости численных методов решения полезно перейти к безразмерным параметрам и обозначениям.

Выберем в качестве параметра обезразмеривания по пространственным координатам характерную длину области  $R$ , в качестве параметра обезразмеривания по времени — характерное время геомеханического процесса  $t_*$ , а качестве параметра обезразмеривания по давлению и напряжениям — характерное давление  $p_*$ . Безразмерные величины будем пометать значком «тильда» сверху:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/R, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/R, \quad \tilde{\nabla} = R\nabla, \quad \tilde{t} = t/t_*, \quad (1.184)$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/p_*, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/p_*, \quad \tilde{p} = p/p_*. \quad (1.185)$$

В этих обозначениях уравнения пороупругости (1.179), (1.180) можно переписать в виде

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}^2} - \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{c}} : \boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{p} \mathbf{I}) = \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{f}}, \quad (1.186)$$

$$T_0 \mathbf{I} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\rho} \tilde{c}_p \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} - \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p}) = 0, \quad (1.187)$$

где

$$\tilde{\rho} = \frac{R^2}{p_2 t_*^2} \rho, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \frac{t_*^2}{R} \mathbf{f}, \quad \tilde{c}_p = \frac{T_0 p_*}{M \tilde{\rho}}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \frac{T_0 p_* t_*}{R^2 \rho f_0 g} \mathbf{K}. \quad (1.188)$$

Отметим, что уравнения пороупругости в безразмерном виде переходят в безразмерные уравнения термоупругости при замене

$$\tilde{p} \leftrightarrow \tilde{\theta}, \quad \mathbf{I} \leftrightarrow \tilde{\gamma}, \quad \tilde{c}_p \leftrightarrow \tilde{c}_\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{K}} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{k}}, \quad (1.189)$$

при соответствующих обозначениях для безразмерных температурных величин, причем в уравнениях термоупругости можно положить  $T_0 = 1$ .

Как показывают тестовые расчеты, переход к безразмерным уравнениям и величинам (1.184)–(1.189) позволяет существенно повысить устойчивость и точность численных вычислений, поскольку коэффициенты системы оказываются выровненными по порядкам.

## 1.6. Моделирование взаимодействия твердых деформируемых тел с акустическими средами

В классической линейной акустике изучается распространение звуковых волн малой амплитуды в жидкостях или газах. Акустические или звуковые волны обусловлены упругими возмущениями, возникающими при деформировании твердотельной структуры, контактирующей с акустической средой. В связи с этим актуальными являются задачи о взаимодействии упругих, пьезоэлектрических или более сложных твердых деформируемых тел с акустическими средами. В таких задачах имеются две граничащие области  $\Omega_s$  и  $\Omega_a$ :  $\Omega_s$  — область, занимаемая твердотельной структурой,  $\Omega_a$  — область, занимаемая акустической средой. В каждой из областей поведение сред моделируется соответствующими уравнениями, записанными относительно различных полевых функций. Так, при постановке задачи теории упругости относительно функции перемещений неизвестной функцией является вектор перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_s$ . Для пьезоэлектрической среды неизвестными при стандартных постановках выбираются функции перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и электрического потенциала  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ . Между тем, для акустической среды  $\Omega_a$  основной неизвестной является функции избыточного давления  $p(\mathbf{x}, t)$  или функция потенциала акустической скорости  $\psi(\mathbf{x}, t)$ . Поэтому на границе контакта двух сред  $\Gamma_{sa} = \Omega_s \cap \Omega_a$  требуется использовать такие условия сопряжения полей, которые можно было бы эффективно включать в различные математические модели упругих, пьезоэлектрических и акустических сред.

Моделирование связанных задач взаимодействия упругих, пьезоэлектрических или других твердых деформируемых тел с акустическими средами имеет некоторые сложности и составляет предмет рассмотрения настоящего раздела.

### 1.6.1. Классические постановки задач акустики

Приведем вначале краткий вывод основных уравнений классической линейной акустики [29].

Плотность акустической среды (жидкости или газа) обозначим через  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ , давление — через  $\tilde{p} = \tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ , колебательную (акустическую) скорость — через  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

Как и для любой жидкости, имеем уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \tilde{\rho}) = 0. \quad (1.190)$$

Считая жидкость идеальной, вязкостью и теплопроводностью которой пренебрегаем, имеем уравнение движения Эйлера:

$$\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \tilde{p}. \quad (1.191)$$

Для акустической среды исследуются возмущенные или избыточные давление  $p(\mathbf{x}, t)$  и плотность  $\rho(\mathbf{x}, t)$  относительно исходных равновесных состояний  $p_0$  и  $\rho_0$ :

$$\tilde{p} = p_0 + p, \quad \tilde{\rho} = \rho_0 + \rho, \quad (1.192)$$

причем величины  $p/p_0$  и  $\rho/\rho_0$  принимаются малыми.

Акустическая жидкость считается сжимаемой с законом состояния (адиабатой Пуассона)

$$\tilde{p} = p_0 \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (1.193)$$

Подставляя в (1.193) формулы (1.192) и учитывая малость  $p/p_0$  и  $\rho/\rho_0$ , получаем:

$$p + p_0 = p_0 \left( 1 + \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \approx p_0 + \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \rho. \quad (1.194)$$

Величина  $\sqrt{p_0 \gamma / \rho_0}$  является основной постоянной среды и называется адиабатической скоростью звука  $c_0$ :

$$c_0^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0}. \quad (1.195)$$

Поэтому из (1.194), (1.195) имеем линейную связь между избыточными давлением и плотностью:

$$p = c_0^2 \rho. \quad (1.196)$$

Считая безразмерную скорость  $\mathbf{v}/c_0$  малой величиной, линеаризуем уравнения (1.190), (1.191) с учетом (1.192):

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.197)$$

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p. \quad (1.198)$$

Дифференцируя (1.197) по времени и учитывая (1.198) и (1.196), получаем волновое уравнение для функции избыточного давления:

$$\frac{1}{c_0^2} \ddot{p} - \Delta p = 0. \quad (1.199)$$

Это уравнение является основным, если за независимую полевую функцию принимать функцию избыточного давления  $p(\mathbf{x}, t)$ . Альтернативным

подходом является переход к уравнению относительно потенциала акустической скорости.

Умножим векторно обе части уравнения (1.198) на  $\nabla$ , и с учетом тождества  $\nabla \times \nabla p = 0$ , получим:  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ . Таким образом, поле акустической скорости безвихревое, и можно ввести функцию потенциала скорости  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{v} = \nabla \psi. \quad (1.200)$$

Тогда из (1.198) получаем соотношение, связывающее функции  $p$  и  $\psi$ :

$$p = -\rho_0 \dot{\psi}. \quad (1.201)$$

Формулы (1.201), (1.199) показывают, что и потенциал скоростей  $\psi$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{c_0^2} \ddot{\psi} - \Delta \psi = 0. \quad (1.202)$$

Для дифференциальных уравнений (1.199) или (1.202) нужно сформулировать соответствующие краевые условия.

Предположим, что граница  $\Gamma_a = \partial\Omega_a$  акустической среды разбита на четыре основные части:  $\Gamma_{af}$  — свободная граница;  $\Gamma_{ar}$  — жесткая стенка;  $\Gamma_{ai}$  — импедансная граница;  $\Gamma_{as}$  — граница контакта с твердым деформируемым телом.

На свободной границе избыточное давление  $p$  должно обращаться в нуль, а тогда по (1.201) и потенциал скоростей должен быть равен нулю:

$$p = 0, \quad \psi = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{af}. \quad (1.203)$$

На жесткой стенке равна нулю нормальная компонента вектора акустической скорости:  $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_{ar}$ , где  $n_a$  — внешняя по отношению к  $\Omega_a$  единичная нормаль к  $\Gamma_{ar}$ . Тогда по (1.200) производная по нормали от функции потенциала скоростей равна нулю на  $\Gamma_{ar}$ , и, следовательно, такое же условие справедливо и для функции избыточного давления:

$$\partial\psi/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla \psi = 0, \quad \partial p/\partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla p = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ar}. \quad (1.204)$$

Для ограничения сильно протяженных областей нужно вводить неотражающие или поглощающие границы. На таких границах задается импедансное граничное условие:  $p = Zv_n$ ;  $\mathbf{x} \in \Gamma_{ai}$ , где  $Z$  — импеданс границы  $\Gamma_{ai}$ . С использованием (1.201) это условие можно записать как условие для функции  $\psi$  или для функции  $p$ :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = -\rho_0 Z^{-1} \dot{\psi}, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla p = -\rho_0 Z^{-1} \dot{p}; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ai}. \quad (1.205)$$

Наконец, на границе контакта  $\Gamma_{as}$  с твердым деформируемым телом должны выполняться условия сопряжения

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{as}, \quad (1.206)$$

где  $\mathbf{v}$  — акустическая скорость в среде  $\Omega_a$ ;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений в теле  $\Omega_s$ ;  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_s$  — внешняя по отношению к  $\Omega_s$  единичная нормаль к  $\Gamma_{as}$  ( $\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_a$ ;  $\mathbf{n}_a$  — внешняя по отношению к  $\Omega_a$  единичная нормаль к  $\Gamma_{as}$ );  $\boldsymbol{\sigma}_s$  — тензор напряжений в твердотельной структуре;  $\boldsymbol{\sigma}_a = -p\mathbf{I}$  — тензор напряжений в акустической среде ( $\mathbf{I}$  — единичный тензор).

Для нестационарных задач кроме граничных условий нужно задать еще начальные условия для значений полевых функций и их первых производных по времени при  $t = +0$ .

Таким образом, классическая постановка задачи акустики возможна как относительно функции избыточного давления  $p = p(\mathbf{x}, t)$ , так и относительно функции потенциала акустической скорости  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ . Эта постановка включает волновое уравнение (1.199) или (1.202), граничные условия (1.203)–(1.206) и соответствующие начальные условия. При наличии границы  $\Gamma_{as}$  контакта с твердотельной структурой эта постановка не полна и должна рассматриваться вместе с соответствующей задачей для деформируемого твердого тела.

Если же рассматривается отдельная задача акустики, то при нулевых начальных данных ее постановку следует дополнить источниками возмущений, которые нужно добавить или в правые части волновых уравнений, или в граничные условия.

Для акустической среды с диссипацией можно рассматривать модификацию уравнения (1.199)

$$\frac{1}{c_0^2} \ddot{p} - \Delta p - \varepsilon_a \Delta \dot{p} = 0, \quad (1.207)$$

где  $\varepsilon_a$  — диссипативный коэффициент. Тогда можно показать [35], что для граничных условий (1.206) можно принять:  $\boldsymbol{\sigma}_a \approx -(p + \varepsilon_a \dot{p})\mathbf{I}$ .

Такая модель акустической среды с диссипацией очевидно коррелирует с моделями твердотельных структур при учете демпфирования по Релею и удобна для построения общих связанных систем уравнений, описывающих взаимодействие различных сред с учетом эффектов затухания.

### 1.6.2. Полудискретные аппроксимации на основе обобщенных постановок и сопряжение уравнений акустики с уравнениями твердотельной структуры

Для перехода к обобщенной постановке задачи акустики, сформулированной относительно функции давления, как обычно, умножим дифференциальное уравнение на пока произвольную достаточно гладкую функцию  $q = q(\mathbf{x})$ , проинтегрируем по области  $\Omega_a$  и осуществим преобразования, связанные с интегрированием по частям. В результате из (1.199) получаем:

$$\frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_a} q \ddot{p} d\Omega + \int_{\Omega_a} (\nabla q)^* \cdot \nabla p d\Omega = \int_{\Gamma_a} q \mathbf{n}_a \cdot \nabla p d\Gamma. \quad (1.208)$$

Теперь нужно преобразовать правую часть (1.208), используя граничные условия и формулируя ограничения на функцию  $q(\mathbf{x})$ .

На участке границы  $\Gamma_{af}$  на  $q$  нужно наложить те же условия (1.203), что и на функцию  $p$ :

$$q = 0; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{af}. \quad (1.209)$$

На участке  $\Gamma_{ar}$  по (1.204) нормальная производная от давления равна нулю, и поэтому интеграл в правой части (1.208) по участку  $\Gamma_{ar}$  обращается в нуль.

Импедансное граничное условие на  $\Gamma_{ai}$  по (1.205) приводит в следующем выражении:

$$\int_{\Gamma_{ai}} q \mathbf{n}_a \cdot \nabla p d\Gamma = -\rho_0 Z^{-1} \int_{\Gamma_{ai}} q \dot{p} d\Gamma. \quad (1.210)$$

Наконец, представление интеграла правой части (1.208) по границе  $\Gamma_{as}$  контакта с твердотельной структурой зависит от возможности соответствующих преобразований для упругих (пьезоэлектрических, термоупругих и др.) задач. Используя цепочку равенств

$$\mathbf{n}_a \cdot \nabla p = -\rho_0 \mathbf{n}_a \cdot \nabla \dot{\psi} = -\rho_0 \mathbf{n}_a \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\rho_0 \mathbf{n}_a \cdot \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{as},$$

получаем

$$\int_{\Gamma_{as}} q \mathbf{n}_a \cdot \nabla p d\Gamma = -\rho_0 \int_{\Gamma_{as}} q \mathbf{n}_a \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Gamma. \quad (1.211)$$

Тогда при выполнении ограничения (1.209) с учетом (1.210), (1.211) интегральное тождество (1.208) записывается в виде:

$$\frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_a} q \ddot{p} d\Omega + \frac{\rho_0}{Z} \int_{\Gamma_{ai}} q \dot{p} d\Gamma + \int_{\Omega_a} (\nabla q)^* \cdot \nabla p d\Omega + \rho_0 \int_{\Gamma_{as}} q \mathbf{n}_a \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Gamma = 0. \quad (1.212)$$

Поскольку основной нашей целью является построение численных методов анализа работы твердотельных структур, взаимодействующих с акустической средой, то здесь не будем полностью формулировать понятие слабого решения, тем более что это можно сделать по аналогии с предыдущими разделами.

Перейдем сразу к полудискретным аппроксимациям, которые будем задавать в виде

$$p \approx p_h = \mathbf{N}_p^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}(t), \quad q = \mathbf{N}_p^*(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{P} = (\delta \mathbf{P})^* \cdot \mathbf{N}_p(\mathbf{x}), \quad (1.213)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{0h} + \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{u}_{0h} = \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad (1.214)$$

где  $\mathbf{N}_p^*(\mathbf{x})$  — вектор строка функций формы для поля давления;  $\mathbf{P}(t)$  — вектор (зависящих от времени) констант аппроксимации;  $\delta \mathbf{P}$  — произвольный вектор;  $\mathbf{u}_n$ ,  $\mathbf{u}_{0h}$ ,  $\mathbf{N}_u^*(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{U}(t)$  — те же величины, что и определенные ранее в п. 1.3.3.

Подставляя (1.213), (1.214) в (1.212) с учетом независимости  $\delta \mathbf{P}$ , получаем

$$\mathbf{M}_{pp} \cdot \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{C}_{pp} \cdot \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_{pp} \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{R}_{pu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} = -\rho_0 \dot{\mathbf{F}}_p, \quad (1.215)$$

где

$$\mathbf{M}_{pp} = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_a} \mathbf{N}_p \mathbf{N}_p^* d\Omega, \quad \mathbf{C}_{pp} = \frac{\rho_0}{Z} \int_{\Gamma_{ai}} \mathbf{N}_p \mathbf{N}_p^* d\Gamma, \quad (1.216)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = \int_{\Omega_a} \mathbf{B}_p^* \cdot \mathbf{B}_p d\Omega, \quad \mathbf{B}_p = \nabla \mathbf{N}_p^*, \quad (1.217)$$

$$\mathbf{R}_{pu} = \int_{\Gamma_{as}} \mathbf{N}_p (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{N}_u^*) d\Gamma, \quad \mathbf{F}_p = \int_{\Gamma_{as}} \mathbf{N}_p (\mathbf{n}^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_n) d\Gamma. \quad (1.218)$$

Для сопряжения этих полудискретизованных уравнений для акустической среды, взаимодействующей с твердотельной структурой, надо еще получить соответствующие уравнения для деформируемого твердого тела.

Как было показано в разделе 1.3, в правую часть соответствующего уравнения для твердотельной структуры входил интеграл  $\int_{\Gamma_s} \mathbf{v}^* \cdot (\mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_s) d\Gamma$ , где  $\Gamma_s = \Gamma$  — граница области  $\Omega_s = \Omega$  твердотельной структуры,  $\mathbf{n}_s = \mathbf{n}$  — внешняя по отношению к  $\Omega_s$  единичная нормаль к  $\Gamma_s$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений в твердотельной структуре.

Для участка границы  $\Gamma_{as}$  с учетом условий контакта (1.206) и равенства  $\mathbf{n}_s = -\mathbf{n}_a$  при  $\boldsymbol{\sigma}_a = -p\mathbf{I}$  имеем:

$$\mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{n}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_a = -\mathbf{n}_a \cdot \boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{n}_a^* \cdot (p\mathbf{I}) = p \mathbf{n}_a.$$



Таким образом, уравнение типа (1.52) слабой постановки задачи для твердотельной структуры надо дополнить в правой части интегралом по поверхности контакта с акустической средой  $\int_{\Gamma_{as}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}_a p d\Gamma$ . Тогда при отсутствии пьезоэффекта ( $\mathbf{e}=0$ ) уравнение (1.52) слабой постановки задачи для чисто упругой среды запишется в виде:

$$c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_{as}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}_a p d\Gamma.$$

Подставляя в последний интеграл аппроксимации (1.213) для  $p \approx p_h$  и (1.93) для  $\mathbf{v}$ , получим:

$$\int_{\Gamma_{as}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}_a p d\Gamma = \delta \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{R}_{pu}^* \cdot \mathbf{P}.$$

Итак, в правую часть дискретизированных уравнений движения твердотельной структуры надо добавить вектор  $\mathbf{R}_{pu}^* \cdot \mathbf{P}$ . В результате, ограничиваясь для твердотельной структуры только упругим случаем с учетом демпфирования по Релею, будем иметь:

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R}_{pu}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{F}_u. \quad (1.219)$$

Уравнения (1.219), (1.215) нужно решать в совокупности. Эти уравнения и являются дискретизированными по пространственным переменным уравнениями движения твердотельной структуры и окружающей ее акустической среды.

В единой форме эти уравнения можно записать в виде:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1.220)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ \rho_0 \mathbf{R}_{pu} & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & -\mathbf{R}_{pu}^* \\ 0 & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}, \quad (1.221)$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ -\rho_0 \dot{\mathbf{F}}_p \end{Bmatrix}. \quad (1.222)$$

Как видно, матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  не являются симметричными, что несколько осложняет решение задачи (1.220).

Заметим, что даже в пренебрежении механизмами затухания в твердотельной структуре в системе (1.220) остается демпфирование, если  $\mathbf{C}_{pp} \neq 0$ . Очевидно, это имеет место при наличии импедансных граничных

условий, которые и допускают отток энергии из системы «твердое тело — акустическая среда».

Посмотрим, как будут выглядеть полудискретизованные уравнения для акустической среды при выборе акустического потенциала  $\psi(\mathbf{x}, t)$  в качестве независимой функции.

Примем соответствующую аппроксимацию  $\psi \approx \psi_h = \mathbf{N}_\psi^*(\mathbf{x}) \cdot \Psi$ , и учтем, что в силу (1.201) при  $\mathbf{N}_\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_p(\mathbf{x})$

$$\mathbf{P} = -\rho_0 \dot{\Psi}. \quad (1.223)$$

Подставляя (1.223) в (1.215) и интегрируя по времени, получим

$$\mathbf{M}_{\psi\psi} \cdot \ddot{\Psi} + \mathbf{C}_{\psi\psi} \cdot \dot{\Psi} + \mathbf{K}_{\psi\psi} \cdot \Psi - \mathbf{R}_{\psi u} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}_\psi, \quad (1.224)$$

где  $\mathbf{M}_{\psi\psi} = \mathbf{M}_{pp}$ ,  $\mathbf{C}_{\psi\psi} = \mathbf{C}_{pp}$ ,  $\mathbf{K}_{\psi\psi} = \mathbf{K}_{pp}$ ,  $\mathbf{R}_{\psi u} = \mathbf{R}_{pu}$ ,  $\mathbf{F}_\psi = \mathbf{F}_p$ .

Данное уравнение при объединении с (1.219) с учетом (1.223) дает систему (1.220), в которой теперь

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & -\rho_0 \mathbf{M}_{\psi\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & \rho_0 \mathbf{R}_{\psi u}^* \\ \rho_0 \mathbf{R}_{\psi u} & -\rho_0 \mathbf{C}_{\psi\psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & 0 \\ 0 & -\rho_0 \mathbf{K}_{\psi\psi} \end{bmatrix}, \quad (1.225)$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Psi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ -\rho_0 \mathbf{F}_\psi \end{Bmatrix}. \quad (1.226)$$

Отметим, что система (1.220) с (1.225), (1.226) для неизвестных  $\{\mathbf{U}, \Psi\}$  имеет симметричные матрицы седловой структуры (для симметрии матриц уравнения для акустической среды (1.224) были специально умножены на  $\rho_0$ ). Поэтому система в таком виде вычислительно предпочтительнее, чем система (1.220)–(1.222) для неизвестных  $\{\mathbf{U}, \mathbf{P}\}$ .

Тем не менее, в ряде вычислительных программ [25] принят именно подход (1.220)–(1.222), хотя имеются и реализации взаимодействия твердотельной структуры с акустической средой на основе уравнений (1.220) с (1.225), (1.226).

## Задачи к главе 1

**1.1.** Покажите, что в цепочке равенств (1.18) одно из равенств является следствием остальных.

**1.2.** Найдите максимальное число независимых модулей упругости среди компонент  $c_{ijkl}^E$  с учетом (1.18).

**1.3.** Найдите максимальное число независимых пьезомодулей  $e_{ikl}$  с учетом (1.19).

**1.4.** Покажите, что из условия положительной определенности (1.21) тензора упругих модулей четвертого ранга  $\mathbf{c}^E$  следует, что компоненты  $c_{iii}^E$  с одинаковыми индексами должны быть положительными.

**1.5.** Покажите, что в силу условия положительной определенности (1.22) тензора диэлектрических проницаемостей второго ранга  $\epsilon^S$  следует, что диагональные компоненты  $\epsilon_{ii}^S$  должны быть положительными. Должны ли быть положительными недиагональные компоненты  $\epsilon_{ij}^S$  ( $i \neq j$ )?

**1.6.** В силу условий симметрии (1.18) упругие модули  $c_{ijkl}^E$  можно расположить в виде симметричной матрицы  $c_{\alpha\beta}^E = c_{ijkl}^E$  размера  $6 \times 6$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$ ) при следующем соответствии индексов  $(ij) \leftrightarrow \alpha$ ,  $(ij) \leftrightarrow \beta$ :

$$(11) \leftrightarrow 1; \quad (22) \leftrightarrow 2; \quad (33) \leftrightarrow 3; \quad (23) = (32) \leftrightarrow 4; \quad (13) = (31) \leftrightarrow 5; \quad (12) = (21) \leftrightarrow 6.$$

При таком соответствии компоненты тензора деформаций  $\epsilon$  можно представить в виде вектора

$$\mathbf{S}^* = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}].$$

Покажите, что из условия (1.21) следует, что матрица  $c_{\alpha\beta}^E$  размера  $6 \times 6$  должна быть положительно определена.

**1.7.** Покажите, что в силу условия (1.22) матрица  $\epsilon^S$ , составленная из компонент тензора диэлектрических проницаемостей второго ранга  $\epsilon^S$ , должна быть положительно определена.

**1.8.** Докажите, что для симметричной положительно определенной матрицы  $\mathbf{K}$  для всех  $i, j$  выполняется неравенство  $|K_{ij}| \leq \sqrt{K_{ii}K_{jj}}$ .

**1.9.** Покажите, что при переходе к векторно-матричным обозначениям, описанным в задаче 1.6, при введении вектора напряжений размера 6

$$\mathbf{T}^* = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]$$

и матрицы размера  $3 \times 6$  пьезомодулей  $e_{i\alpha} = e_{ikl}$ ,  $(kl) \leftrightarrow \alpha$ , определяющие соотношения (1.16), (1.17) можно записать в виде:

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \epsilon^S \cdot \mathbf{E}.$$

**1.10.** Покажите, что для полусимметричных тензоров четвертого ранга роль «единицы» относительно двойной свертки с симметричным тензором второго ранга выполняет тензор  $\Delta$ :

$$\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

для которого

$$\sigma = \Delta : \sigma, \quad \forall \sigma : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Проверьте, что если два тензора четвертого ранга  $\mathbf{c}^E$  и  $\mathbf{s}^E$  связаны соотношением

$$\mathbf{c}^E : \mathbf{s}^E = \mathbf{s}^E : \mathbf{c}^E = \Delta,$$

то из равенства  $\tilde{\sigma} = \mathbf{c}^E : \tilde{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon} = \tilde{\sigma}^*$  следует равенство  $\tilde{\epsilon} = \mathbf{s}^E : \tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$ , и наоборот, т.е. тензоры четвертого ранга  $\mathbf{c}^E$  и  $\mathbf{s}^E$  могут быть названы взаимобратными.

**1.11.** Покажите, что введенный в задаче 1.10 единичный тензор  $\Delta$  является полусимметричным тензором, т.е. что для него выполняются условия симметрии типа (1.18). Является ли тензор  $\Delta$  положительно определенным в смысле (1.21)?

**1.12.** Получите эквивалентную к (1.16), (1.17) форму определяющих соотношений

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k,$$

$$D_i = d_{ikl} \sigma_{kl} + \epsilon_{ik}^T E_k,$$

где  $s_{ijkl}^E$  – компоненты тензора упругих податливостей, вычисленных при постоянном электрической поле;  $d_{ikl}$  – компоненты тензора пьезомодулей;  $\epsilon_{ik}^T$  – компоненты диэлектрических проницаемостей, вычисленных при постоянном напряжении.

Каковы свойства симметрии и положительной определенности у тензоров упругих податливостей  $\mathbf{s}^E$ , пьезомодулей  $\mathbf{d}$  и диэлектрических проницаемостей  $\boldsymbol{\epsilon}^T$ ?

**1.13.** Покажите, что при введении векторно-матричных обозначений задач 1.6 и 1.9, определяющее соотношение задачи 1.12 можно записать в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \cdot \mathbf{T} + \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{E},$$

причем компоненты матриц  $s_{\alpha\beta}^E$  и  $d_{i\beta}$  связаны с компонентами тензоров  $s_{ijkl}^E$  и  $d_{ikl}$  по законам

$$s_{\alpha\beta}^E = 2^{[\alpha/4]+[\beta/4]} s_{ijkl}^E, \quad d_{i\beta} = 2^{[\beta/4]} d_{ikl},$$

где  $[\gamma]$  – целая часть числа  $\gamma$ .

**1.14.** Получите эквивалентную к (1.16), (1.17) форму определяющих соотношений

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{kij} D_k,$$

$$E_i = -h_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik}^S D_k,$$

где  $c_{ijkl}^D$  – компоненты тензора упругих модулей, вычисленных при постоянной электрической индукции;  $h_{ikl}$  – компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных деформаций;  $\beta_{ik}^S$  – компоненты диэлектрических непроницаемостей, вычисленных при постоянной деформации.

Каковы свойства симметрии и положительной определенности у тензоров упругих модулей  $\mathbf{c}^D$ , пьезоэлектрических постоянных деформаций  $\mathbf{h}$  и диэлектрических непроницаемостей  $\boldsymbol{\beta}^S$ ?

**1.15.** Покажите, что при введении векторно-матричных обозначений задач 1.6 и 1.9, определяющее соотношение задачи 1.14 можно записать в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^D \cdot \mathbf{S} - \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{D},$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\beta}^S \cdot \mathbf{D},$$

где  $c_{\alpha\beta}^D = c_{ijkl}^D$  и  $h_{i\beta} = h_{ikl}$ .

**1.16.** Получите эквивалентную к (1.16), (1.17) форму определяющих соотношений

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^D \sigma_{kl} + g_{kij} D_k,$$

$$E_i = -g_{ikl} \sigma_{kl} + \beta_{ik}^T D_k,$$

где  $s_{ijkl}^D$  – компоненты тензора упругих податливостей, вычисленных при постоянной электрической индукции;  $g_{ikl}$  – компоненты тензора пьезоэлектрических постоянных

напряжения;  $\beta_{jk}^T$  – компоненты диэлектрических непроницаемостей, вычисленных при постоянном напряжении.

Каковы свойства симметрии и положительной определенности у тензоров упругих податливостей  $\mathbf{s}^D$ , пьезоэлектрических постоянных напряжения  $\mathbf{g}$  и диэлектрических непроницаемостей  $\beta^T$ .

**1.17.** Покажите, что при введении векторно-матричных обозначений задач 1.6 и 1.9, определяющие соотношения задачи 1.16 можно записать в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^D \cdot \mathbf{T} + \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{D},$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{T} + \beta^T \cdot \mathbf{D},$$

причем компоненты матриц  $s_{\alpha\beta}^D$  и  $g_{i\beta}$  связаны с компонентами тензоров  $s_{ijkl}^D$  и  $g_{ikl}$  по законам

$$s_{\alpha\beta}^D = 2^{[\alpha/4]+[\beta/4]} s_{ijkl}^D, \quad g_{i\beta} = 2^{[\beta/4]} g_{ikl},$$

где  $[\gamma]$  – целая часть числа  $\gamma$ .

**1.18.** Докажите, что при смещениях деформируемого твердого тела как жесткого целого его деформации равны нулю, т.е.  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$  при перемещениях вида  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{rigid}} = \mathbf{u}_c + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}_c = \text{const}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_c = \text{const}$ .

**1.19.** Покажите, что в векторно-матричных обозначений задач 1.6 и 1.9, соотношение Коши (1.10), уравнение движения (1.23) и граничное условие (1.32) можно представить в виде

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u},$$

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_\Gamma; \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma,$$

где

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**1.20.** Докажите, что при обычных для деформируемого твердого тела условиях на плотность  $\rho \geq \rho_0 > 0$ , матрица масс  $\mathbf{M}_{uu}$ , введенная в (1.96), положительно определена.

**1.21.** Докажите, что если главные граничные условия не допускают движения тела как жесткого целого, т.е., если  $\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \neq 0$  для любых возможных перемещений  $\delta \mathbf{u} \neq 0$ , совместимых со связями ( $\delta \mathbf{u} = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Gamma_u$ ), то матрица жесткости  $\mathbf{K}_{uu}$ , введенная в (1.96), положительно определена.

**1.22.** Докажите, что если хотя бы в одной точке границы пьезоэлектрического тела задан электрический потенциал, то матрица диэлектрических проницаемостей  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ , введенная в (1.96), положительно определена.

**1.23.** Докажите, что в общем случае матрицы жесткости  $\mathbf{K}_{uu}$  и диэлектрических проницаемостей  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ , введенные в (1.96), неотрицательно определены.

**1.24.** Докажите, что матрица  $\bar{\mathbf{K}}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^*$  из (1.102) симметрична и положительно определена, если главные граничные условия не допускают движения тела как жесткого целого (см. задачу 1.21).

**1.25.** Докажите вывод Пьера Кюри о том, что материалы, обладающие пьезоэффектом, не могут иметь центра симметрии. Для этого рассмотрите преобразование

инверсии  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$  относительно центра симметрии и примените формулы преобразования компонент тензора третьего ранга  $e_{ijk}$  при переходе от исходной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  к другой декартовой системе координат  $Ox'_1x'_2x'_3$ :

$$e'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}e_{lmn},$$

где  $\alpha_{il}$  – косинусы углов между осями  $x'_i$  и  $x_l$ . Далее используйте, что для центрально-симметричных материалов при преобразованиях относительно центра симметрии должно выполняться равенство  $e'_{ijk} = e_{ijk}$ , и покажите, что тогда все пьезомодули  $e_{ijk}$  должны обращаться в нуль.

**1.26.** При постановке нестационарной задачи электроупругости в разделе 1.3.1 были сформулированы начальные условия (1.37) только для функций  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ . Нужны ли начальные условия для функции электрического потенциала  $\varphi$ ?

**1.27.** Покажите, что в векторно-матричных обозначениях задач 1.6 и 1.9 при дополнительно введенном векторе коэффициентов температурных напряжений

$$\mathbf{G}^* = [\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}]$$

определяющие соотношения (1.112), (1.113) можно записать в виде:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{G} \theta,$$

$$S = \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{S} + \frac{\rho c_\varepsilon}{T_0} \theta.$$

**1.28.** Получите эквивалентную к (1.112), (1.113) форму определяющих соотношений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} \theta,$$

$$S = \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{\rho c_\sigma}{T_0} \theta,$$

где  $\mathbf{s}$  – полусимметричный тензор упругих податливостей четвертого ранга, обратный к  $\mathbf{c}$  в смысле задачи 1.10;  $\boldsymbol{\alpha}$  – симметричный тензор коэффициентов температурных расширений второго ранга;  $c_\sigma$  – удельная теплоемкость при постоянном напряжении. Что больше:  $c_\sigma$  или  $c_\varepsilon$  из (1.113)?

**1.29.** Покажите, что при введении векторно-матричных обозначений задач 1.6, 1.9 и вектора коэффициентов температурных расширений

$$\mathbf{A}^* = [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 2\alpha_{23}, 2\alpha_{13}, 2\alpha_{12}]$$

определяющие соотношения задачи 1.28 можно записать в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{A} \cdot \theta,$$

$$S = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{T} + \frac{\rho c_\sigma}{T_0} \theta,$$

причем компоненты матрицы  $s_{\alpha\beta}$  связаны (как в задаче 1.17) с компонентами тензора  $s_{ijkl}$  по закону

$$s_{\alpha\beta} = 2^{[\alpha/4]+[\beta/4]} s_{ijkl},$$

где  $[\gamma]$  – целая часть числа  $\gamma$ .

**1.30.** Докажите, что при обычных для термоупругого тела условиях на плотность  $\rho \geq \rho_0 > 0$  и на удельную теплоемкость  $c_\varepsilon \geq c_{\varepsilon 0} > 0$ , матрица теплоемкости  $\mathbf{C}_{\theta\theta}$ , введенная в (1.164), положительно определена.

**1.31.** Докажите, что в общем случае матрица теплопроводности  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ , введенная в (1.164), неотрицательно определена.

**1.32.** Сформулируйте условия, при которых матрица теплопроводности  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ , введенная в (1.164), положительно определена (с доказательством).

**1.33.** Докажите, что матрицы  $\mathbf{M}_{pp}$  и  $\mathbf{C}_{pp}$ , введенные в (1.216), положительно определены, а матрица  $\mathbf{K}_{pp}$  из (1.217) в общем случае неотрицательно определена.

**1.34.** Сформулируйте условия, при которых акустическая матрица  $\mathbf{K}_{pp}$ , введенная в (1.217), положительно определена (с доказательством).

**1.35.** Запишите аналогично уравнениям (1.220)–(1.222) матричные полудискретные уравнения для пьезоэлектрического тела  $\Omega_s$ , взаимодействующего с акустической средой  $\Omega_a$ . При моделировании процессов в среде  $\Omega_s$  примите в качестве неизвестных в аппроксимациях векторы  $\{\mathbf{U}, \mathbf{\Phi}\}$ , а в среде  $\Omega_a$  – вектор  $\{\mathbf{P}\}$ , и в результате получите систему уравнений для векторов  $\{\mathbf{U}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{P}\}$ . При решении задачи можно использовать, что поведение твердотельной пьезоэлектрической структуры описывается уравнениями (1.97), (1.98).

**1.36.** Запишите аналогично уравнениям (1.220), (1.225), (1.226) матричные полудискретные уравнения для пьезоэлектрического тела  $\Omega_s$ , взаимодействующего с акустической средой  $\Omega_a$ . При моделировании процессов в среде  $\Omega_s$  примите в качестве неизвестных в аппроксимациях векторы  $\{\mathbf{U}, \mathbf{\Phi}\}$ , а в среде  $\Omega_a$  – вектор  $\{\mathbf{\Psi}\}$ , и в результате получите систему уравнений для векторов  $\{\mathbf{U}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}\}$ . При решении задачи можно использовать, что поведение твердотельной пьезоэлектрической структуры описывается уравнениями (1.97), (1.98).

**1.37.** Запишите аналогично уравнениям (1.220)–(1.222) матричные полудискретные уравнения для термоупругого тела  $\Omega_s$ , взаимодействующего с акустической средой  $\Omega_a$  (без учета поля температур в акустической среде). При моделировании процессов в среде  $\Omega_s$  примите в качестве неизвестных в аппроксимациях векторы  $\{\mathbf{U}, \mathbf{T}\}$ , а в среде  $\Omega_a$  – вектор  $\{\mathbf{P}\}$ , и в результате получите систему уравнений для векторов  $\{\mathbf{U}, \mathbf{T}, \mathbf{P}\}$ . При решении задачи можно использовать, что поведение твердого деформируемого термоупругого тела  $\Omega_s$  описывается уравнениями (1.165), (1.166).

**1.38.** Запишите аналогично уравнениям (1.220), (1.225), (1.226) матричные полудискретные уравнения для термоупругого тела  $\Omega_s$ , взаимодействующего с акустической средой  $\Omega_a$  (без учета поля температур в акустической среде). При моделировании процессов в среде  $\Omega_s$  примите в качестве неизвестных в аппроксимациях векторы  $\{\mathbf{U}, \mathbf{T}\}$ , а в среде  $\Omega_a$  – вектор  $\{\mathbf{\Psi}\}$ , и в результате получите систему уравнений для векторов  $\{\mathbf{U}, \mathbf{T}, \mathbf{\Psi}\}$ . При решении задачи можно использовать, что поведение твердого деформируемого термоупругого тела  $\Omega_s$  описывается уравнениями (1.165), (1.166).

---

## Глава 2

# Метод конечных элементов для решения связанных физико-механических задач

### 2.1. Общая схема метода Бубнова—Галеркина. Динамические и статические задачи МКЭ

Как было показано в главе 1, для численного нахождения слабых решений связанных задач может использоваться метод Бубнова—Галеркина в полудискретной (для динамических задач) формулировке. В общем виде все слабые постановки задач из главы 1 можно представить в форме

$$\rho_a(\mathbf{w}, \ddot{\mathbf{a}}) + d_a(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{a}}) + c_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = \tilde{L}_a(\mathbf{w}), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $a_i$  — неизвестные полевые функции;  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  — проекционные функции;  $\rho_a, d_a, c_a$  — билинейные формы, содержащие интегралы по области  $\Omega$  от произведений  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}$  и их производных;  $\tilde{L}_a$  — линейный непрерывный функционал.

Например, рассмотрим слабые постановки трехмерных задач электроупругости (1.83), (1.84), записанные без процедур (1.62) снятия неоднородных главных граничных условий:

$$\rho(\mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}) + d(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}}) + c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - e(\mathbf{v}, \varphi) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}), \quad (2.2)$$

$$e(\mathbf{u}, \chi) + \epsilon(\chi, \varphi) = \tilde{L}_\varphi(\chi). \quad (2.3)$$

Поскольку в этих уравнениях  $\mathbf{v}, \chi$  — произвольные функции требуемой гладкости, то соотношения (2.2), (2.3) эквивалентны их сумме. Очевидно, что почленная сумма (2.2) и (2.3) может быть записана в виде (2.1) при  $k = 4$ ;  $\mathbf{a} = \{\mathbf{u}, \varphi\}$ ;  $a_1 = u_1 = u_x$ ;  $a_2 = u_2 = u_y$ ;  $a_3 = u_3 = u_z$ ;



$a_4 = \varphi$ ;  $\mathbf{w} = \{\mathbf{v}, \chi\}$ ;  $\rho_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ;  $d_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ;  $c_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - e(\mathbf{v}, \varphi) + e(\mathbf{u}, \chi) + \epsilon(\chi, \varphi)$ ;  $\tilde{L}_a(\mathbf{w}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) + \tilde{L}_\varphi(\chi)$ .

Аналогично, слабая постановка задач термоупругости, основанная на соотношениях (1.137), (1.138), может быть представлена в форме (2.1) при  $k = 4$ ;  $\mathbf{a} = \{\mathbf{u}, \theta\}$ ;  $a_1 = u_1 = u_x$ ;  $a_2 = u_2 = u_y$ ;  $a_3 = u_3 = u_z$ ;  $a_4 = \theta$ ;  $\mathbf{w} = \{\mathbf{v}, \eta\}$ ;  $\rho_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ ;  $d_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = T_0\gamma(\mathbf{u}, \eta) + s(\eta, \theta)$ ;  $c_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}) = c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{v}, \theta) + k(\eta, \theta)$ ;  $\tilde{L}_a(\mathbf{w}) = \tilde{L}_u(\mathbf{v}) + \tilde{L}_\theta(\eta)$ .

При снятии неоднородности главных граничных условий решение ищется в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_n, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{a}_0 = \{a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0k}\}$  — неизвестная функция, удовлетворяющая однородным главным граничным условиям,  $\mathbf{a}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}\}$  — известная (специально подобранная) функция, для которой выполняются те же неоднородные главные граничные условия, что и для  $\mathbf{a}$ .

Из (2.1), (2.4) очевидно, что нахождения  $\mathbf{a}_0$  имеем соотношение:

$$\rho_a(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{a}}_0) + d_a(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{a}}_0) + c_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}_0) = L_a(\mathbf{w}), \quad (2.5)$$

$$L_a(\mathbf{w}) = \tilde{L}_a(\mathbf{v}) - \rho_a(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{a}}_n) - d_a(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{a}}_n) - c_a(\mathbf{w}, \mathbf{a}_n). \quad (2.6)$$

Для задач электроупругости (2.5) должно удовлетворяться для  $\forall \mathbf{w} \in V$ ;  $V = \{\mathbf{H}_u^1, \mathbf{H}_\varphi^1\}$ ;  $\mathbf{a}$  неизвестная часть решения  $\mathbf{a}_0$  должна принадлежать пространству  $Q = \{Q_u, Q_\varphi\}$ . Аналогичные функциональные пространства можно ввести и для других связанных задач из главы 1.

В классическом варианте метода Бубнова—Галеркина выбираются конечномерные по  $\mathbf{x}$  пространства  $V_h \subset V$ ,  $Q_h = L^2(0, T; V_h)$ ,  $Q_h \subset Q$ , и разыскивается приближенное решение  $\mathbf{a}_{h0} \approx \mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_{h0} \in Q_h$ , удовлетворяющее (2.5) при  $\forall \mathbf{w} \in V_h$ .

В пространстве  $V_h$  произвольную вектор-функцию  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  можно разложить по базису, и для отдельной компоненты  $w_i$  такое разложение можно записать в виде

$$w_i = \sum_{j=1}^{n_i} N_{aij}(\mathbf{x}) W_{ij} = \mathbf{N}_{ai}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{W}_i, \quad (2.7)$$

где  $N_{aij}(\mathbf{x})$  — базисные функции;  $W_{ij}$  — коэффициенты при базисных функциях;  $\mathbf{N}_{ai}^* = [N_{ai1}, N_{ai2}, \dots, N_{ain_i}]$ ;  $\mathbf{W}_i = \{W_{i1}, W_{i2}, \dots, W_{in_i}\}$ ; суммирование по  $i$  в (2.7) нет.

Как видно, размерность базиса пространства  $V_h$  в принятых обозначениях равна  $n_{V_h} = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Компоненты  $a_{h0i}$  вектора приближенного

решения  $\mathbf{a}_{h0}$  тогда можно искать в форме

$$a_{h0i} = \sum_{j=1}^{n_i} N_{aij}(\mathbf{x}) A_{ij}(t) = \mathbf{N}_{ai}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_i(t), \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{A}_i(t) = \{A_{i1}(t), A_{i2}(t), \dots, A_{in_i}(t)\}$ ;  $A_{ij}(t)$  — неизвестные скалярные функции аппроксимации.

Если из векторов  $\mathbf{W}_i$ ;  $\mathbf{A}_i(t)$  образовать единые векторы  $\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_k\}$ ;  $\mathbf{A}(t) = \{\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \dots, \mathbf{A}_k(t)\}$ , то из (2.7), (2.8) можно получить общие представления для  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{a}_{h0}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{N}_a^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{W}, \quad \mathbf{a}_{h0} = \mathbf{N}_a^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(t), \quad (2.9)$$

где  $i$ -ая строка матрицы базисных функций  $\mathbf{N}_a^*$  имеет следующую блочную структуру:  $[\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{N}_{ai}^*, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]$ . Здесь нужно отметить, что вид матрицы  $\mathbf{N}_a^*$  зависит от выбранного способа сборки векторов  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{A}$  из  $\mathbf{W}_i$  и  $\mathbf{A}_i$ .

Подставим (2.9) в (2.5) и учтем, что в интегральных формах  $\rho_a$ ,  $d_a$ ,  $c_a$  и в линейном функционале  $L_a$  величины  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{A}(t)$  не зависят от пространственных переменных  $\mathbf{x}$ , а, следовательно, могут быть вынесены за знаки интегралов. В результате получаем уравнение в матричной форме

$$\mathbf{W}^* \cdot (\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{A}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{F} \quad (2.10)$$

с матрицами  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  и вектором  $\mathbf{F}$ , определяемыми из  $\rho_a$ ,  $d_a$ ,  $c_a$  и  $L_a$ , соответственно.

Поскольку  $\mathbf{W}$  — произвольный вектор из  $V_h$ , то из (2.10) имеем итоговое уравнение движения

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{A}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{F}. \quad (2.11)$$

Если рассматривается *нестационарная задача*, то к (2.11) необходимо добавить начальные условия

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_{sn}, \quad \dot{\mathbf{A}}(0) = \mathbf{V}_{sn} \quad (2.12)$$

с известными начальными значениями  $\mathbf{A}_{sn}$ ,  $\mathbf{V}_{sn}$ , которые легко находятся из соответствующих континуальных начальных условий. При этом, если для отдельных блоков  $\mathbf{A}_i$  в уравнении (2.11) отсутствуют вторые производные по времени, то для этих блоков начальные условия на их первые производные по  $t$  не ставятся.

Итак, решения *нестационарных задач* по методу Бубнова—Галеркина сводятся к задаче Коши (2.11), (2.12) для системы обыкновенных

дифференциальных уравнений по времени. В (2.11) представлено  $n_{Vh}$  скалярных уравнений относительно компонент  $A_{ij}(t)$ .

Отметим, что имеется *три* основных *типа динамических задач: нестационарные задачи, задачи об установившихся колебаниях и задачи на собственные значения.*

Нестационарные задачи (2.11), (2.12), как правило, являются наиболее сложными и трудоемкими. Если все внешние воздействия (включая и главные граничные условия) изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой  $f = \omega/2\pi$  так, что  $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}e^{i\omega t}$ , и решение устанавливается во времени по тому же закону  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}e^{i\omega t}$ , то можно опустить начальные условия и рассматривать *задачу об установившихся колебаниях.* Очевидно, что подстановка

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

в (2.11) дает

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (2.14)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{F}}$  — комплексные амплитуды векторов решения и внешних воздействий.

В линейной задаче (2.14) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с комплексной арифметикой относительно комплексного вектора неизвестных  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Причем, если даже затухания в системе нет, т.е.  $\mathbf{C} = 0$ , то вектор  $\tilde{\mathbf{F}}$  может быть комплексным, а, следовательно, и вектор  $\tilde{\mathbf{A}}$  будет комплексным.

Задачу об установившихся колебаниях (2.14) часто приходится решать много раз, двигаясь по частоте  $\omega$  в некотором интервале  $[\omega_b, \omega_e]$ . В этом случае интерес представляют какие-то характеристики решения  $\tilde{\mathbf{A}}$  в зависимости от частоты  $\omega$  (частотные характеристики). Особое значение имеют максимумы этих характеристик и частоты, на которых достигаются эти максимумы. Такие частоты называют *резонансными частотами.* Для поиска возможных резонансных частот можно решать отдельную *задачу на собственные значения,* когда в (2.14)  $\tilde{\mathbf{F}} = 0$  и обычно (но не всегда)  $\mathbf{C} = 0$ .

Если  $\mathbf{C} = 0, \tilde{\mathbf{F}} = 0$ , то (2.14) принимает вид:

$$\omega^2\mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{A}}. \quad (2.15)$$

В (2.15) неизвестными считаются частота  $\omega$  и вектор  $\tilde{\mathbf{A}}$ , причем представляют интерес нетривиальные решения  $\tilde{\mathbf{A}} \neq 0$ . В этом случае  $\omega$  называется *собственной частотой,* а  $\tilde{\mathbf{A}}$  — *собственным вектором* или *модой колебаний.* В численном анализе задача (2.15) называется также

обобщенной задачей на собственные значения, а в документациях по конечно-элементным комплексам — *модальным анализом*.

Реже рассматривается задача на собственные значения для матричного пучка

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0, \quad (2.16)$$

где также надо найти пары  $\{\omega, \tilde{\mathbf{A}}\}$ , при которых (2.16) удовлетворяется, и  $\tilde{\mathbf{A}} \neq 0$ .

Наконец, кроме динамических задач можно рассматривать *статические* или *стационарные задачи*, когда в (2.11)  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{F}$  не зависят от времени, и в линейных задачах (2.11) сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{F}. \quad (2.17)$$

Как видно, метод Бубнова—Галеркина приводит динамические и статические задачи к стандартным задачам численного анализа, для решения которых имеются хорошо разработанные специальные численные методы.

## 2.2. МКЭ как вариант метода Бубнова—Галеркина. Основные идеи МКЭ

Основной проблемой практического применения метода Бубнова—Галеркина является задача нахождения пространств  $V_h$  и их базисов, подходящих для областей достаточно произвольной формы. Метод конечных элементов (МКЭ) является вариантом метода Бубнова—Галеркина, в котором эта задача решается путем разбиения области  $\Omega$  (точнее,  $\Omega_h \subset \Omega$ ) на подобласти  $\Omega^{em}$  стандартных форм с простыми базисными функциями.

Как оказалось, в рамках МКЭ можно реализовать ряд технических приемов, допускающих их применение и программную реализацию для самых разнообразных задач математической физики. К таким основным общим приемам можно отнести *процедуры ансамблирования, учета главных граничных условий и вычисления элементных матриц и векторов путем численного интегрирования*. Все это обусловило широчайшее применение МКЭ и его эффективную реализацию в многочисленных вычислительных комплексах как общего, так и специализированного назначения.

Настоящее пособие не претендует на полноту изложения МКЭ. Имеются многочисленные монографии, где МКЭ освещается с математической точки зрения [18, 22, 23], с точки зрения конкретных приложений [19] и

с большим упором на программную реализацию. Зачастую подобное разделение провести затруднительно [1, 6, 7, 17, 39, 40, 41]. Ряд монографий ориентирован на применение МКЭ для решения связанных задач механики [13, 30, 32]. Наконец, крайне полезная информация содержится в документации по конечно-элементным программным комплексам [25].

Перейдем к краткому изложению МКЭ для классических лагранжевых конечных элементов в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $\Omega_h \subset \Omega$ , и имеется разбиение области  $\Omega_h$  на совокупность областей простой формы — конечных элементов  $\Omega^{em}$ , т. е.  $\Omega_h = \cup_{m=1}^{n_{el}} \Omega^{em}$ , где  $m$  — номер элемента,  $n_{el}$  — общее число областей  $\Omega^{em}$ .

Слабые формулировки задач будем рассматривать на  $\Omega_h$ , заменяя в них области интегрирования с  $\Omega$  на  $\Omega_h$  и снося граничные условия на границу  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$  и ее части с различными типами условий ( $\Gamma_{hu}$ ,  $\Gamma_{h\sigma}$ , и т. п.)

В структуру конечно-элементной сетки входят также ее *узлы*. Отдельный узел характеризуется своим номером  $j$  и координатами  $\mathbf{x}_j = \{x_j, y_j, z_j\}$ . Каждый конечный элемент  $\Omega^{em}$  имеет свой набор узлов  $\{\mathbf{x}_{r_1}^{em}, \mathbf{x}_{r_2}^{em}, \dots, \mathbf{x}_{r_n}^{em}\}$ ;  $\mathbf{x}_{r_s}^{em} \in \Omega^{em}$ ;  $s = 1, 2, \dots, n = n^{em}$ ;  $n^{em}$  — число узлов элемента.

Для самых простых элементов узлами являются вершины геометрических фигур  $\Omega^{em}$ . Для более сложных элементов вершины могут находиться также на сторонах и внутри областей  $\Omega^{em}$ . Так, для элементов с квадратичными базисными функциями узлы находятся в вершинах и, обычно, на серединах сторон фигур  $\Omega^{em}$ .

На рис. 2.1 и 2.2 показаны двумерные конечно-элементные сетки, состоящие из треугольных и четырехугольных элементов. Оба варианта сеток построены для одной и той же твердотельной модели с одинаковыми параметрами конечно-элементных разбиений. Поэтому почти все области  $\Omega^{em}$  и их номера на обоих рисунках слева совпадают. На рис. 2.1 представлены простые элементы без промежуточных узлов, а на рис. 2.2 — более сложные элементы с узлами в вершинах и на серединах сторон. Как видно из рис. 2.2, *б*, элементы с промежуточными узлами могут иметь криволинейные стороны, что позволяет им более точно аппроксимировать изогнутые границы по сравнению с элементами с узлами только в вершинах элементов.

С каждым узлом  $\mathbf{x}_j$  свяжем свою *базисную функцию*  $N_j(\mathbf{x})$ , которая обладает рядом важных взаимосвязанных свойств.

1) *Функция  $N_j(\mathbf{x})$  тождественно равна нулю на всех элементах  $\Omega^{el}$ , которые не содержат узел  $\mathbf{x}_j$  (как внутри, так и на границах  $\Omega^{el}$ ).*

2) Обычно принимается, что

$$N_j(\mathbf{x}_k) = \delta_{jk}, \quad (2.18)$$

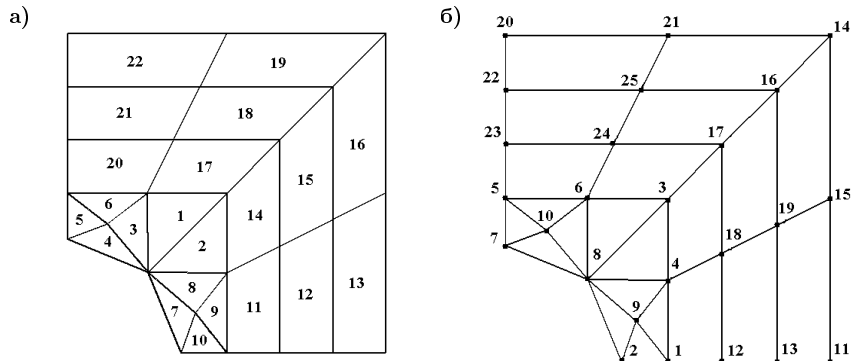


Рис. 2.1. Пример 2D-сетки с элементами без серединных узлов: с нумерацией элементов (а) и с нумерацией узлов (б)

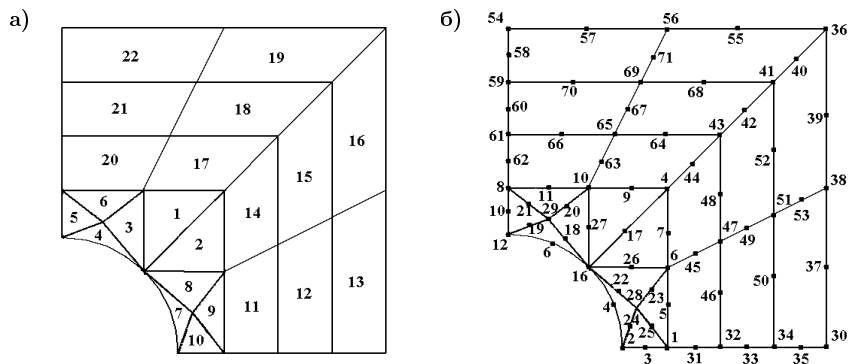


Рис. 2.2. Пример 2D-сетки с элементами с серединными узлами: с нумерацией элементов (а) и с нумерацией узлов (б)

т. е. базисная функция  $N_j(\mathbf{x})$  равна единице в узле  $\mathbf{x}_j$  и нулю — во всех остальных узлах.

3) Базисные функции  $N_j(\mathbf{x})$  задаются, возможно, вместе с параметрическими отображениями (см. далее п. 2.3) достаточно простыми полиномиальными выражениями невысокой степени.

4) При использовании согласованных конечно-элементных сеток, когда граничащие друг с другом элементы  $\Omega^m$  имеют общие узлы и стороны и соприкасаются между собой без лагун и перекрытий, для элементов с одинаковым типом аппроксимации на сторонах и/или на гранях обеспечивается  $C^0$ -гладкость приближаемых функций в  $\Omega_h$ , и

выполняется так называемое условие полноты

$$\sum_{j=1}^{n_{nd}} N_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h, \quad (2.19)$$

где  $n_{nd}$  — общее число узлов.

Отмеченные особенности конечно-элементных сеток и базисов определяют ряд хороших вычислительных свойств МКЭ.

Поскольку отдельные базисные функции  $N_j(\mathbf{x})$  имеют носители (т.е. замыкания множеств, где  $N_j(\mathbf{x})$  отличны от нуля), связанные с малым числом конечных элементов, то матрицы МКЭ  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{M}$  являются сильно разреженными.

Так, на рис. 2.3 показана базисная функция  $N_9(\mathbf{x})$  для конечно-элементной сетки, идентичной приведенной ранее на рис. 2.1. Конечные элементы, где эта функция равна нулю здесь затемнены. Как видно, только для четырех элементов (с номерами 7–10) эта функция отлична от нуля, и с этими элементами связаны пять узлов (с номерами 1, 2, 4, 8, 9). Поэтому, например, для задачи с одной скалярной неизвестной полевой функцией в матрице  $\mathbf{K}$  размера  $25 \times 25$  ( $n_{nd} = 25$  — общее число узлов модели) в девятой строке будут отличны от нуля только элементы  $K_{91}$ ,  $K_{92}$ ,  $K_{94}$ ,  $K_{98}$  и  $K_{99}$ , а в девятом столбце — только  $K_{19}$ ,  $K_{29}$ ,  $K_{49}$ ,  $K_{89}$  и  $K_{99}$ . Это происходит потому, что произведения самих функций  $N_9(\mathbf{x})$  на  $N_l(\mathbf{x})$  при  $l \neq \{1, 2, 4, 8, 9\}$  и произведения их производных тождественно равны нулю на  $\Omega_h$ . Следовательно, и интегралы от этих произведений, определяющие компоненты матрицы  $\mathbf{K}$ , будут также равны нулю. Аналогичный результат будет здесь справедлив и для матриц  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{M}$ .

Из свойства (2.18) можно установить физический смысл неизвестных в векторе  $\mathbf{A}$ . Записав представление (2.8) для компоненты  $a_{h0i}$  приближенного решения в узле  $\mathbf{x}_l$ , получаем:

$$a_{h0i}(\mathbf{x}_l, t) = \sum_{j=1}^{n_i} N_{aij}(\mathbf{x}_l) A_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{jl} A_{ij}(t) = A_{il}(t). \quad (2.20)$$

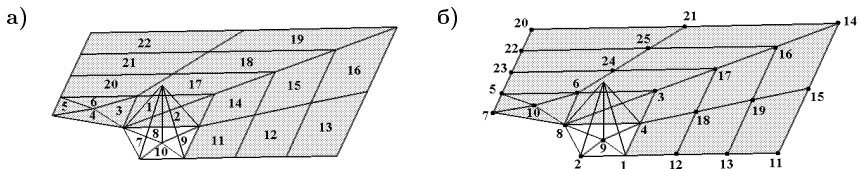


Рис. 2.3. Базисная функция для треугольных элементов без серединных узлов: при нумерации элементов (а) и при нумерации узлов (б)

Здесь учтено, что базисные функции  $N_{aij}(\mathbf{x})$  для различных компонент рассматриваемых задач в МКЭ можно принять одинаковыми, т.е.  $N_{aij}(\mathbf{x}) = N_j(\mathbf{x})$ .

Формула (2.20) показывает, что компонента  $A_{il}$  вектора  $\mathbf{A}$  есть значение неизвестной функции  $a_{h0i}$  (т.е. перемещений  $u_x$ ,  $u_u$ ,  $u_z$ , потенциала  $\varphi$  и т.п.) в узле  $\mathbf{x}_l$ .

Как видно из (2.8), (2.20), полевая функция  $a_{h0i}(\mathbf{x}, t)$  в области  $\Omega_h$  определяется по МКЭ в виде

$$a_{h0i}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_i} N_j(\mathbf{x}) A_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{n_i} N_j(\mathbf{x}) a_{h0i}(\mathbf{x}_j, t). \quad (2.21)$$

Таким образом, функция  $a_{h0i}(\mathbf{x}, t)$  в  $\Omega_h$  будет известной, как только будут вычислены ее значения в узлах конечно-элементной сетки. В связи с этим значения  $A_{ij}(t) = a_{h0i}(\mathbf{x}_j, t)$  называются *узловыми степенями свободы* (степенями свободы в узле  $\mathbf{x}_j$ ).

Отметим, что в МКЭ вектор неизвестных  $\mathbf{A}$  удобно собирать по узловым степеням свободы, и этот подход отличен от способа, описанного в п. 2.1 после (2.8). Именно, образуем *вектор узловых степеней свободы*  $\mathbf{A}_j^{nd} = \{A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{kj}\}$  размера  $k$ ; а из векторов  $\mathbf{A}_j^{nd}$  — *глобальный вектор узловых степеней свободы*  $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_1^{nd}, \mathbf{A}_2^{nd}, \dots, \mathbf{A}_j^{nd}\}$ . Таким образом, с  $j$ -ым номером узла в глобальной нумерации связываются  $k$  степеней свободы с номерами  $\{k(j-1)+1, k(j-1)+2, \dots, k(j-1)+k = kj\}$ .

Поскольку  $\int_{\Omega_h}(\dots) d\Omega = \sum_m \int_{\Omega^{em}}(\dots) d\Omega$ , и для каждого конечного элемента имеется небольшое число  $n^{em}$  узлов и ненулевых базисных функций, то конечно-элементные матрицы  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  и некоторые составляющие вектора  $\mathbf{F}$  можно собирать из элементных матриц  $\mathbf{K}^{em}$ ,  $\mathbf{C}^{em}$ ,  $\mathbf{M}^{em}$  и векторов  $\mathbf{F}_a^{em}$  малых размеров. Такой подход формирования глобальных конечно-элементных объектов из элементных называется *процедурой ансамблирования*.

Рассмотрим элемент  $\Omega^{em}$  с узлами  $\mathbf{x}_{r_s}^{em}$ , где  $r_s = r_s^{em}$  — глобальные номера узлов,  $s = 1, 2, \dots, n^{em}$  — локальные номера. Таким образом, имеется однозначное соответствие между глобальными и локальными номерами узлов:  $f^{em}(\mathbf{x}_{r_s}^{em}) = s$ .

Пусть  $J_L^{em}$  — множество локальных номеров степеней свободы размерности  $n_d^{em} = kn^{em}$ , состоящее из блоков  $\{k(s-1)+1, k(s-1)+2, \dots, k(s-1)+k = ks\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n^{em}$ .

В общей (глобальной) нумерации эти же степени свободы имеют некоторые номера из множества  $J_G^{em}$ , включающего соответствующие блоки  $\{k(r_s^{em}-1)+1, k(r_s^{em}-1)+2, \dots, k(r_s^{em}-1)+k = kr_s^{em}\}$ .



С использованием отображения  $f^{em}(\mathbf{x}_{r_s}^{em}) = s$  можно построить и однозначное отображение  $g^{em}: J_G^{em} \rightarrow J_L^{em}$ , переводящее для элемента  $\Omega^{em}$  глобальный номер  $p$  степени свободы из  $J_G^{em}$  в локальный номер  $i$  из  $J_L^{em}$ :

$$g^{em}(p) = i; \quad p \in J_G^{em}, \quad i \in J_L^{em}; \quad p = r_s. \quad (2.22)$$

Элементные матрицы  $\mathbf{K}^{em}$ ,  $\mathbf{C}^{em}$ ,  $\mathbf{M}^{em}$  размера  $n_d^{em} \times n_d^{em}$  и элементный вектор активных внешних воздействий  $\mathbf{F}_a^{em}$  определяются по формулам, аналогичным тем, по которым находятся компоненты глобальных матриц  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  и вектора  $\mathbf{F}$ . Различие состоит в том, что объемные интегралы теперь вычисляются по области  $\Omega^{em}$ , а поверхностные — по участкам границы  $\Gamma^{em} = \partial\Omega^{em}$ . Кроме того, в вычислениях участвуют только базисные функции  $N_j(\mathbf{x})$  для  $k$  степеней свободы узла элемента  $j = r_s^{em}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n^{em}$ .

Тогда с учетом принятой нумерации глобальных и элементных степеней свободы расширенную элементную матрицу  $\mathbf{K}_G^{em}$  можно определить по формуле:

$$K_{Gpq}^{em} = \begin{cases} K_{ij}^{em}; & i = g^{em}(p), \quad j = g^{em}(q); \quad (p \in J_G^{em}) \wedge (q \in J_G^{em}), \\ 0; & (p \notin J_G^{em}) \vee (q \notin J_G^{em}). \end{cases} \quad (2.23)$$

Аналогично можно задать расширенные матрицы  $\mathbf{C}_G^{em}$ ,  $\mathbf{M}_G^{em}$  и расширенный вектор активных внешних воздействий  $\mathbf{F}_{Ga}^{em}$ .

Несложный анализ показывает, что

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_G^{em}, \quad \mathbf{C} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{C}_G^{em}, \quad \mathbf{M} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{M}_G^{em}, \quad \mathbf{F} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{F}_{Ga}^{em}. \quad (2.24)$$

Формулы (2.24), определяющие процесс ансамблирования, в МКЭ обычно записываются в виде

$$\mathbf{K} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^{em} = \sum_{m=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_G^{em}, \quad (2.25)$$

и, аналогично, для  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{F}$ .

В вычислительной практике расширенные элементные объекты  $\mathbf{K}_G^{em}$ ,  $\mathbf{C}_G^{em}$ ,  $\mathbf{M}_G^{em}$  и  $\mathbf{F}_{Ga}^{em}$  обычно явным образом не строятся. Вместо этого в цикле по номерам элементов реализуется процесс (2.25) формирования глобальных объектов из элементных с учетом расположения компонент элементных матриц и векторов при их суммировании в глобальные объекты по (2.22), (2.23). Данный процесс ансамблирования эффективно реализуется в компьютерных программах для любых типов конечных

элементов, в том числе и для элементов с различным числом степеней свободы с узлах.

В МКЭ в рамках общей стратегии формирования конечно-элементных сеток удобно задавать как приближенные неизвестные функции  $\mathbf{a}_{h0}$ , так и аппроксимации специально подбираемой функции  $\mathbf{a}_{hn}$ , удовлетворяющей неоднородным главным граничным условиям. Действительно, запишем аппроксимацию для (2.4) и вторую формулу из (2.9), пометив дополнительно  $\mathbf{N}_a(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{A}$  нижним индексом «0»:

$$\mathbf{a}_h = \mathbf{a}_{h0} + \mathbf{a}_{hn}, \quad \mathbf{a}_{h0} = \mathbf{N}_{a0}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_0(t). \quad (2.26)$$

Очевидно, что полная конечно-элементная сетка в  $\bar{\Omega}_h$  содержит как узлы для  $\mathbf{a}_{h0}$ , так и узлы для  $\mathbf{a}_{hn}$ , и с использованием однотипных базисных функций для всех узлов можно принять конечно-элементную аппроксимацию для  $\mathbf{a}_{hn}$ :

$$\mathbf{a}_{hn} = \mathbf{N}_{an}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_n(t). \quad (2.27)$$

Тогда

$$\mathbf{a}_h = \mathbf{N}_{a0}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_0(t) + \mathbf{N}_{an}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_n(t) = \tilde{\mathbf{N}}_a^*(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(t), \quad (2.28)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_a^*(\mathbf{x}) = \{\mathbf{N}_{a0}^*(\mathbf{x}), \mathbf{N}_{an}^*(\mathbf{x})\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(t) = \{\mathbf{A}_0(t), \mathbf{A}_n(t)\}. \quad (2.29)$$

Здесь компоненты вектора  $\mathbf{A}_n$  известны из неоднородных главных граничных условий для  $\mathbf{a}_{hn}$  или  $\mathbf{a}_h$ , т. е. можно записать

$$\mathbf{A}_n(t) = \mathbf{A}_\Gamma(t), \quad (2.30)$$

где  $\mathbf{A}_\Gamma(t)$  — известный вектор значений компонент полевых функций  $a_i$  в соответствующих узлах участков с главными граничными условиями.

Проанализировав трансформацию слабых постановок (2.2), (2.3) в (2.5), (2.6), можно заметить следующее. Если формулировать конечно-элементные уравнения движения для всего ансамбля узлов и конечных элементов в  $\bar{\Omega}_h$  без учета главных граничных условий, то будем иметь:

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{0n} \\ \mathbf{M}_{0n}^* & \mathbf{M}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & \mathbf{C}_{0n} \\ \mathbf{C}_{0n}^* & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{0n} \\ \mathbf{K}_{0n}^* & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_n \end{array} \right\}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_n \end{array} \right\}. \quad (2.33)$$

В (2.31)–(2.33) вектор  $\mathbf{A}_0$  является неизвестным, а вектор  $\mathbf{A}_n$  — известен по (2.30). Но из (2.31)–(2.33) и (2.30) легко получить уравнение только для неизвестного вектора  $\mathbf{A}_0$ :

$$\mathbf{M}_{00} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{C}_{00} \cdot \dot{\mathbf{A}}_0 + \mathbf{K}_{00} \cdot \mathbf{A}_0 = \mathbf{F}_0 - \mathbf{M}_{0n} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_\Gamma - \mathbf{C}_{0n} \cdot \dot{\mathbf{A}}_\Gamma - \mathbf{K}_{0n} \cdot \mathbf{A}_\Gamma. \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) с учетом перемены обозначений совпадает с используемым ранее уравнением (2.11) при аппроксимации (2.27) для  $\mathbf{a}_{hm}$ . Некоторое неудобство перехода от (2.31) к (2.34) состоит в изменении порядка и структуры конечно-элементных матриц и векторов (при переходе от  $\tilde{\mathbf{M}}$  к  $\mathbf{M}_{00}$  и т. п.)

Один из вариантов *метода учета главных граничных условий*, сохраняющий порядки глобальных конечно-элементных объектов состоит только в их трансформации, приводящей к следующим разрешающим уравнениям:

$$\tilde{\mathbf{M}}_t \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{C}}_t \cdot \dot{\tilde{\mathbf{A}}} + \tilde{\mathbf{K}}_t \cdot \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{F}}_t, \quad (2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{nn}^d \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_n \end{array} \right\}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_t = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_0 - \mathbf{M}_{0n} \cdot \ddot{\mathbf{A}}_\Gamma - \mathbf{C}_{0n} \cdot \dot{\mathbf{A}}_\Gamma - \mathbf{K}_{0n} \cdot \mathbf{A}_\Gamma \\ \mathbf{K}_{nn}^d \cdot \mathbf{A}_\Gamma \end{array} \right\}, \quad (2.37)$$

где  $\mathbf{K}_{nn}^d$  — диагональный блок, составленный из соответствующих диагональных компонент матрицы  $\mathbf{K}_{nn}$ .

Очевидно, что формулы (2.35)–(2.37) эквиваленты (2.34), (2.30).

Второй способ (2.35)–(2.37) учета главных граничных условий более прост для компьютерной реализации, нежели первый ((2.34), (2.30)), поскольку для него не нужно менять размеры глобальных конечно-элементных объектов.

Итак, можно предложить различные способы учета главных граничных условий, при которых вначале строится конечно-элементная сетка без учета этих граничных условий, формируются общие матрицы МКЭ и основные части вектора правых частей, после чего процедура учета главных граничных условий сводится лишь к преобразованию построенных матриц и векторов. Такие методы позволяют автоматизировать процессы учета главных граничных условий в рамках общих концепций МКЭ.

Завершая описание вычислительных свойств МКЭ отметим, что использование простых базисных функций позволяет достаточно быстро и с высокой степенью точности вычислять элементные матрицы  $\mathbf{K}^{em}$ ,  $\mathbf{C}^{em}$ ,  $\mathbf{M}^{em}$  и векторы  $\mathbf{F}_a^{em}$ , выполняя процедуры численного интегрирования по

элементам  $\Omega^{em}$  и их границам с использованием квадратурных формул невысокого порядка.

Кроме того, получающиеся в результате глобальные матрицы МКЭ будут, как правило, хорошо обусловлены, и числа обусловленности не слишком возрастают при увеличении их порядка. Можно еще заметить, что эти матрицы являются разреженными и во многих задачах симметричными и положительно определенными. Поэтому для решения конечно-элементных задач можно эффективно реализовать мощные современные средства решения систем линейных (и нелинейных) систем алгебраических уравнений, интегрирования по времени задач Коши и решения задач на собственные значения с большими разреженными матрицами.

В следующем разделе приводится сводка базисных функций для основных конечных элементов, используемых в современных вычислительных пакетах.

## 2.3. Базовые конечно-элементные аппроксимации

В данном разделе описываются основные изопараметрические конечные элементы для одномерных, двумерных и трехмерных задач.

Пусть  $\Omega^{em} = \Omega_x^{em}$  — область в  $\mathbf{R}^l$ , занимаемая конечным элементом с номером  $m$ . Здесь  $l = 1$  для одномерных конечных элементов,  $l = 2$  для двумерных элементов и  $l = 3$  — для трехмерных;  $\mathbf{x} = \{x\}$  при  $l = 1$ ,  $\mathbf{x} = \{x, y\}$  при  $l = 2$ ,  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$  при  $l = 3$ .

Обозначим через  $\mathbf{x}_{r_s}^{em} = \mathbf{x}_{r_s}$  — набор узлов элемента с глобальной нумерацией  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Таким образом, общее число узлов у элемента  $\Omega_x^{em}$  равно  $n = n^{em}$ .

Будем считать, что существует параметрическое отображение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^l$  ( $\boldsymbol{\xi} = \{\xi\}$  при  $l = 1$ ,  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta\}$  при  $l = 2$ ,  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta, \zeta\}$  при  $l = 3$ ), переводящее некоторую каноническую область  $\Omega_{\boldsymbol{\xi}}^{em}$  в область  $\Omega_x^{em}$ . Для канонической фигуры имеется набор узлов  $\boldsymbol{\xi}_s$  с локальной нумерацией  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Рассмотрим некоторую приближенную вектор-функцию  $\mathbf{a}_h(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{R}^k$ ,  $\mathbf{a}_h = \{a_{h1}, a_{h2}, \dots, a_{hk}\}$ ,  $a_{hi} = a_{hi}(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Будем считать, что на элементе  $\Omega_x^{em}$  каждую скалярную компоненту  $a_{hi}(\mathbf{x}, t)$  этой функции можно представить в виде

$$a_{hi}(\mathbf{x}, t) = a_{hi}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), t) = a_{hi}(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{s=1}^n N_s(\boldsymbol{\xi}) A_{is}(t), \quad (2.38)$$

где  $N_s = N_s(\boldsymbol{\xi})$  — базисные функции или функции формы конечного элемента;  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Ниже для наглядности рассматривается только какая-то одна приближаемая функция  $a_h$  при фиксированном  $t$ , в силу чего зависимость от времени будем опускать. Таким образом, вместо (2.38) будем использовать упрощенное выражение

$$a_h(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^n N_s(\boldsymbol{\xi}) A_s. \quad (2.39)$$

Предполагается, что параметрическое отображение канонической фигуры  $\Omega_{\boldsymbol{\xi}}^{em}$  на область  $\Omega_x^{em}$  можно представить в форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (2.40)$$

где для одномерных элементов ( $l = 1$ )

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = [N_1(\boldsymbol{\xi}), N_2(\boldsymbol{\xi}), \dots, N_n(\boldsymbol{\xi})], \quad (2.41)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}\}, \quad (2.42)$$

для двумерных элементов ( $l = 2$ )

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, \dots, x_{r_n}, y_{r_n}\}, \quad (2.44)$$

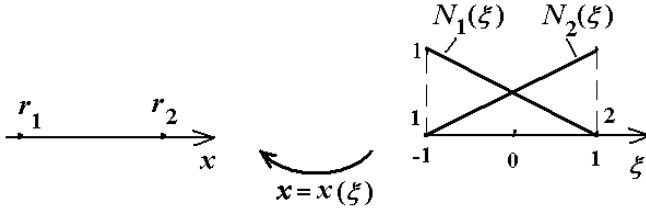
для трехмерных элементов ( $l = 3$ )

$$\mathbf{N}_x^{em*}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, z_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, z_{r_2}, \dots, x_{r_n}, y_{r_n}, z_{r_n}\}. \quad (2.46)$$

Конечные элементы вида (2.39)–(2.46) называются *изопараметрическими*, поскольку в их характеристизации используется параметрическое отображение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$  и наборы базисных функций с общим числом  $n$  одинаковы в аппроксимации (2.39) полевой функции  $a_h$  и в параметрических отображениях (2.40)–(2.46).

Естественно, что важно поведение поля  $a_h$  не от  $\boldsymbol{\xi}$ , а от  $\mathbf{x}$ . Поэтому обычно требуется взаимная однозначность параметрического отображения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$  и существование обратной функции  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ . Тогда из (2.39)–(2.46) будем иметь зависимость  $a_h(\mathbf{x}) = a_h(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$ . Здесь следует



**Рис. 2.4.** 1D элемент с двумя узлами: исходный отрезок (слева); канонический отрезок и базисные функции (справа)

отметить, что даже для простых базисных функций  $N_s(\xi)$  обратное к (2.40) отображение может иметь достаточно громоздкий вид. Однако, несмотря на, возможно, сложное поведение поля  $a_h(\mathbf{x})$  на  $\Omega_x^{em}$ , эта функция обычно обладает хорошими аппроксимационными свойствами.

Базисные функции основных конечных элементов в совокупности содержат полные полиномы первой или второй степени от каждой пространственной переменной.

### Линейный конечный элемент в виде отрезка с двумя узлами

В этом одномерном элементе, показанном на рис. 2.4,  $n = n^{em} = 2$ ;  $\Omega_x^{em} = [x_{r_1}, x_{r_2}]$ ;  $x_{r_1} < x_{r_2}$ ;  $\Omega_\xi^{em} = [-1, 1]$ ;  $\xi_1 = -1$ ;  $\xi_2 = 1$ .

Базисные функции определяются формулами

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad (2.47)$$

или в единой записи

$$N_s(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_s \xi), \quad s = 1, 2. \quad (2.48)$$

Элемент обеспечивает линейное представление функции  $a_h$  как в зависимости от  $\xi$ , так и от  $x$ . (Последнее справедливо в силу линейности обратного отображения  $\xi = \xi(x)$  при линейной зависимости  $x = x(\xi)$ .)

### Квадратичный конечный элемент в виде отрезка с тремя узлами

Для данного одномерного элемента (рис. 2.5)  $n = n^{em} = 3$ ;  $\Omega_x^{em} = [x_{r_1}, x_{r_3}] = [x_{r_1}, x_{r_2}] \cup [x_{r_2}, x_{r_3}]$ ;  $x_{r_1} < x_{r_2} < x_{r_3}$ ;  $\Omega_\xi^{em} = [-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1]$ ;  $\xi_1 = -1$ ;  $\xi_2 = 0$ ;  $\xi_3 = 1$ .

Базисные функции здесь квадратичные

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = 1 - \xi^2, \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi), \quad (2.49)$$

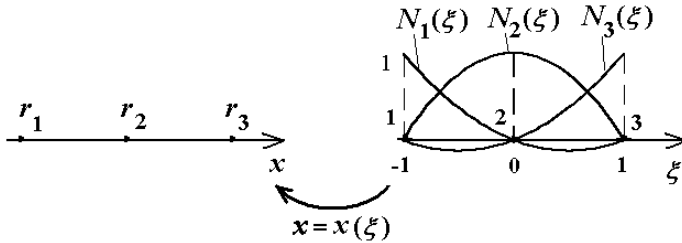


Рис. 2.5. 1D элемент с тремя узлами: исходный отрезок (слева); канонический отрезок и базисные функции (справа)

или в единой записи

$$N_s(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi_s^2 - 2)[\xi_s^2(1 + \xi_s\xi) - (1 - \xi^2)], \quad s = 1, 2, 3. \quad (2.50)$$

Для обеспечения взаимной однозначности отображения  $x = x(\xi)$  внутренний узел  $x_{r_2}$  должен отстоять от крайних узлов  $x_{r_1}$  и  $x_{r_3}$  на расстоянии, большем чем  $h_m/4$ , где  $h_m = x_{r_3} - x_{r_1}$  — длина отрезка.

В общей ситуации поведение  $a_h$  от  $x$  дается сложным трансцендентным выражением. Однако, если внутренний узел находится в середине отрезка, т.е.  $x_{r_2} = (x_{r_1} + x_{r_3})/2$ , то квадратичное параметрическое отображение  $x = x(\xi)$  вырождается в линейное. В этом случае элемент дает квадратичное представление функции  $a_h$  как по  $\xi$ , так и по  $x$ . Поэтому почти всегда узел  $x_{r_2}$  выбирается на середине отрезка.

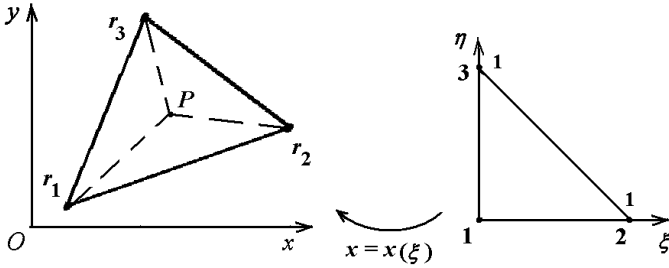
### Треугольный конечный элемент с тремя узлами

Фигура  $\Omega_x^{em}$  на плоскости  $Oxy$  имеет форму треугольника с узлами  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, 3$ , расположенными в порядке обхода против часовой стрелки (рис. 2.6). Каноническая фигура  $\Omega_\xi^{em}$  на плоскости  $O\xi\eta$  ( $\xi = \{\xi, \eta\}$ ) является прямоугольным треугольником с катетами, равными 1. Здесь  $n = 3$ ;  $\xi_1 = \{0, 0\}$ ;  $\xi_2 = \{1, 0\}$ ;  $\xi_3 = \{0, 1\}$ .

Для построения функций формы используются треугольные координаты или координаты площади

$$L_{r_1}(P) = \frac{S_{\Delta(Pr_2r_3)}}{S_{\Delta(r_1r_2r_3)}}, \quad L_{r_2}(P) = \frac{S_{\Delta(Pr_3r_1)}}{S_{\Delta(r_1r_2r_3)}}, \quad L_{r_3}(P) = \frac{S_{\Delta(Pr_1r_2)}}{S_{\Delta(r_1r_2r_3)}}, \quad (2.51)$$

где  $P = P(\mathbf{x}) = P(x, y)$  — точка внутри треугольника,  $S_{\Delta(Pr_i r_j)}$  — площадь треугольника с вершинами  $P(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}_{r_i}$ ,  $\mathbf{x}_{r_j}$ .



**Рис. 2.6.** Треугольный элемент с тремя узлами: исходный треугольник (слева) и канонический треугольник (справа)

При порядке обхода вершин против часовой стрелки для вычисления площади можно использовать формулу

$$S_{\Delta(Pr_1r_2)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_i & x_j \\ y & y_i & y_j \end{vmatrix}. \quad (2.52)$$

Для канонической фигуры  $\Omega_{\xi}^{em}$  треугольные координаты  $L(\boldsymbol{\xi}) = L(\xi, \eta)$  имеют очень простой вид:

$$L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad L_2(\xi, \eta) = \xi, \quad L_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (2.53)$$

Эти функции и могут использоваться как базисные, т.е. для треугольного элемента с тремя узлами имеем:

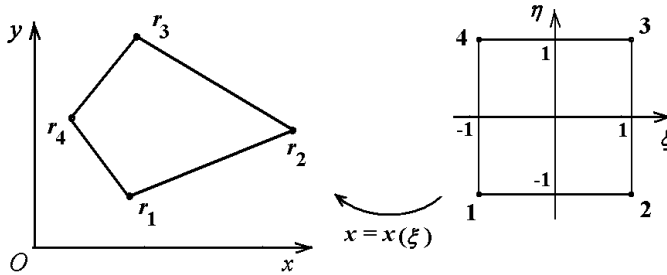
$$N_s(\xi, \eta) = L_s(\xi, \eta), \quad s = 1, 2, 3. \quad (2.54)$$

Элемент имеет линейное поведение поля  $a_h$  как по  $\boldsymbol{\xi}$ , так и по  $\mathbf{x}$ , а треугольные координаты  $L_{r_s}(P)$  могут быть приняты как базисные функции от  $\mathbf{x}$ , т.е.  $L_{r_s}(P) = N_s(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$ . Из (2.52) видно, что определяемые по (2.51) функции  $L_{r_s}(P)$  линейны по  $x$  и  $y$ . Графики этих функций были представлены ранее на рис. 2.3, если рассматривать один из элементов.

### Четырехугольный конечный элемент с четырьмя узлами

Рассмотрим четырехугольник  $\Omega_x^{em}$  на плоскости  $Oxy$  с узлами, находящимися в его вершинах  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ , расположенными в порядке обхода против часовой стрелки (рис. 2.7). Каноническая фигура  $\Omega_{\xi}^{em}$  на плоскости  $O\xi\eta$  ( $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta\}$ ) является квадратом с центром в точке  $\{0, 0\}$  и со сторонами, равными 2. Здесь  $n = 4$ ;  $\boldsymbol{\xi}_1 = \{-1, -1\}$ ;  $\boldsymbol{\xi}_2 = \{1, -1\}$ ;  $\boldsymbol{\xi}_3 = \{1, 1\}$ ;  $\boldsymbol{\xi}_4 = \{-1, 1\}$ .





**Рис. 2.7.** Четырехугольный элемент с четырьмя узлами: исходный четырехугольник (слева) и канонический четырехугольник (справа)

Функции формы являются произведениями соответствующих базисных функций (2.47) одномерного линейного элемента, зависящих от  $\xi$  или от  $\eta$

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4, \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4, \end{aligned} \quad (2.55)$$

или в единой записи

$$N_s(\xi) = (1 + \xi_s \xi)(1 + \eta_s \eta)/4, \quad s = 1, 2, 3, 4. \quad (2.56)$$

Как видно из (2.55), базисные функции являются линейными по  $\xi$  и  $\eta$ , т.е. билинейными. Поэтому элемент называется также *билинейным четырехугольным конечным элементом с четырьмя узлами*.

Для обеспечения взаимной однозначности отображения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$  требуется [22], чтобы четырехугольник был выпуклым, т.е. чтобы все его внутренние углы при вершинах были меньше  $\pi$ .

Поведение поля  $a_h$  от  $\mathbf{x}$  здесь достаточно сложное, но на каждой стороне оно линейное. По этой причине соприкосновение двух билинейных четырехугольных конечных элементов по общей стороне с единими узлами обеспечивает непрерывность поля  $a_h(\mathbf{x})$ . Этот элемент также может контактировать по общей стороне с треугольным конечным элементом с тремя узлами. При этом также обеспечивается непрерывность поля  $a_h(\mathbf{x})$  при переходе от билинейного четырехугольника к линейному треугольнику.

Данный элемент имеет простейшую фигуру, для которой можно продемонстрировать важность изопараметрического подхода. Как известно, для четырехугольников с четырьмя узлами и со сторонами, не параллельными координатным осям  $x$  и  $y$ , нельзя построить полиномиальные представления  $a_h(\mathbf{x}) = a_h(x, y)$ , обеспечивающие их непрерывность при переходе от

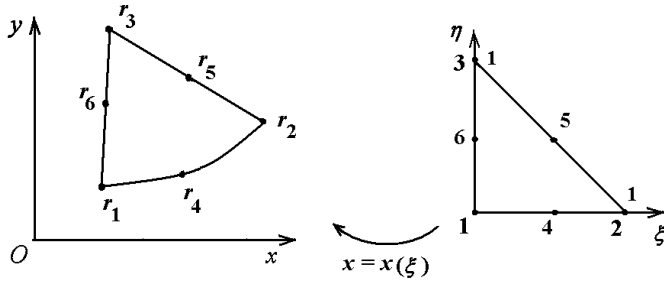


Рис. 2.8. Треугольный элемент с шестью узлами: исходный треугольник (слева) и канонический треугольник (справа)

одного четырехугольника к другому. Эта непрерывность гарантируется именно при зависимостях (2.39)–(2.46) с изопараметрическими отображениями.

Для использования более точных квадратичных аппроксимаций, как и в одномерном случае, надо рассматривать элементы с узлами на сторонах и квадратичные базисные функции.

### Треугольный конечный элемент с шестью узлами

Здесь треугольник  $\Omega_x^{em}$  на плоскости  $Oxy$  имеет три узла в вершинах  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, 3$ , а также еще три узла  $\mathbf{x}_{r_s}$  ( $s = 4, 5, 6$ ) на сторонах (рис. 2.8). Стороны обычно являются прямолинейными с узлами  $\mathbf{x}_{r_s}$  ( $s = 4, 5, 6$ ) на серединах сторон. Однако, в ряде случаев, как, например, при криволинейных границах, сторона может описываться квадратичной параметрической зависимостью, определяемой сдвинутым серединным узлом (рис. 2.8).

Канонический треугольник  $\Omega_\xi^{em}$  такой же, как и в случае линейного треугольника, но с дополнительными узлами  $\xi_4 = \{1/2, 0\}$ ;  $\xi_2 = \{1/2, 1/2\}$ ;  $\xi_3 = \{0, 1/2\}$ .

Базисные функции для рассматриваемого элемента даются формулами

$$\begin{aligned} N_s &= (2L_s - 1)L_s, \quad s = 1, 2, 3, \\ N_4 &= 4L_1L_2, \quad N_5 = 4L_2L_3, \quad N_6 = 4L_1L_3. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Элемент обеспечивает полную квадратичную аппроксимацию  $a_h(\xi)$  по  $\xi$  и  $\eta$ . Если же стороны треугольника прямолинейны, и узлы  $\mathbf{x}_{r_s}$  при  $s = 4, 5, 6$  находятся на серединах сторон, параметрическое отображение становится линейным, и поэтому получается квадратичная аппроксимация поля  $a_h(\xi(\mathbf{x}))$  и от  $x, y$ . Элемент обычно используется именно в таком виде.

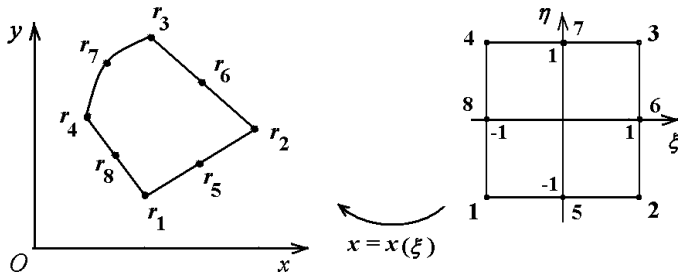


Рис. 2.9. Четырехугольный элемент с восемью узлами: исходный четырехугольник (слева) и канонический четырехугольник (справа)

На сторонах треугольника выполняется аппроксимация (2.39), (2.40), (2.43), (2.44) с (2.57), определяемая положением узлов на стороне и значением степеней свободы в этих узлах. Для прямолинейной стороны с узлом по середине, естественно, имеем квадратичное поведение по  $\mathbf{x}$  для  $a_h$ .

### Четырехугольный конечный элемент с восемью узлами

Этот знаменитый элемент был предложен А. Эргатоудисом, Б. Иронсом и О. Зенкевичем и назван элементом *серендипова типа* [6, 7]. Такие элементы не имеют узлов внутри области  $\Omega_x^m$ , но дают требуемые представления полевых функций в виде полиномов нужной степени (в рамках изопараметрического подхода). Заметим, что треугольный конечный элемент с шестью узлами по этой терминологии также является элементом серендипова типа.

Рассматриваемый элемент имеет форму четырехугольника  $\Omega_x^m$  на плоскости  $Oxy$  с четырьмя узлами в вершинах  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ . Еще четыре узла  $\mathbf{x}_{r_s}$  ( $s = 5, 6, 7, 8$ ) располагаются на сторонах четырехугольника (рис. 2.9). Относительно формы сторон здесь справедливы те же замечания, что и для треугольника с шестью узлами. Канонический четырехугольник  $\Omega_\xi^m$  тот же квадрат, что и для четырехугольного конечного элемента с четырьмя узлами ( $\xi_1 = \{-1, -1\}$ ;  $\xi_2 = \{1, -1\}$ ;  $\xi_3 = \{1, 1\}$ ;  $\xi_4 = \{-1, 1\}$ ), но с дополнительными узлами  $\xi_5 = \{0, -1\}$ ;  $\xi_6 = \{1, 0\}$ ;  $\xi_7 = \{0, 1\}$ ;  $\xi_8 = \{-1, 0\}$ .

Базисные функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
 N_5(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2, & N_6(\xi, \eta) &= (1 - \eta^2)(1 + \xi)/2, \\
 N_7(\xi, \eta) &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2, & N_8(\xi, \eta) &= (1 - \eta^2)(1 - \xi)/2, \\
 N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 - (1/2)N_5(\xi, \eta) - (1/2)N_8(\xi, \eta), \\
 N_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 - (1/2)N_5(\xi, \eta) - (1/2)N_6(\xi, \eta), \\
 N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 - (1/2)N_6(\xi, \eta) - (1/2)N_7(\xi, \eta), \\
 N_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 - (1/2)N_7(\xi, \eta) - (1/2)N_8(\xi, \eta).
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Или в единой форме

$$\begin{aligned}
 N_s(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(3\xi_s^2\eta_s^2 - 2)[\xi_s^2\eta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta) - \\
 &\quad - \eta_s^2(1 - \xi^2)(1 + \eta_s\eta) - \xi_s^2(1 - \eta^2)(1 + \xi_s\xi)],
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

где  $s = 1, 2, \dots, 8$ , и узлы  $\xi_s = \{\xi_s, \eta_s\}$  были определены ранее.

Элемент обеспечивает квадратичное поведение поля  $a_h$  по  $\xi$  и  $\eta$  на каноническом квадрате. В исходном четырехугольнике поле  $a_h(\mathbf{x})$  ведет себя сложным образом. Но на каждой стороне изменение поля  $a_h$  такое же, как и для треугольного элемента с шестью узлами. Поэтому четырехугольный элемент с восемью узлами согласуется по общей стороне с общими узлами с себе подобным и с треугольным шестиузловым элементом.

Многие *трехмерные конечные элементы* могут быть построены по аналогии с двумерными. По этой причине в этих случаях приведем только основные формулы элементов. Описание начнем с элементов без промежуточных «серединных» узлов.

### Тетраэдр с четырьмя узлами (Рис. 2.10, слева)

Узлы (вершины) в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$ .

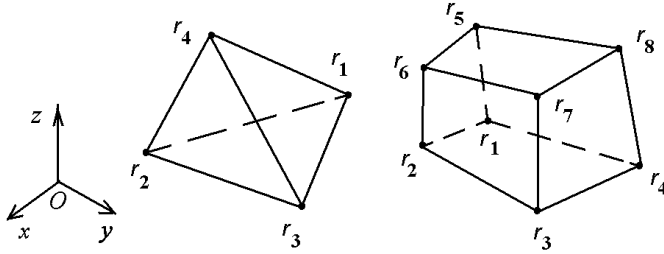
Узлы (вершины) канонического тетраэдра  $\Omega_\xi^{em}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$ :  $\xi_1 = \{0, 0, 0\}$ ,  $\xi_2 = \{1, 0, 0\}$ ,  $\xi_3 = \{0, 1, 0\}$ ,  $\xi_4 = \{0, 0, 1\}$ .

Тетраэдральные координаты для канонического тетраэдра:

$$L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad L_2 = \xi, \quad L_3 = \eta, \quad L_4 = \zeta. \tag{2.60}$$

Базисные функции ( $L_s$  — тетраэдральные координаты):

$$N_s(\xi, \eta) = L_s(\xi, \eta), \quad s = 1, 2, 3, 4. \tag{2.61}$$



**Рис. 2.10.** Тетраэдр и гексаэдр без «серединных» узлов: тетраэдр с четырьмя узлами (слева); гексаэдр с восемью узлами (справа)

### Гексаэдр («кирпичик») с восемью узлами (Рис. 2.10, справа)

Узлы (вершины) в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 8$ .

Узлы (вершины) канонического гексаэдра  $\Omega_\xi^{em}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1, -1\}, \\ \xi_3 &= \{1, 1, -1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1, -1\}, \\ \xi_5 &= \{-1, -1, 1\}, & \xi_6 &= \{1, -1, 1\}, \\ \xi_7 &= \{1, 1, 1\}, & \xi_8 &= \{-1, 1, 1\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Базисные функции:

$$N_s(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta)(1 + \zeta_s\zeta), \quad s = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.63)$$

### Прямая треугольная призма с шестью узлами (Рис. 2.11, слева)

Узлы (вершины) в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 6$ .

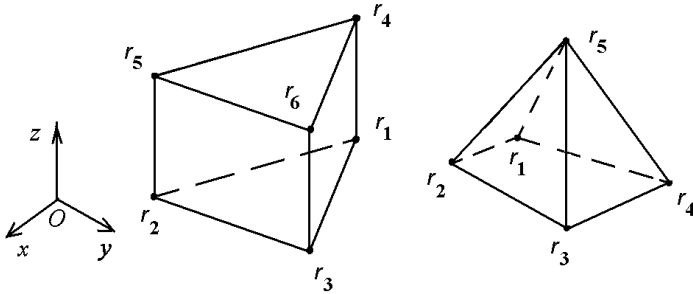
Узлы (вершины) канонической призмы  $\Omega_\xi^{em}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{0, 0, -1\}, & \xi_2 &= \{1, 0, -1\}, & \xi_3 &= \{0, 1, -1\}, \\ \xi_4 &= \{0, 0, 1\}, & \xi_5 &= \{1, 0, 1\}, & \xi_6 &= \{0, 1, 1\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Базисные функции:

$$N_s = L_s(1 - \zeta)/2, \quad N_{s+3} = L_s(1 + \zeta)/2, \quad s = 1, 2, 3, \quad (2.65)$$

где  $L_s$  — координаты площади (2.51) для треугольника ( $L_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ ,  $L_2(\xi, \eta) = \xi$ ,  $L_3(\xi, \eta) = \eta$ ).



**Рис. 2.11.** Призма и пирамида без «серединных» узлов: призма с шестью узлами (слева); пирамида с пятью узлами (справа)

Призматический элемент применяется при моделировании трехмерных задач для тел обобщенной цилиндрической формы. Для таких задач хорошие трехмерные сетки могут быть построены трансляцией соответствующих плоских сеток вдоль оси  $z$  (или криволинейной аналогичной оси). Тогда призматические элементы получаются при трансляции плоских треугольных элементов вдоль этой оси. Как видно из (2.65), базисные функции для шестиузловой призмы определяются в результате умножения соответствующих базисных функций линейного треугольного элемента на линейные функции по  $\zeta$ .

#### Четырехугольная пирамида с пятью узлами (Рис. 2.11, справа)

Узлы (вершины) в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 5$ .

$\Omega_\xi^{em}$  — канонический куб в пространстве  $\xi\eta\zeta$ , на верхней грани которого выбирается лишь один узел (вершина):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1, -1\}, \\ \xi_3 &= \{1, 1, -1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1, -1\}, & \xi_5 &= \{0, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Базисные функции:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8, & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta)/8, \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8, & N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)/8, \\ N_5 &= (1 + \zeta)/2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Элемент в форме пирамиды отличается тем, что для него при параметрическом отображении  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$  канонический куб  $\Omega_\xi^{em}$  переводится в четырехугольную пирамиду  $\Omega_x^{em}$ . Это отображение,

естественно, не является взаимно однозначным, поскольку все точки грани куба  $\zeta = 1$  переходят в одну вершину  $\mathbf{x}_{r_5}$ . Тем не менее, отмеченная особенность параметрического отображения в одной точке не мешает использованию этого элемента на практике. Призматический элемент необходим для перехода от тетраэдральных сеток к гексаэральным, и наоборот.

Относительно сеток из описанных выше тетраэдров, гесаэдров, призм и пирамид справедливо следующее замечание. Все эти элементы могут быть состыкованы между собой с сохранением непрерывности полевой функции  $a_h(\mathbf{x})$  при переходе от одного элемента к другому. Необходимо только, чтобы элементы имели общие грани и общие единые узлы на стыковочных гранях.

Для использования более точных квадратичных базисных функций применяются трехмерные конечные элементы с дополнительными узлами на сторонах.

### Тетраэдр с десятью узлами (Рис. 2.12, слева)

Узлы в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 10$ .

Узлы канонического тетраэдра  $\Omega_\zeta^{em}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$ :  $\xi_1 = \{0, 0, 0\}$ ,  $\xi_2 = \{1, 0, 0\}$ ,  $\xi_3 = \{0, 1, 0\}$ ,  $\xi_4 = \{0, 0, 1\}$ ,  $\xi_5 = \{1/2, 0, 0\}$ ,  $\xi_6 = \{1/2, 1/2, 0\}$ ,  $\xi_7 = \{0, 1/2, 0\}$ ,  $\xi_8 = \{0, 0, 1/2\}$ ,  $\xi_9 = \{1/2, 0, 1/2\}$ ,  $\xi_{10} = \{0, 1/2, 1/2\}$ .

Базисные функции ( $L_s$  — тетраэдральные координаты из (2.60)):

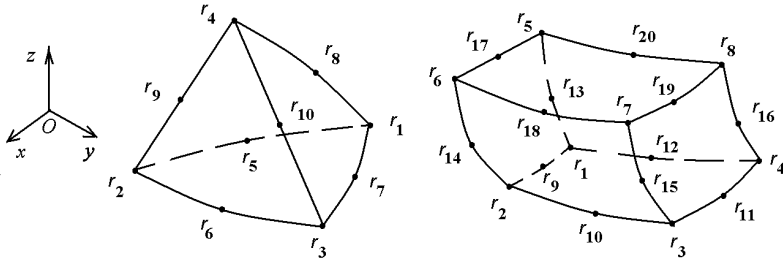
$$\begin{aligned} N_s &= (2L_s - 1)L_s, \quad s = 1, 2, 3, 4; \\ N_5 &= 4L_1L_2, \quad N_6 = 4L_2L_3, \quad N_7 = 4L_1L_3, \quad . \\ N_8 &= 4L_1L_4, \quad N_9 = 4L_2L_4, \quad N_{10} = 4L_3L_4. \end{aligned} \quad (2.68)$$

### Гексаэдр («кирпичик») с двадцатью узлами (Рис. 2.12, справа)

Узлы в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 20$ .

Узлы канонического гексаэдра  $\Omega_\zeta^{em}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$ : (2.62) — для  $s = 1, 2, \dots, 8$ , и

$$\begin{aligned} \xi_9 &= \{0, -1, -1\}, \quad \xi_{10} = \{1, 0, -1\}, \quad \xi_{11} = \{0, 1, -1\}, \\ \xi_{12} &= \{-1, 0, -1\}, \quad \xi_{13} = \{-1, -1, 0\}, \quad \xi_{14} = \{1, -1, 0\}, \\ \xi_{15} &= \{1, 1, 0\}, \quad \xi_{16} = \{1, -1, 0\}, \quad \xi_{17} = \{0, -1, 1\}, \\ \xi_{18} &= \{1, 0, 1\}, \quad \xi_{19} = \{0, 1, 1\}, \quad \xi_{20} = \{-1, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.69)$$



**Рис. 2.12.** Тетраэдр и гексаэдр с «сердчинными» узлами: тетраэдр с десятью узлами (слева); гексаэдр с двадцатью узлами (справа)

Базисные функции:

$$N_s(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(3\xi_s^2\eta_s^2\zeta_s^2 - 2)[\xi_s^2\eta_s^2\zeta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta)(1 + \zeta_s\zeta) - \xi_s^2\eta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \eta_s\eta)(1 - \zeta^2) - \eta_s^2\zeta_s^2(1 + \eta_s\eta)(1 + \zeta_s\zeta)(1 - \xi^2) - \xi_s^2\zeta_s^2(1 + \xi_s\xi)(1 + \zeta_s\zeta)(1 - \eta^2)], \quad (2.70)$$

где  $s = 1, 2, \dots, 20$ .

**Прямая треугольная призма с пятнадцатью узлами** (Рис. 2.13, слева)

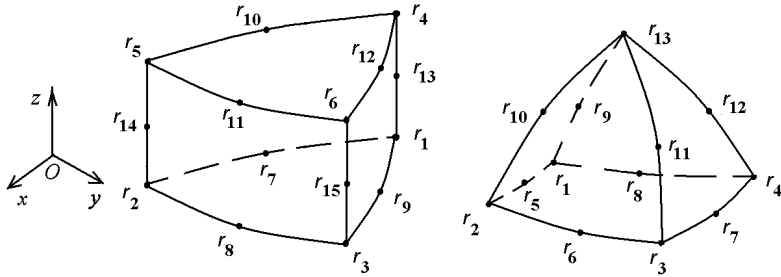
Узлы в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 15$ .

По аналогии с призмой с 5 узлами (см, (2.64), (2.65)) узлы канонической пятнадцатизуловой призмы  $\Omega_\xi^{em}$  в пространстве  $\xi\eta\zeta$  и базисные функции легко получаются в результате трансляции шестиузлового треугольного элемента вдоль оси  $\zeta$  от  $-1$  до  $1$  и умножения его базисных функций на базисные функции одномерного по оси  $\zeta$  квадратичного элемента.

**Четырехугольная пирамида с тринадцатью узлами** (Рис. 2.13, справа)

Узлы в физическом пространстве:  $\mathbf{x}_{r_s} = \{x_{r_s}, y_{r_s}, z_{r_s}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 13$ .





**Рис. 2.13.** Призма и пирамида с «серединными» узлами: призма с пятнадцатью узлами (слева); пирамида с тринадцатью узлами (справа)

$\Omega_{\xi}^{em}$  — канонический куб в пространстве  $\xi\eta\zeta$ , на верхней грани которого выбирается лишь один узел (вершина):

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \{-1, -1, -1\}, & \xi_2 &= \{1, -1, -1\}, \\
 \xi_3 &= \{1, 1, -1\}, & \xi_4 &= \{-1, 1, -1\}, \\
 \xi_5 &= \{0, -1, -1\}, & \xi_6 &= \{1, 0, -1\}, \\
 \xi_7 &= \{0, 1, -1\}, & \xi_8 &= \{-1, 0, -1\}, \\
 \xi_9 &= \{-1, -1, 0\}, & \xi_{10} &= \{1, -1, 0\}, \\
 \xi_{11} &= \{1, 1, 0\}, & \xi_{12} &= \{-1, 1, 0\}, \\
 \xi_{13} &= \{0, 0, 1\}.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Базисные функции:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - q\xi - q\eta)q/4, \\
 N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + q\xi - q\eta)q/4, \\
 N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + q\xi + q\eta)q/4, \\
 N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - q\xi + q\eta)q/4, \\
 N_5 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)q^2/2, & N_6 &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)q^2/2, \\
 N_7 &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)q^2/2, & N_8 &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)q^2/2, \\
 N_9 &= (1 - \xi)(1 - \eta)q(1 - q), & N_{10} &= (1 + \xi)(1 - \eta)q(1 - q), \\
 N_{11} &= (1 + \xi)(1 + \eta)q(1 - q), & N_{12} &= (1 - \xi)(1 + \eta)q(1 - q), \\
 N_{13} &= (1 - q)(1 - 2q), & q &= (1 - \zeta)/2.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Относительно параметрического отображения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$  здесь справедливы те же замечания, что и для пирамиды с пятью узлами. Призматический элемент с тринадцатью узлами требуется для перехода от тетраэдральных сеток к гексаэральным для элементов с «серединными» узлами.

Для всех элементов с «серединными» узлами (тетраэдров, гексаэдров, призм и пирамид) обеспечивается непрерывность полевой функции  $a_h(\mathbf{x})$

при переходе от одного элемента к другому. Для этого элементы должны иметь общие грани и общие единые узлы на стыковочных гранях (как в вершинах, так и на сторонах).

Нужно отметить, что как двумерные, так и трехмерные элементы с «серединными» узлами не могут стыковаться с соответствующими элементами без «серединных» узлов без потери гарантии непрерывности полевой функции  $a_h(\mathbf{x})$ . Чтобы перейти от элемента с «серединными» узлами к элементу без «серединных» узлов нужно модифицировать элемент с «серединными» узлами, удалив узлы на сторонах стыковочной поверхности (для 2D элементов) или на грани (для 3D элементов). Для этого значения степеней свободы в «серединных» узлах должны быть заданы как средние арифметические значений степеней свободы в узлах, расположенных в вершинах соответствующих сторон.

В заключение раздела сформулируем некоторые общие свойства рассмотренных выше конечных элементов и их базисных функций.

Для всех базисных функций  $\Omega_\xi^{em}$  выполнено условие (2.18), т.е. все базисные функции равны единице в своем узле, и нулю — во всех остальных узлах элемента.

Для всех рассмотренных конечных элементов выполнено условие полноты (2.19), т.е. сумма всех функций формы элемента равна 1. Отметим, что условие полноты (2.19) для изопараметрических элементов (2.39)–(2.46) гарантирует, что произвольная линейная по  $\mathbf{x}$  функция на  $\Omega_x^{em}$  может быть по (2.39)–(2.46) представлена точно.

## Задачи к главе 2

**2.1.** На рис. 2.1, б приведен пример смешанной сетки из треугольных и четырехугольных элементов с узлами только в вершинах элементов. Сколько ненулевых элементов будет в построенной для одной скалярной полевой функции матрице  $\mathbf{K}$  размера  $25 \times 25$  в строке с номером 17 ?

**2.2.** На рис. 2.2, б приведен пример смешанной сетки из треугольных и четырехугольных элементов с узлами, расположенными как в вершинах элементов, так и на серединах их сторон. Сколько ненулевых элементов будет в построенной для одной скалярной полевой функции матрице  $\mathbf{K}$  размера  $71 \times 71$  в строке с номером 29 ?

**2.3.** Ответьте на тот же вопрос, что и в задаче 2.2, но относительно строки матрицы  $\mathbf{K}$  с номером 18.

**2.4.** Ответьте на тот же вопрос, что и в задаче 2.2, но относительно столбца матрицы  $\mathbf{M}$  с номером 69.

**2.5.** Ответьте на тот же вопрос, что и в задаче 2.2, но относительно столбца матрицы  $\mathbf{M}$  с номером 68.

**2.6.** Покажите, что треугольные координаты  $L(\xi)$  на каноническом треугольнике  $\Omega_\xi^{em}$  действительно имеют вид (2.53), т. е. вычислите их по формулам (2.51), (2.52) для канонического прямоугольного треугольника с катетами, равными 1.

**2.7.** Покажите, что поведение полевой функции  $a_h$  на четырехугольнике с 4 узлами линейно на любой стороне как по  $\xi$ , так и по  $x$ . Какими из значений  $A_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) из (2.39) определяется это поведение?

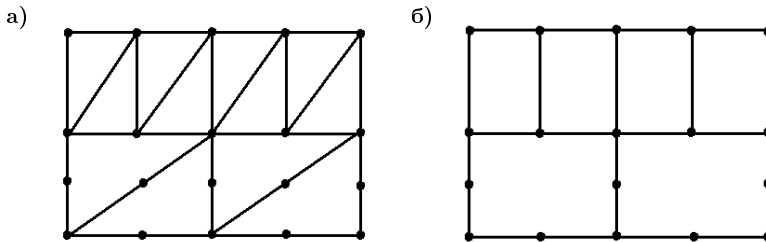
**2.8.** Покажите, что поведение полевой функции  $a_h$  на треугольнике с 6 узлами на стороне определяется изопараметрической квадратичной зависимостью. Также покажите, что если сторона линейна, а узел на стороне находится в ее середине, то это поведение квадратично по  $x$ .

**2.9.** Покажите, что поведение полевой функции  $a_h$  на серединном четырехугольнике с восемью узлами на стороне определяется изопараметрической квадратичной зависимостью. Также покажите, что если сторона линейна, а узел на стороне находится в ее середине, то это поведение квадратично по  $x$ .

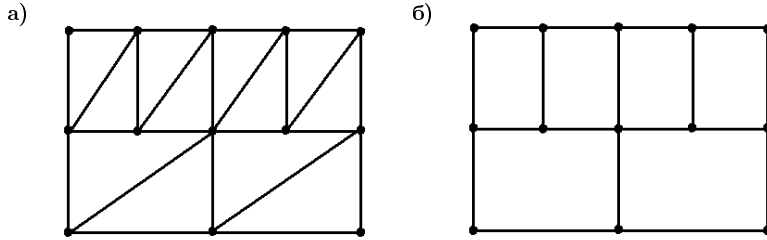
**2.10.** Постройте изопараметрический треугольный конечный элемент с пятью узлами (три узла — в вершинах канонического треугольника, два — промежуточные на двух катетах), проведя редукцию узла 5 на гипотенузе (Рис. 2.8). Для этого положите в представлении полевой функции  $A_5 = (A_2 + A_3)/2$ , а в параметрическом отображении —  $\{x_5 = (x_2 + x_3)/2, y_5 = (y_2 + y_3)/2\}$ . Получите вместо (2.57) новые базисные функции, и покажите, что полученный элемент будет обеспечивать линейное поведение полевой функции  $a_h$  на стороне с редуцированным промежуточным узлом.

**2.11.** Постройте изопараметрический треугольный конечный элемент с пятью узлами (три узла — в вершинах канонического треугольника, один промежуточный узел — на катете  $\xi = 0$ , а другой — на гипотенузе), проведя редукцию узла 4 на катете  $\eta = 0$  (Рис. 2.8). Для этого положите в представлении полевой функции  $A_4 = (A_1 + A_2)/2$ , а в параметрическом отображении —  $\{x_4 = (x_1 + x_2)/2, y_4 = (y_1 + y_2)/2\}$ . Получите вместо (2.57) новые базисные функции, и покажите, что полученный элемент будет обеспечивать линейное поведение полевой функции  $a_h$  на стороне с редуцированным промежуточным узлом.

**2.12.** Покажите, что если для изопараметрического треугольного элемента с шестью узлами провести редукцию всех трех узлов на серединах сторон по методологии задач 2.10, 2.11, то получится линейный треугольный конечный элемент с тремя узлами.



**Рис. 2.14.** Сетки из элементов без «серединных» узлов и с «серединными» узлами: треугольная сетка (а) и четырехугольная сетка (б)



**Рис. 2.15.** Сетки из элементов без «серединных» узлов: треугольная сетка (а) и четырехугольная сетка (б)

**2.13.** Постройте изопараметрический четырехугольный конечный элемент с семью узлами, проведя в восьмиузловом четырехугольном элементе редукцию промежуточного узла на одной стороне по методологии задач 2.10, 2.11. Получите вместо (2.58) новые базисные функции, и покажите, что полученный элемент будет обеспечивать линейное поведение полевой функции  $a_h$  на стороне с редуцированным промежуточным узлом.

**2.14.** Покажите, что если для изопараметрического четырехугольного элемента с восемью узлами провести редукцию всех четырех узлов на серединах сторон по методологии задач 2.10, 2.11, то получится билинейный четырехугольный конечный элемент с четырьмя узлами.

**2.15.** Покажите, что конечный элемент в форме прямой треугольной призмы с шестью узлами совместим по боковым четырехугольным граням с подобными элементами и с восьмиузловыми гексаэдрами.

**2.16.** Покажите, что конечный элемент в форме прямой треугольной призмы с шестью узлами совместим по торцевым треугольным граням с подобными элементами и с четырехузловыми тетраэдрами.

**2.17.** Выпишите функции формы показанной на рис. 2.13 (слева) прямой треугольной призмы с пятнадцатью узлами.

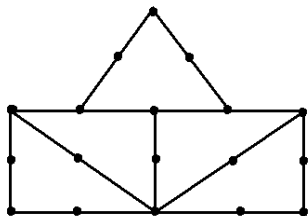
**2.18.** Обеспечивают ли непрерывность полевой функции сетки из линейных треугольных конечных элементов, показанные на рис. 2.15, а, когда некоторые из узловых вершин меньших треугольных элементов лежат на сторонах других больших элементов, но не являются их узлами? Ответ обоснуйте.

**2.19.** Обеспечивают ли непрерывность полевой функции сетки из билинейных четырехугольных конечных элементов, показанные на рис. 2.15, б, когда некоторые из узловых вершин меньших четырехугольных элементов лежат на сторонах других больших элементов, но не являются их узлами? Ответ обоснуйте.

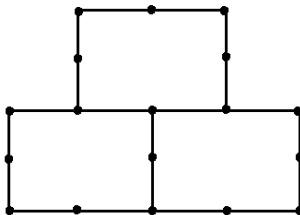
**2.20.** Обеспечивают ли непрерывность полевой функции сетки из шестиузловых треугольных конечных элементов, показанные на рис. 2.16, а, когда узловые вершины одних конечных элементов совпадают с серединными узлами других элементов? Ответ обоснуйте.

**2.21.** Обеспечивают ли непрерывность полевой функции сетки из восьмиузловых четырехугольных конечных элементов, показанные на рис. 2.16, б, когда узловые вершины одних конечных элементов совпадают с серединными узлами других элементов? Ответ обоснуйте.

а)



б)



**Рис. 2.16.** Сетки из элементов с «серединными» узлами:  
треугольная сетка (а) и четырехугольная сетка (б)

**2.22.** Обеспечивают ли непрерывность полевой функции сетки из трехузловых и шестиузловых треугольных конечных элементов, показанные на рис. 2.14, а? Ответ обоснуйте.

**2.23.** Обеспечивают ли непрерывность полевой функции сетки из четырехузловых и восьмиузловых четырехугольных конечных элементов, показанные на рис. 2.14, б? Ответ обоснуйте.

---

## Глава 3

# Примеры решения задач в ANSYS и лабораторные работы

### 3.1. Лабораторная работа №1. Статическое деформирование пьезокерамического преобразователя с многоэлектродным покрытием

#### Цель работы

1. Изучить основные особенности решения задач электроупругости в ANSYS APDL на примере двумерной статической задачи для пьезоэлектрического преобразователя с неоднородной поляризацией и с многоэлектродным покрытием (файл примера: FE\_Mod\_CP\_1.inp, с. 103):
  - 1.1. задание констант пьезоэлектрического материала;
  - 1.2. элементные системы координат и их применение для задания анизотропных и пьезоэлектрических свойств;
  - 1.3. использование регулярных конечно-элементных сеток;
  - 1.4. задание электродированных поверхностей и граничных условий на них.
2. Составить программу на языке APDL ANSYS для индивидуальной статической задачи для пьезоэлектрического преобразователя с неоднородной поляризацией и с многоэлектродным покрытием.
3. Провести расчеты, проанализировать результаты и оформить отчет.

### 3.1.1. Описание модельной задачи и методов ее решения

#### Постановка задачи

Пьезоэлектрический диск радиуса  $R$  и толщины  $H$  отнесен к цилиндрической системе координат  $Orz$  ( $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq H$ ) и находится в условиях осесимметричного деформирования. В силу осесимметричности задачи далее рассматривается только его меридиональное сечение, причем в соответствие с методологией ANSYS ось  $r$  считается осью  $X$ , а ось  $z$  — осью  $Y$ .

Диск имеет четыре электродированные поверхности (рис. 3.1): электрод с номером 1 с координатами  $0 \leq X \leq R_1$ ,  $Y = -H/2$ ; электрод с номером 2 с координатами  $0 \leq X \leq R_1$ ,  $Y = H/2$ ; электрод с номером 3 с координатами  $R_2 \leq X \leq R$ ,  $Y = -H/2$ ; электрод с номером 4 с координатами  $R_2 \leq X \leq R$ ,  $Y = H/2$ . Пьезоэлектрический диск выполнен из пьезокерамики PZT-4, причем зоны  $\{0 \leq X \leq R_1, -H/2 \leq Y \leq H/2\}$  и  $\{R_1 \leq X \leq R_2, -H/2 \leq Y \leq H/2\}$  поляризованы вдоль оси  $Y$ , а зона  $\{R_2 \leq X \leq R, -H/2 \leq Y \leq H/2\}$  поляризована противоположно оси  $Y$  (рис. 3.2).

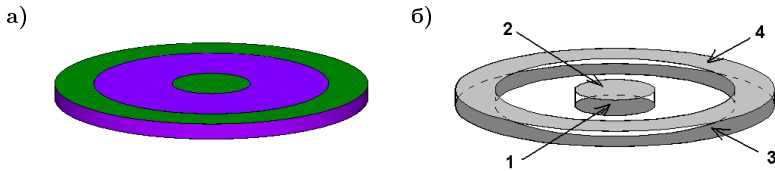


Рис. 3.1. Пьезоэлектрический диск (а) с четырьмя электродами (б)

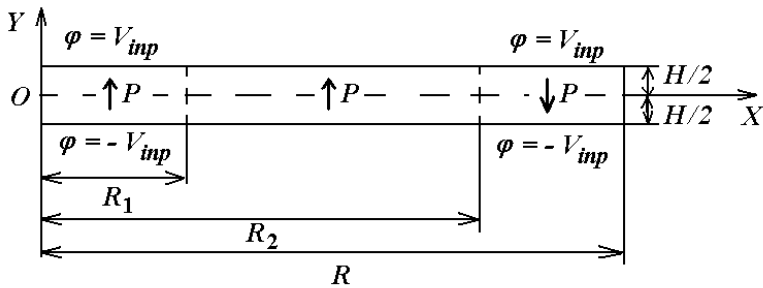


Рис. 3.2. Меридиональное сечение пьезоэлектрического диска

Диск закреплен по оси  $Y$  в зоне  $X = R, Y = 0$ , т.е.  $u_y = 0$  при  $X = R, Y = 0$ , на оси  $X = 0$  выполняются условия симметрии, а остальные поверхности диска свободны от механических напряжений.

Диск деформируется под действием подаваемого электрического напряжения на электроды:  $\varphi = -V_{inp}$  — на первом электроде,  $\varphi = V_{inp}$  — на втором электроде,  $\varphi = -V_{inp}$  — на третьем электроде, и  $\varphi = V_{inp}$  — на четвертом электроде.

Необходимо определить смещения диска в результате деформирования.

## Решение задачи с использованием ANSYS

Пример решения задачи с использованием программы ANSYS содержится в файле `FE_Mod_CP_1.inp`, листинг которого приведен ниже. Программа предназначена для выполнения в пакетном режиме ANSYS и снабжена подробными комментариями. Другие примеры решения задач электроупругости содержатся в [13] и в документации по ANSYS: Coupled-Field Guide, 2.14. Sample Piezoelectric Analysis (Batch or Command Method), 2.16. Sample Electroelastic Analysis of a Dielectric Elastomer (Batch or Command Method); Verification Manual, файлы `Vm175.dat`, `Vm176.dat`, `Vm231.dat`, `Vm237.dat` (ссылки приведены для ANSYS 11.0).

Начинать работу с программным комплексом ANSYS лучше с запуска ANSYS Product Launcher (*Пуск* → *Все программы*), где следует задать среду моделирования (*Simulation Environment* → *ANSYS*), выбрать рабочий каталог, в который будут сохраняться все рабочие файлы ANSYS (*Working Directory*) и задать название проекта (*Job Name*).

Выполнение командного файла (текстовый файл с расширением `.inp`, `.dat` или `.txt`), написанного на языке APDL ANSYS осуществляется с помощью пункта меню *File* → *Read Input from...* В процессе создания командного файла можно копировать блоки команд в командную строку и смотреть на результат их выполнения в интерактивном режиме.

Рекомендуется периодически сохранять результаты работы! Каждый раз перед запуском новых расчетов надо очищать текущую базу данных (*File* → *Clear and Start New*).

## Листинг входного файла `FE_Mod_CP_1.inp`

```
! знак комментария
! текст после знака "!" игнорируется в APDL ANSYS
! Файл   FE_Mod_CP_1.inp
! Тестовая задача №1
```



```
! ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА
! ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИСК
! Статическая задача

! Инвертирование фона с черного на белый
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15

! Заголовок для решаемой задачи ("пьезоэлектрический диск")
/TITLE, PIEZOELECTRIC DISC

! Параметры для геометрических размеров (все - в системе СИ)
H=0.002 ! толщина диска
R=10*H   ! радиус диска

! Вспомогательные геометрические размеры
R1=R/4   ! радиус внутренней электродированной поверхности
R23=R/4 ! размер по радиусу для кольцевой электродированной
поверхности

! Значение подаваемого электрического потенциала на электрод
VINP=1

! Параметры конечно-элементной сетки
SM=1 ! Масштабный множитель (scaling multiplier)
HDIV=8*SM ! Кол-во КЭ по толщине диска
R1DIV=16*SM ! Кол-во КЭ по радиальному направлению от 0 до R1
R12DIV=32*SM ! Кол-во КЭ по радиальному направлению от R1 до R2
R23DIV=16*SM ! Кол-во КЭ по радиальному направлению от R2 до R

! Параметры для материальных констант пьезокерамики PZT-4
! (все данные - в системе СИ)
R0=7.5e3 ! Плотность
C11E=13.9e10 ! Упругие модули C^E_ij
C12E=7.78e10
C13E=7.43e10
C33E=11.5e10
C66E=(C11E-C12E)/2.
C44E=2.56e10
E31=-5.2 ! Пьезомодули
E33=15.1
E15=12.7
EPS11=730 ! Диэлектрические проницаемости, отнесенные к
проницаемости вакуума
EPS33=635

/PREP7 ! Вход в препроцессор (Preprocessor)
```

! Занесение материальных констант пьезокерамического материала  
! в массивы данных (для случая осесимметричной задачи и  
! пьезокерамики, поляризованной по оси)

```
MP,DENS,1,R0
TB,ANEL,1
TBADATA,1,C11E,C13E,C12E
TBADATA,7,C33E,C13E
TBADATA,12,C11E
TBADATA,16,C44E
TB,PIEZ,1
TBADATA,2,E31
TBADATA,5,E33
TBADATA,8,E31
TBADATA,10,E15
MP,PERX,1,EPS11
MP,PERY,1,EPS33
```

! 2D четырехугольный КЭ с 8 узлами для связанных задач  
ET,1,PLANE223,1001,,1 ! пьезоэлектрический КЭ  
! KEYOPT(1)=1001 - степени свободы UX,UY,VOLT  
! KEYOPT(3)=1 - осесимметричная задача  
poindent  
R2=R-R23 ! Вспомогательный геометрический размер по радиусу

! Определение опорных точек  
K,1,0,-H/2 ! Точка с номером 1 (Keypoint) с координатами X=0, Y=-H/2  
K,2,R1,-H/2  
K,3,R2,-H/2  
K,4,R,-H/2  
K,5,R,H/2  
K,6,R2,H/2  
K,7,R1,H/2  
K,8,0,H/2

! Определение прямых линий, соединяющих точки  
L,1,2 ! Линия (Line), соединяющая точки 1 и 2  
! Новая линия будет иметь номер 1

L,2,3 \$ L,3,4 ! Линии 2 и 3  
! знак \$ -- для разделения команд, записанных в одной строке  
L,4,5 \$ L,5,6 \$ L,6,7 \$ L,7,8 \$ L,8,1 \$ L,6,3 ! Линии 4-9

! Построение областей (площадей) по опорным точкам  
! Точки должны быть перечислены в порядке обхода  
A,1,2,3,6,7,8 ! Область (Area) 1  
A,3,4,5,6 ! Область 2

```

! Определение локальной системы координат с номером 11,
! повернутой относительно оси z на 180 градусов
LOCAL,11,0,, ,180

CSYS,0 ! Переход в систему координат с номером 0
! (глобальную декартову)

! Задание для области 2 элементной системы координат 11
! (для задания направления поляризации)
ASEL,S,AREA,,2 ! Выбор области 2 (ASEL - Area Select)
! AATT - задание специальных атрибутов
! для еще не разбитых на КЭ областей
AATT,1,,1,11 ! 11 - номер элементной СК для выбранной области
! необязательные команды
ASEL,S,AREA,,1
AATT,1,,1
ASEL,ALL ! возврат к выбору всех областей

! Разбиение линий для канонической конечно-элементной сетки
! Важно: суммарное число делений для противоположных линий
! области должно быть одинаковым!

! Выбор всех вертикальных линий (это линии L8, L9, L4)
LSEL,S,LINE,,8,9
LSEL,A,LINE,,4

! Для всех выбранных линий зададим разбиение на
! одно и то же число частей
! Задание числа делений для неразбитых линий
! LESIZE - Line Element Size
! Для выбранных линий задается число делений HDIV
LESIZE,ALL,,HDIV

! Выбор линий с координатой  $0 \leq X \leq R1$ 
LSEL,S,LOC,X,0,R1 ! линии L1 и L7
! Для выбранных линий задается число делений R1DIV
LESIZE,ALL,,R1DIV

! Выбор линий с координатой  $R1 \leq X \leq R2$ 
LSEL,S,LOC,X,R1,R2 ! линии L2 и L6
! Для выбранных линий задается число делений R2DIV
LESIZE,ALL,,R12DIV

! Выбор линий с координатой  $R2 \leq X \leq R$ ,
LSEL,S,LOC,X,R2,R ! линии L3 и L5
! Для выбранных линий задается число делений R23DIV
LESIZE,ALL,,R23DIV

```

```
LSEL,ALL ! Возврат к выбору всех линий

! Превращение нерегулярной области 1 в регулярную
LCCAT,1,2 ! Конкатенация линий L1 и L2
! В результате будет линия L10

LCCAT,7,6 ! Конкатенация линий L7 и L6
! В результате будет линия L11

! Ключ разбиения (Mesh Key)
! (0 - свободное разбиение, 1 - регулярное разбиение)
MSHKEY,1 ! Регулярное разбиение
! Форма КЭ (Mesh Shape) :
! 1й аргумент - ключ формы элементов
! 2й аргумент - размерность модели
MSHAPE,0,2 ! разбиение на четырехугольные КЭ, 2D

AMESH,ALL ! Построение конечно-элементной сетки на областях

FINISH ! Выход из процессора

/SOLU ! Вход в решатель (Solution)
ANTYPE,STAT ! Выбор типа анализа
! STATic - решение статической задачи

! Определение электродов
! Выбор узлов для первого электрода
! с координатами  $0 \leq X \leq R1$ ,  $Y = -H/2$ 
NSEL,S,LOC,Y,-H/2
NSEL,R,LOC,X,0,R1
! Объединение степеней свободы VOLT всех выбранных узлов
! в группу с номером 1
CP,1,VOLT,ALL
! Задание параметра N_VOLT1
! (минимального номера узла из группы 1)
! Узел с номером N_VOLT1 будет ссылочным узлом группы 1
*GET,N_VOLT1,NODE,,NUM,MIN

! Выбор узлов для второго электрода
! с координатами  $0 \leq X \leq R1$ ,  $Y = H/2$ 
NSEL,S,LOC,Y,H/2
NSEL,R,LOC,X,0,R1
! Объединение степеней свободы VOLT всех выбранных узлов
! в группу с номером 2
CP,2,VOLT,ALL
! Задание параметра N_VOLT2
```

```

! (минимального номера узла из группы 2)
! Узел с номером N_VOLT1 будет ссылочным узлом группы 2
*GET,N_VOLT2,NODE,,NUM,MIN

! Выбор узлов для третьего электрода
! с координатами R2<=X<=R, Y=-H/2)
NSEL,S,LOC,Y,-H/2
NSEL,R,LOC,X,R2,R
! Объединение степеней свободы VOLT всех выбранных узлов
! в группу с номером 3
CP,3,VOLT,ALL
! Задание параметра N_VOLT3
! (минимального номера узла из группы 3)
! Узел с номером N_VOLT1 будет ссылочным узлом группы 3
*GET,N_VOLT3,NODE,,NUM,MIN

! Выбор узлов для четвертого электрода
! с координатами R2<=X<=R, Y=H/2)
NSEL,S,LOC,Y,H/2
NSEL,R,LOC,X,R2,R
! Объединение степеней свободы VOLT всех выбранных узлов
! в группу с номером 4
CP,4,VOLT,ALL
! Задание параметра N_VOLT4
! (минимального номера узла из группы 4)
! Узел с номером N_VOLT1 будет ссылочным узлом группы 4
*GET,N_VOLT4,NODE,,NUM,MIN

NSEL,ALL ! Возврат к выбору всех узлов модели

! Определение значений потенциалов на электродах
D,N_VOLT1,VOLT,-VINP
D,N_VOLT2,VOLT,VINP
D,N_VOLT3,VOLT,-VINP
D,N_VOLT4,VOLT,VINP

! Условия симметрии относительно оси OY
DL,8,,SYMM ! (на этой оси лежит линия 8)

! Условие закрепления срединной крайней точки по оси Y
! Выбор узла с координатами X=R, Y=0
NSEL,S,LOC,Y,0
NSEL,R,LOC,X,R

D,ALL,UY,0 ! Задание ограничений UY=0 в узлах

NSEL,ALL ! Возврат к выбору всех узлов

```

```
SOLVE ! Решить систему МКЭ
FINISH ! Выход из процессора

/POST1 ! Вход в общий постпроцессор (General PostProcessor)
! Команды, управляющие форматом графического вывода
/SHOW,WIN32C
/TRIAD,OFF          ! Не показывать начала координат и осей
! Использовать формат вывода Auto-legend для подписей
/PLOPTS,INFO,2
/PLOPTS,LEG2,OFF
! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде
/PLOPTS,LOGO,OFF
/PLOPTS,FRAME,OFF ! Не показывать рамку
/PLOPTS,DATE,OFF  ! Не показывать дату

! Вывод картины распределения перемещений UY PLNSOL,U,Y
PLNSOL,U,Y
```

Дадим дополнительные комментарии к программе.

Геометрические размеры, параметры триангуляции (определяющие размеры конечных элементов), материальные константы задаются в виде пользовательских параметров. Далее в препроцессоре (вход в препроцессор осуществляется командой **/PREP7**) с помощью команд **MP**, **TB**, **TBDATA** задаются матрицы упругих модулей, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей. Соответствующие команды при проведении пьезоэлектрического анализа в ANSYS совсем не тривиальны и нуждаются в подробных объяснениях.

### Определение материальных констант пьезоэлектрических материалов

Как отмечалось ранее в разделе 1.3, пьезоэффект наблюдается лишь в кристаллах, не имеющих центральной симметрии. В связи с этим, пьезоэлектрические тела обязательно должны обладать анизотропными свойствами. В общем случае в ANSYS для задания материальных констант пьезоэлектрических тел необходимо определить следующие величины: плотность  $\rho$ ; симметричную матрицу упругих модулей  $c_{\alpha\beta}^E$ ;  $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ ;  $c_{\alpha\beta}^E = c_{\beta\alpha}^E$ ; матрицу пьезомодулей  $e_{i\alpha}$ ;  $i = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = 1, \dots, 6$ ; и матрицу диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{ij}^S$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ , которая для большинства материалов является диагональной. Данные обозначения для модулей пьезоэлектрических тел общеприняты в литературе по

пьезоэлектричеству и в технических приложениях [3, 5, 11, 20, 32], и именно эти модули можно найти в различных справочниках по пьезоэлектрическим материалам.

Отметим, что переход от тензорных величин  $c_{ijkl}^E$  и  $e_{ijk}$  к матричным обозначениям  $c_{\alpha\beta}^E$  и  $e_{i\alpha}$  описан в задачах 1.6 и 1.9. Однако, как отмечается в документации [25], в ANSYS используется нестандартное расположение компонент матриц  $c_{\alpha\beta}^E$  и  $e_{i\alpha}$  в виде одномерных массивов, облегчающее переход от трехмерных задач к двумерным. Кроме того, можно задавать и альтернативные наборы констант (задача 1.13): упругие податливости  $s_{\alpha\beta}^E$ , вычисленные при постоянном электрическом поле; пьезомодули деформаций  $d_{i\alpha}$  и диэлектрические проницаемости  $\epsilon_{ij}^T$ , вычисленные при постоянном напряжении. При этом, компоненты матриц  $s_{\alpha\beta}^E$  и  $d_{i\alpha}$  также располагаются в ANSYS нестандартным образом.

Опишем технику определения в ANSYS модулей  $c_{\alpha\beta}^E$  и  $e_{i\alpha}$  более подробно [13]. Модули  $c_{\alpha\beta}^E$  задаются в форме  $6 \times 6$  матрицы ( $4 \times 4$  — для двумерных задач). В силу симметрии матрицы упругих модулей заполняется только ее верхняя треугольная часть, причем при специальном расположении коэффициентов:

$$\mathbf{c}_{\text{ANSYS,3D}}^E \leftrightarrow \begin{array}{c|cccccc} & x & y & z & xy & yz & xz \\ \hline x & c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{16}^E & c_{14}^E & c_{15}^E \\ y & & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{26}^E & c_{24}^E & c_{25}^E \\ z & & & c_{33}^E & c_{36}^E & c_{34}^E & c_{35}^E \\ xy & & & & c_{66}^E & c_{46}^E & c_{56}^E \\ yz & & \text{sym} & & & c_{44}^E & c_{45}^E \\ xz & & & & & & c_{55}^E \end{array} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{c}_{\text{ANSYS,2D}}^E \leftrightarrow \begin{array}{c|cccc} & x & y & z & xy \\ \hline x & c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{16}^E \\ y & & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{26}^E \\ z & & & c_{33}^E & c_{36}^E \\ xy & & \text{sym} & & c_{66}^E \end{array} \quad (3.2)$$

Компоненты матрицы  $\mathbf{c}_{\text{ANSYS,3(2)D}}^E$  в ANSYS определяются обычно командами: **TB,ANISO,MAT** и **TBDATA,STLOC,C1,C2, ...,C6**; где *MAT* — номер набора материальных свойств, *STLOC* — номер для начала последовательного размещения данных *C1, C2, ..., C6* в одномерном массиве данных. Массив данных для коэффициентов, входящих в (3.1), (3.2), заполняется по строкам (3.1) в виде одномерного массива с 21

компонентой:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ & & 12 & 13 & 14 & 15 \\ & & & 16 & 17 & 18 \\ & & & & 19 & 20 \\ & & & & & 21 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

В итоге получается соответствие между данными из массива, определенного **TBDATA**, и модулями жесткости  $c_{\alpha\beta}^E$ , представленное в таблице 3.1.

**Таблица 3.1.** Расположение модулей  $c_{\alpha\beta}^E$  в массиве TBDATA

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$c_{\alpha\beta}^E$	$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$	$c_{16}^E$	$c_{14}^E$	$c_{15}^E$	$c_{22}^E$	$c_{23}^E$	$c_{26}^E$	$c_{24}^E$	$c_{25}^E$
No.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
	$c_{33}^E$	$c_{36}^E$	$c_{34}^E$	$c_{35}^E$	$c_{66}^E$	$c_{46}^E$	$c_{56}^E$	$c_{44}^E$	$c_{45}^E$	$c_{55}^E$	

Для наиболее распространенного типа пьезоэлектрических материалов – пьезокерамики, поляризованной в направлении оси  $Oz$ , матрица упругих модулей имеет следующую структуру (материал кристаллографического класса  $6mm$  [5])

$$\mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & c_{44}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где  $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ .

Поэтому, сравнивая (3.1), (3.3), (3.4), находим, что для трехмерных задач ненулевые модули упругости пьезокерамики, поляризованной в направлении оси  $Oz$ , в массиве TBDATA будут иметь номера, указанные в таблице 3.2.

**Таблица 3.2.** Ненулевые модули  $c_{\alpha\beta}^E$  пьезокерамики в TBDATA для 3D-задач

No.	1	2	3	7	8	12	16	19	21
$c_{\alpha\beta}^E$	$c_{11}^E$	$c_{12}^E$	$c_{13}^E$	$c_{11}^E$	$c_{13}^E$	$c_{33}^E$	$c_{66}^E$	$c_{44}^E$	$c_{44}^E$



Для двумерных задач, как видно из сравнения (3.1)–(3.3), достаточно задать только первые 16 позиций в одномерном массиве модулей  $c_{\alpha\beta}^E$ .

Заметим, что для плоских и осесимметричных двумерных задач обычно удобно считать в рабочей плоскости  $Oxy$  ось  $Oy$  направлением предварительной поляризации пьезокерамики (т.е. осью  $z = (3)$  для модулей  $c_{\alpha\beta}^E$ ). В этом случае для плоских и осесимметричных задач ненулевые модули жесткости пьезокерамики в массиве TBDATA будут иметь номера, приведенные в таблице 3.3.

**Таблица 3.3.** Ненулевые модули  $c_{\alpha\beta}^E$  пьезокерамики в TBDATA для 2D-задач

No.	1	2	3	7	8	12	16
$c_{\alpha\beta}^E$	$c_{11}^E$	$c_{13}^E$	$c_{12}^E$	$c_{33}^E$	$c_{13}^E$	$c_{11}^E$	$c_{44}^E$

Аналогичным образом задаются в ANSYS в нестандартном формате и пьезомодули  $e_{i\alpha}$ . Пьезомодули располагаются в следующем порядке в матрицах размера  $6 \times 3$  ( $4 \times 2$  — для двумерных задач):

$$\mathbf{e}_{\text{ANSYS,3D}} \leftrightarrow \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ y & e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ z & e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ xy & e_{16} & e_{26} & e_{36} \\ yz & e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ xz & e_{15} & e_{25} & e_{35} \end{array}, \quad \mathbf{e}_{\text{ANSYS,2D}} \leftrightarrow \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & e_{11} & e_{21} \\ y & e_{12} & e_{22} \\ z & e_{13} & e_{23} \\ xy & e_{16} & e_{26} \end{array} \quad (3.5)$$

После выполнения команды **TB,PIEZ,MAT** массив данных TBDATA для пьезомодулей в ANSYS заполняется из матрицы  $\mathbf{e}_{\text{ANSYS,3D}}$  по строкам, как одномерный массив размера 18. В итоге получается соответствие между данными из массива TBDATA и пьезомодулями  $e_{i\alpha}$ , демонстрируемое в таблице 3.4, причем для двумерных задач достаточно задать компоненты с номерами 1,2,4,5,7,8,10 и 11.

**Таблица 3.4.** Расположение модулей  $e_{i\alpha}$  в массиве TBDATA

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e_{i\alpha}$	$e_{11}$	$e_{21}$	$e_{31}$	$e_{12}$	$e_{22}$	$e_{32}$	$e_{13}$	$e_{23}$	$e_{33}$
No.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	$e_{16}$	$e_{26}$	$e_{36}$	$e_{14}$	$e_{24}$	$e_{34}$	$e_{15}$	$e_{25}$	$e_{35}$

Для пьезокерамики, поляризованной в направлении оси  $Oz$ , матрица пьезомодулей имеет следующую структуру:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Следовательно, ненулевые пьезомодули пьезокерамического материала для трехмерных задач будут иметь номера в массиве TBDATA, представленные в таблице 3.5.

**Таблица 3.5.** Ненулевые модули  $e_{i\alpha}$  пьезокерамики в TBDATA для 3D-задач

No.	3	6	9	14	16
$e_{i\alpha}$	$e_{31}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$e_{15}$

Наконец, для плоских и осесимметричных двумерных задач в случаях, когда в плоскости  $Oxy$  ось  $Oy$  является осью предварительной поляризации пьезокерамики (т.е. осью  $z = (3)$  для пьезомодулей  $e_{i\alpha}$ ), ненулевые пьезомодули в массиве TBDATA будут иметь номера, указанные в таблице 3.6.

**Таблица 3.6.** Ненулевые модули  $e_{i\alpha}$  пьезокерамики в TBDATA для 2D-задач

No.	2	5	8	10
$e_{i\alpha}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{31}$	$e_{15}$

Суммируя изложенное выше, для пьезокерамического материала можно использовать следующие фрагменты программ для ANSYS, определяющие наборы материальных констант MAT с номером 1 для трехмерных (3D) и двумерных (2D) задач, причем в последнем случае пьезокерамика считается поляризованной в плоскости  $Oxy$  вдоль оси  $Oy$ :

## Фрагмент 1 (3D)

```

MP , DENS , 1 , RHO
TB , ANEL , 1
TBDATA , 1 , C11E , C12E , C13E
TBDATA , 7 , C11E , C13E
TBDATA , 12 , C33E
TBDATA , 16 , C66E
TBDATA , 19 , C44E
TBDATA , 21 , C44E
TB , PIEZ , 1
TBDATA , 3 , E31
TBDATA , 6 , E31
TBDATA , 9 , E33
TBDATA , 14 , E15
TBDATA , 16 , E15
MP , PERX , 1 , EPS11
MP , PERZ , 1 , EPS33

```

## Фрагмент 2 (2D)

```

MP , DENS , 1 , RHO
TB , ANEL , 1
TBDATA , 1 , C11E , C13E , C12E
TBDATA , 7 , C33E , C13E
TBDATA , 12 , C11E
TBDATA , 16 , C44E
TB , PIEZ , 1
TBDATA , 2 , E31
TBDATA , 5 , E33
TBDATA , 8 , E31
TBDATA , 10 , E15
MP , PERX , 1 , EPS11
MP , PERY , 1 , EPS33

```

Здесь  $RHO = \rho$ ;  $C11E = c_{11}^E$  и т. п. Эти величины являются скалярными параметрами в программе на языке APDL ANSYS и должны быть определены ранее. Кроме того, в представленных фрагментах программ добавлены команды **MP**, определяющие плотность и диэлектрические проницаемости пьезокерамики.

Как видно, определение констант пьезоэлектрических материалов требует достаточных усилий. Важно подчеркнуть, что в представленных фрагментах программ для задаваемых наборов констант оси  $Oxy(z)$  являются осями элементных систем координат.

Продолжим теперь комментарии к тесту программы решения модельной двумерной статической задачи для пьезоэлектрического преобразования с неоднородной поляризацией и с многоэлектродным покрытием.

Команда **ET,1,PLANE223,1001,,1** задает четырехугольный восьмиузловой конечный элемент **PLANE223** с опцией пьезоэлектрического анализа и опцией осесимметричности, который будет использован для решения задачи. Для пользователя все отличия осесимметричной задачи от двумерной задачи о плоском напряженном состоянии или о плоской деформации состоят только в третьей опции данного конечного элемента. (Если записать **ET,1,PLANE223,1001,,0** то будет решаться двумерная задача о плоском напряженном состоянии.) Однако ANSYS при этой опции будет использовать уравнения осесимметричной теории пьезоэлектричества, которые значительно сложнее, чем уравнения плоского напряженного состояния или плоской деформации.

## Построение твердотельной модели меридионального сечения пьезоэлектрического диска

При программировании на языке APDL ANSYS твердотельная модель исходной области со сложной геометрией обычно строится «снизу вверх», начиная с построения наиболее простых объектов (*Entities*) — опорных точек (*Keypoints*) и заканчивая построением областей (*Areas*) для двумерных задач или объемов (*Volumes*) для трехмерных задач.

Для построения опорных точек используется команда **K**, первым аргументом которой является номер точки, а остальными — координаты точки. Например, команда **K,2,R1,-H/2** создает точку с номером 2 и координатами  $x = R1$ ,  $y = -H/2$ ,  $z = 0$  (значение по умолчанию). Для построения линии (объект *Line*) между двумя точками используется команда **L**. Например, команда **L,2,3** создает линию в текущей системе координат между точками с номерами 2 и 3. При этом создаваемые линии нумеруются в программе автоматически, начиная с наименьшего доступного номера. Для построения областей можно использовать команды **A** и **AL**, в которых создаваемые области также нумеруются автоматически. Команда **AL** строит область по указанным линиям, перечисленным в порядке обхода по или против часовой стрелки (в программе на языке APDL ANSYS можно перечислить не более 10 линий), а команда **A** аналогично строит область по указанным опорным точкам (можно перечислить не более 18 точек). При этом, если между двумя точками определена линия, то команда **A** будет использовать ее при построении области, в противном случае в текущей координатной системе будет построена недостающая линия.

Согласно рис. 3.2, в меридиональном сечении диска можно выделить две зоны с различным направлением поляризации, поэтому твердотельную осесимметричную модель диска можно составить из двух областей. На рис. 3.3 показаны построенные области A1 и A2 с нанесенными номерами областей и опорных точек. (Пункты меню *Plot* → *Areas* с нумерацией

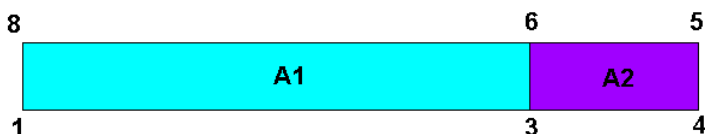


Рис. 3.3. Нумерация областей модели меридионального сечения диска

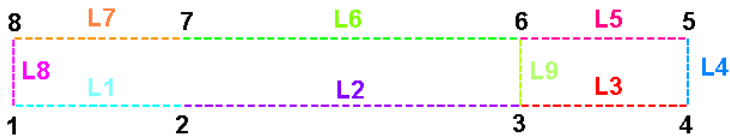


Рис. 3.4. Линии с заданным разбиением и опорные точки модели сечения диска

областей и точек *PlotCtrls* → *Numbering* → отметить *Area numbers*, *Keypoint numbers*.)

Линии и точки, составляющие области A1 и A2, можно увидеть на рис. 3.4 (пункты меню *Plot* → *Lines*, где предварительно в *Select* → *Entities* выбраны линии L1–L9 с нумерацией линий и точек *PlotCtrls* → *Numbering* → отметить *Line numbers*, *Keypoint numbers*). Здесь прямоугольная область A2 построена обычным образом из четырех линий L3, L4, L5, L9 и четырех точек 3, 4, 5, 6, поскольку верхняя и нижняя границы данной области совпадают с линиями расположения электродов. Область A1 состоит из шести точек 1, 2, 3, 6, 7, 8 и шести линий L1, L2, L9, L6, L7, L8. Для этой области как верхнюю, так и нижнюю границы нужно строить из двух линий, причем опорные точки линий L1 и L7, моделирующих электроды, должны совпадать с концами электродов. Это требуется для того, чтобы при построении конечно-элементной сетки на концы электродов попали узлы конечных элементов. Следует обратить внимание на то, что линия L9 является общей для смежных областей A1 и A2.

### Задание направления вектора поляризации для областей пьезоэлектрического диска

Все вводимые ранее модули  $c_{\alpha\beta}^E$ ,  $e_{i\alpha}$ ,  $\epsilon_{ij}^S$  пьезоэлектрических материалов, вообще говоря, являются модулями, определенными в кристаллографических системах координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ . Эти системы координат для кусочно-однородных областей могут отличаться при переходе от одной области к другой, а для функционально-градиентных материалов могут изменяться от точки к точке. Поэтому модули, определенные ранее в кристаллографической системе координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  переобозначим через  $\tilde{c}_{\alpha\beta}^E$ ,  $\tilde{e}_{i\alpha}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{ij}^S$ . В расчетных формулах для конечно-элементных матриц фигурируют тензорные величины  $\mathbf{c}^E$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{\epsilon}^S$  модулей, вычисленные в глобальной декартовой системе координат. Эти формулы можно представить и в векторно-матричной

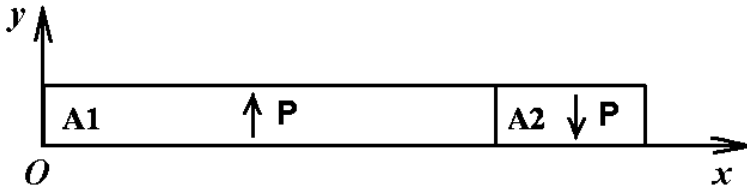


Рис. 3.5. Направления векторов поляризации  $\mathbf{P}$  для областей сечения диска

форме, и тогда в них будут фигурировать коэффициенты матриц  $c_{\alpha\beta}^E$ ,  $e_{i\alpha}$ ,  $\epsilon_{ij}^S$ , записанные также в глобальной системе координат.

В ANSYS используется идеология элементных систем координат, когда для каждого конечного элемента может задаваться своя элементная система координат, и материальные свойства  $\tilde{c}_{\alpha\beta}^E$ ,  $\tilde{e}_{i\alpha}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{ij}^S$  и др. определяются в элементной системе координат. Для каждого конечного элемента ANSYS может пересчитать модули  $\tilde{c}_{\alpha\beta}^E$ ,  $\tilde{e}_{i\alpha}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{ij}^S$  в модули  $c_{\alpha\beta}^E$ ,  $e_{i\alpha}$ ,  $\epsilon_{ij}^S$ , представленные в глобальной системе координат. Этот пересчет осуществляется без участия пользователя, если для конечных элементов определены свои элементные системы координат.

Ориентацию кристаллографической системы координат  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  для пьезокерамических материалов определяет вектор поляризации  $\mathbf{P}$ . Именно, для пьезокерамики, как для трансверсально-изотропного материала, направление оси  $O\tilde{z}$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{P}$ , а оси  $O\tilde{x}$  и  $O\tilde{y}$  лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{P}$ .

Для плоских и осесимметричных двумерных задач удобно считать ось  $O\tilde{y}$  осью предварительной поляризации  $\mathbf{P}$  в рабочей плоскости  $O\tilde{x}\tilde{y}$ , и поэтому в ANSYS для пьезоматериалов с различными векторами поляризации достаточно задать для соответствующих областей элементные системы координат, повернутые нужным образом относительно глобальной системы координат  $Oxy$ .

В рассматриваемом примере (см. рис. 3.5) направление вектора поляризации  $\mathbf{P}$  в области A1 совпадает с направлением оси  $Oy$  глобальной декартовой системы координат, поэтому для конечных элементов этой области не требуется вводить специальную элементную систему координат. Для области A2 направление вектора поляризации  $\mathbf{P}$  противоположно направлению оси  $Oy$  глобальной декартовой системы координат, поэтому для этой области требуется задать элементную систему координат с осью  $O\tilde{y}$ , направленной вдоль вектора поляризации, т.е. ось  $O\tilde{y}$  должна быть противоположной оси  $Oy$ . Для этого исходную элементную



**Рис. 3.6.** Элементные системы координат в областях меридионального сечения диска

систему координат нужно повернуть на 180 градусов относительно глобальной декартовой системы координат. Следующий блок команд создает локальную систему координат и задает ее в качестве элементной системы координат для конечных элементов, которые будут создаваться в дальнейшем в области A2.

```
LOCAL,11,0,, ,180
ASEL,S,AREA,,2
AATT,1,,1,11
```

На рис. 3.6 показан пример конечно-элементной сетки с элементными системами координат при более грубом разбиении, чем в приведенном выше файле FE\_Mod\_CP\_1.inp. (Пункты меню *Plot* → *Elements*, для показа зон поляризации разным цветом *PlotCtrls* → *Numbering* → *Elem/Attrib numbering* → выбрать *Element CS num, Numbering shown with* → *Colors only* с показом направлений элементных систем координат на каждом элементе *PlotCtrls* → *Symbols*, отметить *ESYS Element coordinate sys*).

### Построение конечно-элементной сетки с регулярным разбиением

Поскольку элемент **PLANE223** является четырехугольным конечным элементом и моделируемая область меридионального сечения диска является четырехугольником, а конкретнее, прямоугольником, то логично использовать *регулярное* конечно-элементное разбиение на четырехугольники (даже — на прямоугольники).

В ANSYS существует два типа конечно-элементного разбиения: регулярное (*Mapped Mesh*) и свободное (*Free Mesh*). *Свободным* называется разбиение, которое не имеет ограничений на форму элементов и не имеет заданного шаблона сетки. Обычно свободное разбиение используется для областей и объемов сложной формы. Для свободного разбиения достаточно задать средний размер конечного элемента. В противоположность свободному разбиению регулярное разбиение определяется заданной формой конечных элементов (например, только треугольники или только четырехугольники в случае разбиения областей)

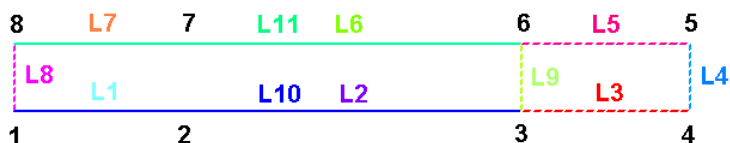


Рис. 3.7. Конкатенация линий модели меридионального сечения диска

и заданным шаблоном конечно-элементной сетки с четкими «рядами» элементов. Регулярное разбиение выгодно использовать для областей и объемов простой формы, использование регулярного разбиения помогает значительно сократить время расчетов, и оно, как правило, более точное, чем сравнимое по числу элементов и узлов свободное разбиение.

Для того чтобы построить регулярное разбиение четырехугольной области на четырехугольные конечных элементы, область должна удовлетворять двум критериям: 1) состоять из четырех линий, 2) противоположные стороны области должны быть разбиты на одинаковое число частей. Для области, состоящей из более, чем четырех линий, следует использовать конкатенацию смежных линий, чтобы сократить общее число линий до четырех.

В рассматриваемом примере меридионального сечения диска возможно по крайней мере два способа построения областей твердотельной модели, пригодных для получения регулярной конечно-элементной сетки. Например, можно было построить дополнительную линию можно точками 2 и 7 и составить три прямоугольных области, каждая из которых состояла бы из четырех линий.

Принятый здесь способ позволяет обойтись двумя областями, при этом область A2 является регулярной, а область A1 — нерегулярной, так как состоит из шести линий. Для превращения области A1 в регулярную достаточно объединить между собой линии L1 и L2, которые составляют нижнюю границу области, а также линии L6 и L7, составляющие верхнюю границу области. Для этого служит команда **LCCAT**, которая объединяет две линии в одну для последующего обеспечения регулярного разбиения. Если требуется объединить более двух линий, то в качестве аргумента команды **LCCAT** следует задать **ALL**. При этом будут объединены все линии, выбранные ранее с помощью команды выбора линий **LSEL**. Следует помнить, что для построения регулярной конечно-элементной сетки суммарное число делений на противоположных линиях области должно быть одинаковым. На рис. 3.7 показан результат объединения



линий верхней и нижней границ области A1. Полученные в результате линии L10 и L11 сохраняют заданное суммарное разбиение составляющих их линий.

### Задание граничных условий

**Граничные условия на электродированных поверхностях.** Как отмечалось в разделе 1.3, металлизированные поверхности или электроды на поверхности пьезоэлектрического тела являются эквипотенциальными поверхностями, т.е. на них электрический потенциал  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  не должен зависеть от  $\mathbf{x}$ , и должны быть выполнены граничные условия (1.33) или (1.34), (1.35).

Граничные условия на электродированных поверхностях можно реализовать в ANSYS следующим образом. Узлы конечно-элементной сетки, принадлежащие отдельному электроду  $\Gamma_{\varphi_j}$ , свяжем в один узел (coupled DOF) командой **CP**. Далее, для выбранного по **CP** представителя, например, узла с номером **N\_VOLT**, можно либо задать значения потенциала  $VJ = V_j$  по команде **D,N\_VOLT,VOLT,VJ**, либо определить суммарный заряд  $QJ = Q_j$  командой **F,N\_VOLT,CHRG,QJ** (для конечных элементов **PLANE223**, **SOLID226**, **SOLID227**) или командой **F,N\_VOLT,AMPS,QJ** (для конечных элементов **PLANE13**, **SOLID5**, **SOLID98**).

Блок команд для определения группы узлов и задания значения потенциала на первом электроде выглядит следующим образом:

```
NSEL,S,LOC,Y,-H/2
NSEL,R,LOC,X,0,R1
CP,1,VOLT,ALL
*GET,N_VOLT1,NODE,,NUM,MIN
D,N_VOLT1,VOLT,-VINP
```

Если требуется задать свободный электрод, т.е. выполнить условия (1.34), (1.35) с  $Q_j = 0$ , то достаточно определить группу командой **CP**, но не использовать команду **D**.

**Механические граничные условия.** В рассматриваемом примере нужно поставить условие симметрии относительно оси вращения (оси  $Oy$ ) и условие закрепления средней крайней точки по оси  $Oy$ .

Ограничение на степени свободы (для элемента **PLANE223** с опцией пьезоэлектрического анализа **KEYOPT(1) = 1001** их три: **UX**, **UY**, **VOLT**) здесь можно задать либо с помощью команды **D**, которая задает ограничение на степени свободы на узлах, либо с помощью команды **DL**,

которая задает ограничение на степени свободы на линиях. Следует иметь в виду, что все «твердотельные» граничные условия будут преобразованы в «конечно-элементные» граничные условия на этапе решения задачи. При этом, «твердотельные» граничные условия на заданной линии имеют приоритет над «конечно-элементными» граничными условиями на узлах той же линии.

Условие симметрии можно задать как с помощью команды **DL**, так и с помощью команды **D**. В команде **DL** можно использовать опцию *SYMM* (как это сделано в примере: **DL,8,,SYMM**). Другой способ состоит в том, чтобы выбрать нужные узлы и воспользоваться командой **D**. Выбрать узлы, лежащие на линии **L8**, можно с помощью команд

```
LSEL,S,LINE,,8  
NSLL,S,1
```

где последняя команда обеспечивает выбор узлов, принадлежащих выбранным линиям, а ее второй аргумент содержит ключ выбора внутренних узлов (0 — выбор только внутренних узлов, 1 — выбор внутренних и внешних узлов).

Команда **D,ALL,UX,0** задает для всех выбранных узлов равенство нулю компоненты **UX** вектора перемещений, что соответствует симметрии относительно оси *Oy*. Аналогично команда **D,ALL,UY,0** будет задавать для всех выбранных узлов равенство нулю компоненты **UY** вектора перемещений, что будет соответствовать симметрии относительно оси *Ox*.

Отметим, что как можно проверить, в рассматриваемой осесимметричной задаче в **ANSYS** условия симметрии на линии  $x = 0$  будут обеспечиваться автоматически, и команда **DL,8,,SYMM** в примере приведена для надежности.

Условие жесткого закрепления предполагает, что для заданных узлов вектор перемещений равен нулю, т.е. в случае плоской задачи **UX=0** и **UY=0**. Соответствующий блок команд будет иметь вид

```
D,ALL,UX,0  
D,ALL,UY,0
```

При этом в рассматриваемом примере используется только закрепление по оси *Oy*, т.е. **UY=0**.

Конечно-элементная модель пьезоэлектрического диска с граничными условиями показана на рис. 3.8 (пункты меню *Plot* → *Elements*, для отображения граничных условий *PltCtrls* → *Symbols* → отметить *All applied BC*).

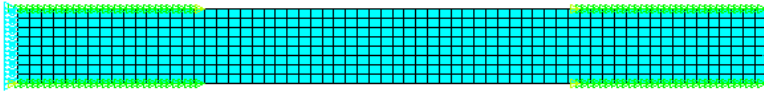


Рис. 3.8. Конечно-элементная сетка с граничными условиями

### Просмотр результатов

В постпроцессоре ANSYS можно вывести на экран полученные после решения конечно-элементной задачи результаты, используя, например, следующие перемещения по меню:

- *General Postproc* → *Plot Results* → *Deformed Shape* (деформированная форма);
- *General Postproc* → *Plot Results* → *Contour Plot* → *Nodal Solu. . .* → *DOF Solution* →
  - *X-Component of displacement* (для изображения картины распределения перемещений  $u_x$ );
  - *Y-Component of displacement* (для изображения картины распределения перемещений  $u_y$ );
  - *Displacement vector sum* (для вывода модуля вектора перемещений);
  - *Electric potential* (для вывода распределения электрического потенциала);
- *General Postproc* → *Plot Results* → *Vector Plot* → *Predefined* →
  - *DOF solution* → *Translation U* (для вывода распределения вектора перемещений);
  - *Flux & gradient* → *Elec field EF* (для вывода распределения вектора напряженности электрического поля).

Аналогичным образом можно получить распределения различных компонент напряжений, деформаций, вектора напряженности электрического поля и вектора электрической индукции.

Сохранить полученные рисунки можно несколькими способами.

- *PlotCtrls* → *Hard Copy* → *To File*. Будет открыто окно *Graphics Hard Copy*. Здесь можно указать цветовую шкалу (*Monochrome*, *Gray Scale*, *Color*), расширение графического файла (*.bmp*, *postscript*, *.tiff*, *.jpeg*, *.png*), отметить *Reverse Video* для инвертации черного и белого цветов, задать имя файла. При этом рисунок будет сохранен с инвертацией фона с

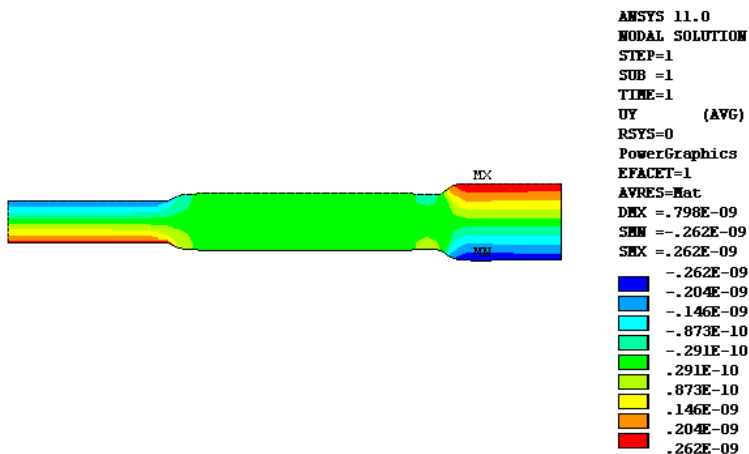


Рис. 3.9. Распределение перемещений UY

черного на белый в рабочей директории ANSYS, указанной при запуске программы.

- *PlotCtrls* → *Redirect Plots* → *To JPEG File ...* Будет открыто окно *Redirect Plots to JPEG*, где можно выбрать различные режимы сохранения графического файла (*Color* или *Monochromatic*, *Quality* и т.д.) и сохранить файл в формате JPEG. Аналогично вместо *To JPEG File...* можно выбрать окна сохранения картинок в других графических форматах.
- *PlotCtrls* → *Capture Image*. Рисунок будет открыт в новом окне. Пункты меню *File* → *Save as...* позволят сохранить рисунок в выбранной папке без инвертации фона как графический файл с расширением *.bmp*).
- *PlotCtrls* → *Write Metafile*. Рекомендуется выбрать *Invert White/Black* для инвертации фона с черного на белый. Рисунок можно сохранить в выбранной папке как метафайл файл с расширением *.emf* или *.wmf*.

В результате расчетов в ANSYS 11.0 по программе, содержащейся в файле *FE\_Mod\_CP\_1.inp*, в конце будет выполнена команда **PLNSOL,U,Y** и будет показана картинка распределения перемещений UY (рис. 3.9).

Здесь следует помнить, что решалась осесимметричная задача в меридиональной плоскости, ось *OY* соответствует оси *Oz* в трехмерном пространстве, а ось *OX* — оси *Or*. Поэтому UY есть в реальности перемещение  $u_z$ , UX —  $u_r$  и т.д.

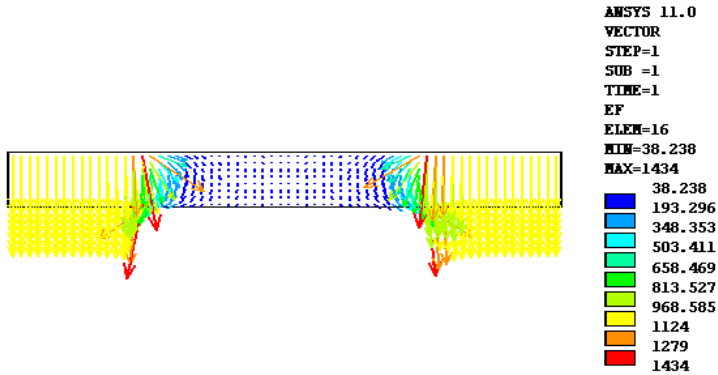


Рис. 3.10. Распределение вектора напряженности электрического поля

Далее в постпроцессоре легко получить картинки распределения других механических и электрических полевых характеристик. Например, на рис. 3.10 показано распределение вектора напряженности электрического поля.

Проанализируем полученные результаты как с физической, так и с математической точки зрения. Между электродами 1 и 2 (т.е. между сплошными электродами в зоне  $0 \leq X \leq R_1$ ) и между электродами 3 и 4 (т.е. между кольцевыми электродами в зоне  $R_2 \leq X \leq R$ ) подается разность потенциалов  $\Delta V = \varphi|_{Y=-H/2} - \varphi|_{Y=H/2} = -2V_{inp}$ . Тогда в областях между этими электродами следует ожидать электрическое поле порядка  $E \sim \Delta V/H = -2V_{inp}/H = -1000$  (В/м), поскольку  $V_{inp} = 1$  (В),  $H = 0.002$  (м). Эти значения электрических полей и наблюдаются на рис. 3.10 (см. шкалу и векторы желтого цвета с соответствующими значениями). Для зоны  $0 \leq X \leq R_1$  между сплошными электродами направление вектора поляризации  $\mathbf{P}$  противоположно направлению генерируемого поля  $\mathbf{E}$ . Поэтому в силу явления обратного пьезоэффекта (см. раздел 1.3) пьезоэлемент в этой области должен сжиматься. Наоборот, в зоне  $R_2 \leq X \leq R$  между кольцевыми электродами направление вектора поляризации  $\mathbf{P}$  совпадает с направлением генерируемого поля  $\mathbf{E}$ . Тогда также в силу явления обратного пьезоэффекта пьезоэлемент в области  $R_2 \leq X \leq R$  должен расширяться. Именно такие деформации

зон под электродами наглядно демонстрирует рис. 3.9. Таким образом, ожидаемая физика электромеханических процессов в рассматриваемой задаче для пьезокерамического преобразователя с многоэлектродным покрытием подтверждается результатами, представленными на рис. 3.9, 3.10.

При проведении конечно-элементных расчетов важно помнить, что они являются приближенными. Поэтому необходимо ответить на вопрос, насколько точны полученные результаты, а в каких случаях не стоит даже ожидать сходимости. В приведенном выше тексте программы характеристики конечно-элементной сетки определялись в следующем блоке команд:

```
! Параметры конечно-элементной сетки
SM=1.00 ! масштабный множитель (scaling multiplier)
HDIV=8*SM ! Кол-во КЭ по толщине диска
R1DIV=16*SM ! Кол-во КЭ по радиальному направлению от 0 до R1
R12DIV=32*SM ! Кол-во КЭ по радиальному направлению от R1 до R2
R23DIV=16*SM ! Кол-во КЭ по радиальному направлению от R2 до R
```

**Таблица 3.7.** Данные для анализа сходимости результатов

SM	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\max u_y \cdot 10^{-12}$ (м)	255	260	262	262	262	262	262	262
$\max  \mathbf{E} $ (В/м)	1001	1141	262	1293	1564	1685	1798	1904

Поэтому для анализа сходимости можно провести расчеты по приведенной программе, меняя параметр  $SM$ . Результаты серии таких расчетов приведены в таблице 3.7. Как видно из таблицы, максимальные значения перемещений стабилизируются уже при  $SM=0.75$  и далее при увеличении параметра  $SM$ , т.е. при уменьшении размеров конечных элементов, значения перемещений практически не меняются. Таким образом, из данных таблице 3.7 можно сделать вывод о том, что для оценки максимальных смещений в данной задаче достаточно взять  $SM=0.75$ , но и при  $SM=0.25$  относительная погрешность определения перемещений оказывается менее 3 %, что вполне достаточно для большинства практических приложений. Значение  $SM=0.25$  означает, что по толщине диска берется всего два конечных элемента ( $HDIV = 2$ ). Такое достаточно грубое разбиение здесь оказывается удовлетворительным для определения смещений, поскольку рассматриваемая задача является статической, имеет достаточно простую геометрию, а элементы **PLANE223** являются конечными элементами с квадратичной аппроксимацией по каждой канонической переменной.

Между тем, как видно из рис. 3.10, вектор напряженности электрического поля достаточно сильно изменяется в окрестности границ электродированных поверхностей (длинные векторы красного цвета). Данные из таблицы 3.7 показывают, что с увеличением плотности конечно-элементной сетки максимальные значения модуля вектора напряженности электрического поля возрастают, и никакой сходимости этого значения не наблюдается. Этот эффект также вполне ожидаем, поскольку в задачах электроупругости поверхностные электроды являются концентраторами для различных компонент электромеханических полей напряжений, деформаций, напряженности электрического поля и электрической индукции (т. е. для градиентных или потоковых величин, определяемых через производные от перемещений и электрического потенциала). Роль поверхностных электродов в таких задачах аналогична роли штампов с негладкими границами в контактных задачах. Поэтому, как и в аналогичных контактных задачах, вблизи границ электродов некоторые компоненты напряжений, деформаций, напряженности электрического поля и электрической индукции могут иметь корневые особенности типа  $1/\sqrt{\bar{r}}$ , где  $\bar{r}$  — расстояние от границы электрода. Естественно, что тогда при использовании обычных изопараметрических конечных элементов будет наблюдаться рост величин этих полей вблизи границ электродов. Для практики это означает, что конкретные значения подобных потоковых величин в малой области вблизи границ электродов здесь не имеют особого смысла, но вдали от границ электродов сходимость будет иметь место. Также будут сходиться и их интегральные величины (например, суммарный электрический заряд).

Сказанное выше иллюстрирует график (рис. 3.11) изменения осевой компоненты напряженности электрического поля  $E_z$  ( $\mathbf{EF}$ ,  $\mathbf{Y}$  — в ANSYS) вдоль радиуса диска на его верхней поверхности ( $0 \leq X \leq R$ ,  $Y = H/2$  — в ANSYS), построенный с помощью следующих команд постпроцессора ANSYS:

```
! Файл      FE_Mod_CP_1_Post.inp
! Постпроцессорный вывод графиков

/PLOPTS,INFO,ON
/COLOR,CURVE,WHIT,1,6 ! цвет графиков - белый (черный при инвертации)
/COLOR,GRID,WHIT,    ! цвет сетки - белый (черный при инвертации)

/PLOPTS,TITLE,OFF ! заголовка графика нет
/PLOPT,FRAME,OFF ! рамки нет
/AXLAB,X,r      ! подпись к оси X (r)
/AXLAB,Y, E_Z ! подпись к оси Y (z)
/GROPT,DIVX,4 ! Количество делений по оси X
```

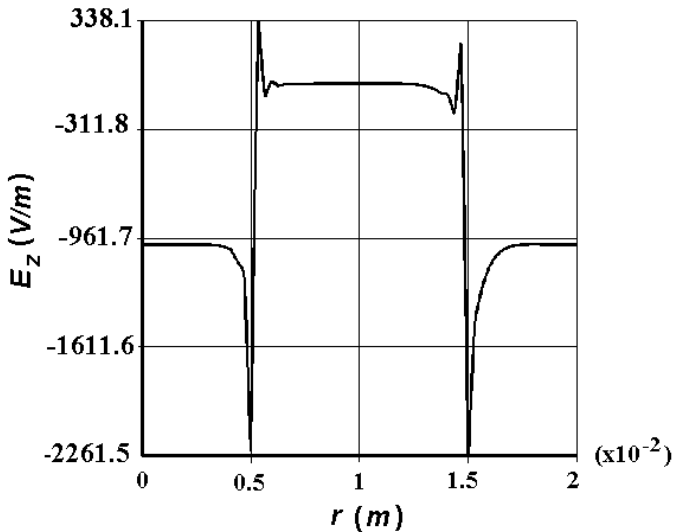


Рис. 3.11. Поведение компоненты  $E_z$  на поверхности диска

```

/GROPT,DIVY,4 ! Количество делений по оси Y
/GROPT,DIG2,1 ! Количество цифр после запятой

! Команды определения пути с опорными точками
PATH,XX,4,,120
PPATH,1,,0,H/2
PPATH,2,,R1,H/2
PPATH,3,,R2,H/2
PPATH,4,,R,H/2
! Определение величины E_Z для построения графика
вдоль пути
PDEF,E_Z,EF,Y
! Определение других величин
! (если понадобится для них строить графики)
PDEF,T_ZZ,S,Y $ PDEF,T_RR,S,X
PDEF,D_Z,D,Y $ PDEF,D_R,D,X $ PDEF,E_R,EF,X

PLPATH,E_Z ! Построение графика E_Z вдоль пути

```

Представленные на рис. 3.11 конечно-элементные результаты для зависимости  $E_z = E_z(r)$  не точны в окрестности границ электродов  $R_1 = 0,5 \cdot 10^{-2}$  (м) и  $R_2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$  (м). Если, например, при  $r < R_1$  эта кривая несколько напоминает функцию с корневой особенностью



$k\sqrt{R_1^2 - r^2}$ , то всплеск функции при  $r > R_1$  полностью определяется только погрешностью конечно-элементных аппроксимаций и принятых способов осреднения при вычислении градиентов полей. Однако вдали от границ электродов поле определяется достаточно точно.

Аналогичным образом можно проанализировать и поведение других градиентных величин электромеханических полей:  $E_r$ ,  $D_z$ ,  $D_r$ ,  $\sigma_{zz}$ , и т. д.

### 3.1.2. Индивидуальные задания

Написать программу на языке APDL ANSYS для расчета статического деформирования пьезоэлектрического преобразователя с многоэлектродным покрытием в двумерной постановке (осесимметричная задача или задача о плоской деформации). Дать анализ сходимости при различной плотности конечно-элементной сетки. Привести рабочий вариант конечно-элементной сетки с элементными системами координат. Вывести результаты расчетов (деформированную форму, распределения перемещений, электрического потенциала, вектора электрического поля, вектора электрической индукции, напряжений по Мизесу, график вдоль по пути с поверхностными электродами характерной компоненты вектора электрического поля). Проанализировать результаты и оформить отчет.

Отчет должен содержать данные об исполнителе, описание задачи, а также указанные выше результаты, полученные с помощью вычислительного комплекса ANSYS.

Варианты индивидуальных заданий собраны в следующей таблице. Все секции пьезоэлектрических преобразователей выполнены из пьезокерамики PZT-4, материальные свойства которой приведены выше в файле примера. Электродированные поверхности выделены на рисунках жирными линиями или точками, и около них приведены значения электрического потенциала или суммарного электрического заряда. Границы с условиями жесткого закрепления помечены снаружи штриховкой, треугольники снаружи границ означают условия закрепления в соответствующей точке двумерного сечения ( $\triangleleft$  или  $\triangleright$ :  $UX=0$ ,  $\triangle$ :  $UY=0$ ). На участках границы без указанных выше меток выполняются однородные естественные условия ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$  и/или  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ ). Для осесимметричных задач ось вращения  $Y$  показана на соответствующих рисунках пунктирной линией слева.

Таблица 3.8. Варианты заданий лабораторной работы № 1

№	Рисунок задачи	Данные
1		Плоская деформация. $a_1 = a_4 = 8 \cdot 10^{-3}$ м, $a_2 = a_3 = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $H = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $V = 10$ В
2		Осесимметричная задача. $a_1 = a_4 = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $a_2 = a_3 = 8 \cdot 10^{-3}$ м, $H = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $V = 5$ В
3		Плоская деформация. $a_1 = a_4 = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $a_2 = a_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $H = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $V = 5$ В
4		Осесимметричная задача. $a_1 = a_3 = 0.02$ м, $a_2 = 0.03$ м, $H = 0.005$ м, $V = 10$ В
5		Плоская деформация. $a_1 = a_3 = 0.03$ м, $a_2 = 0.04$ м, $H = 0.004$ м, $V = 10$ В
6		Осесимметричная задача. $a_1 = a_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $a_2 = a_4 = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $H = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $V = 10$ В

Таблица 3.8. Варианты заданий лабораторной работы № 1 (продолжение)

7		<p>Оссимметричная задача.  <math>a_1 = 0.01</math> м, <math>a_3 = 0.02</math> м,  <math>a_2 = 0.03</math> м,  <math>H = 0.005</math> м,  <math>V = 5</math> В</p>
8		<p>Плоская деформация.  <math>a_1 = a_3 = 0.03</math> м,  <math>a_2 = 0.04</math> м,  <math>H = 0.006</math> м,  <math>V = 10</math> В</p>
9		<p>Плоская деформация.  <math>a_1 = a_3 = 7 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>a_2 = a_4 = 8 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>H = 3 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>V = 10</math> В</p>
10		<p>Оссимметричная задача.  <math>a_1 = a_2 = 8 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>a_3 = a_4 = 6 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>H = 3 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>V = 5</math> В</p>
11		<p>Оссимметричная задача.  <math>a_1 = a_3 = 0.01</math> м,  <math>a_2 = 0.02</math> м,  <math>H = 0.005</math> м,  <math>V = 5</math> В</p>
12		<p>Плоская деформация.  <math>a_1 = a_3 = 0.02</math> м,  <math>a_2 = 0.04</math> м,  <math>H = 0.008</math> м,  <math>V = 10</math> В</p>

Таблица 3.8. Варианты заданий лабораторной работы № 1 (продолжение)

13		<p>Осесимметричная задача.  <math>a_1 = a_3 = 9 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>a_2 = a_4 = 11 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>H = 3 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>V = 10</math> В</p>
14		<p>Плоская деформация.  <math>a_1 = a_4 = 11 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>a_2 = a_3 = 9 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>H = 2 \cdot 10^{-3}</math> м,  <math>V = 5</math> В</p>
15		<p>Плоская деформация.  <math>a_1 = a_3 = 0.015</math> м,  <math>a_2 = 0.03</math> м,  <math>H = 0.004</math> м,  <math>V = 5</math> В</p>

### 3.2. Лабораторная работа №2. Плоская задача о нагреве и охлаждении термоупругого тела

#### Цель работы

1. Изучить основные особенности решения нестационарных задач термоупругости в ANSYS APDL на примере плоской задачи о медленном нагреве и охлаждении тела в форме буквы «R» (файл примера FE\_Mod\_CP\_2.inp, с. 136). Определить возможности решения задач с неполной связанностью механических и температурных полей и с пренебрежением динамических слагаемых в уравнениях движения.
2. Составить программу на языке APDL ANSYS для индивидуальной нестационарной задачи для двумерного термоупругого тела в условиях плоской деформации.
3. Провести расчеты, проанализировать результаты и оформить отчет.

### 3.2.1. Краткие сведения о решении в ANSYS нестационарных задач термоупругости для изотропных тел

Постановка нестационарных задач термоупругости была приведена ранее в разделе 1.4. В нее входили полевые уравнения (1.110), (1.111), определяющие соотношения (1.112), (1.113), формулы (1.114), (1.115), граничные условия (1.120)–(1.124) и начальные условия (1.125).

Отметим, что многие термоупругие материалы являются изотропными, и их модули из (1.112), (1.113), (1.115) имеют следующую структуру

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.7)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}, \quad k_{ij} = k \delta_{ij}, \quad (3.8)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ламе ( $\mu = G$  называется еще модулем сдвига),  $\gamma$  — коэффициент температурных напряжений,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Для изотропных материалов определяющие соотношения (1.112), (1.113) в покомпонентной записи можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij}, \quad (3.9)$$

$$S = \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{\rho c_\varepsilon}{T_0} \theta, \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}$ .

Тогда, используя (1.118), (1.119), (3.7), (3.8), систему дифференциальных уравнений линейной термоупругости относительно компонент перемещений  $u_i$  и температуры  $\theta$  для изотропных сред можно представить в форме:

$$\underline{\rho u_{i,tt}} - (\lambda u_{k,k})_{,i} - [\mu (u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + (\gamma \theta)_{,i} = \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.11)$$

$$\rho c_\varepsilon \theta_{,t} - (k \theta_{,j})_{,j} + \underline{T_0 \gamma u_{k,kt}} = W. \quad (3.12)$$

В (3.11), (3.12) подчеркнуты члены, которые во многих случаях можно опустить без существенной потери точности. Так, как отмечалось в разделе 1.4, подчеркнутый член в (3.12) в большинстве задач термоупругости оказывается малым и может не учитываться (теория температурных напряжений). В такой модели в (3.12) формально можно положить  $T_0 = 0$ , что сводит (3.12) к классическому уравнению нестационарной теплопроводности. Видно, что уравнение (3.12) с  $T_0 = 0$  вместе с граничными условиями (1.122)–(1.124) и начальными условиями (1.125) для температуры дает несвязанную задачу теплопроводности, из которой поле  $\theta$  определяется независимо от поля перемещений  $\mathbf{u}$ .

Систему (3.11), (3.12) можно дополнительно упростить, если опустить подчеркнутое слагаемое в (3.11). В этом случае уравнение движения (3.11) превращается в более простое уравнение статики (точнее, квазистатики). Такое упрощение подходит для многих нестационарных задач, когда внешние тепловые воздействия меняются по времени много медленнее по сравнению с характерными временами распространения упругих волн.

Дадим некоторые комментарии относительно материальных свойств изотропных сред. Как видно из (3.11), (3.12), изотропные термоупругие среды характеризуются шестью материальными модулями: плотностью  $\rho$ ; параметрами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$ ; коэффициентом температурных напряжений  $\gamma$ ; коэффициентом теплопроводности  $k$  и удельной теплоемкостью  $c_\varepsilon$ , вычисленной при постоянных деформациях. Однако, вместо параметров  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  и  $c_\varepsilon$  чаще используются следующие величины: модуль Юнга  $E$ ; коэффициент Пуассона  $\nu$ ; коэффициент температурных расширений  $\alpha$  и удельная теплоемкость  $c_\sigma$ , вычисленная при постоянных напряжениях. Данные модули фигурируют в определяющих соотношениях, связывающих пары  $(\varepsilon_{ij}, S)$  и  $(\sigma_{ij}, \theta)$ :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} + \alpha\theta\delta_{ij}, \quad (3.13)$$

$$S = \alpha\sigma_{kk} + \frac{\rho c_\sigma}{T_0}\theta. \quad (3.14)$$

Из (3.9), (3.10), (3.13), (3.14) можно получить, что эти модули выражаются друг через друга по формулам:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \alpha = \frac{(1 - 2\nu)}{E}\gamma, \quad c_\sigma = c_\varepsilon + \frac{3T_0\alpha\gamma}{\rho}. \quad (3.15)$$

В ANSYS APDL задание материальных свойств  $\rho$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $k$  и  $c_\sigma$  можно осуществить по командам **MP**, *Lab*, *MAT*, *C0*, где *Lab* — наименование модуля, *MAT* — номер группы материальных свойств, *C0* — значение модуля с наименованием *Lab*. Здесь *Lab* = **DENS** определяет плотность  $\rho$ ; *Lab* = **EX** — модуль Юнга  $E$ ; *Lab* = **NUXY** или *Lab* = **PRXY** — коэффициент Пуассона (для изотропных сред **NUXY**=**PRXY**); *Lab* = **ALPX** — коэффициент температурных расширений; *Lab* = **KXX** — коэффициент теплопроводности; *Lab* = **C** — удельная теплоемкость, вычисленная при постоянных напряжениях.

Все эти модули могут также зависеть от температуры по полиномиальному закону, если использовать команду **MP**, *Lab*, *MAT*, *C0*, *C1*, *C2*, *C3*, *C4*. Тогда величина с наименованием *Lab* будет вычисляться по формуле

$C0 + C1\theta + C2\theta^2 + C3\theta^3 + C4\theta^4$ , и задача становится нелинейной по  $\theta$ , если любая из величин  $C1, C2, C3, C4$  будет отлична от нуля.

Для решения связанных задач термоупругости в ANSYS предназначены следующие конечные элементы: **PLANE223** с KEYOPT(1)=11 — двумерный четырехугольный элемент с 8 узлами; **SOLID226** с KEYOPT(1)=11 — гексаэдр с 20 узлами; **SOLID227** с KEYOPT(1)=11 — тетраэдр с 10 узлами. Эти элементы позволяют решать нестационарные задачи, задачи об установившихся колебаниях и стационарные задачи термоупругости.

«Устаревшие» конечные элементы **PLANE13** с KEYOPT(1)=4 (двумерный четырехугольный элемент с четырьмя узлами), **SOLID5** с KEYOPT(1)=0 (гексаэдр с восемью узлами) и **SOLID98** с KEYOPT(1)=0 (тетраэдр с десятью узлами) могут применяться для решения нестационарных и стационарных задач температурных напряжений. К уравнениям теории температурных напряжений можно прийти и с использованием элементов **PLANE223**, **SOLID226** и **SOLID227**, если задать  $T_0 = 0$ . Последнее можно сделать, применив команду APDL ANSYS **TOFFST, 0**.

Для моделирования задач температурных напряжений, когда опускается динамическое слагаемое в (3.11), но в (3.12) с  $T_0 = 0$  используется нестационарное уравнение для температуры, можно задать малую плотность  $\tilde{\rho} = \kappa\rho$ , где  $\kappa \ll 1$ , а  $c_p$  заменить на  $\tilde{c}_p = \kappa^{-1}c_p$ . Тогда уравнение (3.12) будет выполняться, поскольку  $\tilde{\rho}\tilde{c}_p = \rho c_p$ , и  $c_p = c_\varepsilon$  при  $T_0 = 0$ .

Имеются и другие подходы к решению в ANSYS задач термоупругости с различной связанностью, разработанные до введения конечных элементов **PLANE223**, **SOLID226** и **SOLID227**. С этими подходами можно ознакомиться по фирменной документации ANSYS в разделе **Coupled-Field Analyses Guide**.

### 3.2.2. Описание модельной задачи и методов ее решения

#### Постановка задачи

Рассматривается нестационарная задача термоупругости для плоской фигуры в форме латинской буквы «R». Геометрия области, отнесенной к декартовой системе координат  $Oxy$ , показана на рис. 3.12, *a*. Размеры тела определяются следующими параметрами: высота  $HL = 0.14$  (м); ширина  $WL = 0.08$  (м); ширина стенок  $WWL = 0.02$  (м); дополнительный размер по высоте  $HAL = 0.07$  (м). Криволинейные части фигуры описываются частями эллипсов с параметром эллиптичности  $PEL = (HAL/2)/(WL - WWL)$ , который задает отношение размера эллипса по оси  $y$  к размеру эллипса по оси  $x$ .

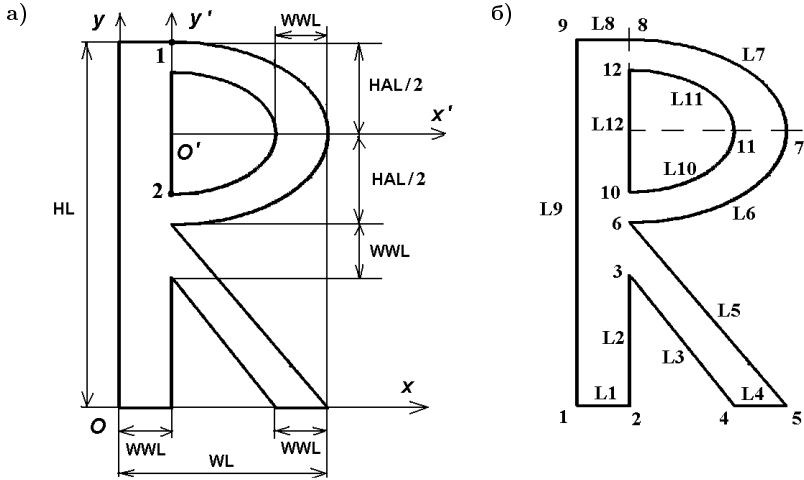


Рис. 3.12. Геометрия области: схема с размерами (а); нумерация точек и линий (б)

Примем, что материалом области является сталь (изотропный материал) с модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>), коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.29$ , плотностью  $\rho = 7800$  (кг/м<sup>3</sup>), коэффициентом теплопроводности  $k = K_{XX} = 46.7$  (Вт/(м · К)), коэффициентом температурного расширения  $\alpha = 1.51 \cdot 10^{-5}$  (1/К) и удельной теплоемкостью  $c_\sigma = 462$  (Дж/(кг · К)), вычисленной при постоянных напряжениях.

Предполагается, что на нижней грани температура  $\theta$  все время равна 0°C. В начальный момент времени  $t = 0$  тело находится в состоянии покоя. Далее с начального момента до времени  $t = TES1 = 10$  (с) на верхней грани температура линейно возрастает от нуля до 90°C. После этого на верхней грани принимаются условия конвективного теплообмена с коэффициентом теплообмена  $h_f = 60$  (Вт/(м<sup>2</sup> · К)) и температурой окружающей среды  $\theta_b = 0^\circ\text{C}$ . Все остальные границы для всех рассматриваемых времен принимаются теплоизолированными, т.е. такими, на которых нормальная компонента вектора потока тепла равна нулю:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0$ . Нижняя граница тела все время считается жестко закрепленной.

В задаче требуется определить поля температур и перемещений в интервале времени  $t \in [0, TES2]$ ,  $TES2 = 120$  с, построить графики зависимости температуры  $\theta$  и перемещений  $u_y$  от времени для двух контрольных точек  $\mathbf{x}_1 = [WWL, HL]$  и  $\mathbf{x}_2 = [WWL, HL - HAL/2 -$



$(WL - 2 * WWL) * PEL]$  (см. рис. 3.12, а, где точки помечены цифрами 1 и 2).

С целью исследования влияния связанности и динамических эффектов нужно также сравнить результаты для трех разновидностей задач:

- 1) нестационарной задачи термоупругости с полной связанностью;
- 2) нестационарной задачи термоупругости с частичной связанностью, когда задача для поля температуры не зависит от механических полей, т.е. совпадает с нестационарной с задачей теплопроводности;
- 3) задачи термоупругости с частичной связанностью, когда задача для поля температуры не зависит от механических полей, т.е. совпадает с нестационарной с задачей теплопроводности, а уравнения для перемещений рассматриваются в квазистатической постановке.

Для решения задачи предлагается программа FE\_Mod\_CP\_2.inp.

### Листинг входного файла FE\_Mod\_CP\_2.inp

```
! Файл FE_Mod_CP_2.inp
! Тестовая задача №2
! ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА
! ТЕРМОУПРУГОЕ ТЕЛО
! Нестационарная задача

! Инвертирование фона с черного на белый
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15

/PREP7
! Все величины в системе Си

TES1=10 ! Значение времени для окончания первого шага
TES2=120 ! Значение времени для окончания второго шага
! Подшаги по времени для временных шагов
DT1=1 ! Значение для шага 1
DT2=2 ! Значение для шага 2

! Условия для "температурного" анализа
T_INP1=0 ! Температура на нижней границе
T_INP2=90 ! Температура на правой верхней границе (на шаге 1)

T_EXT=0 ! Температура окружающей среды для конвективных условий
H_F=60 ! Коэффициент конвективного теплообмена

! Разность температур от нуля до абсолютного нуля
TOFFST, 273
```

```
! При TOFFST=0 тепловое уравнение есть уравнение теплопроводности
! TOFFST, 0
```

```
! Материальные свойства (сталь)
E1=2.1e11 ! Модуль Юнга
NU1=0.29 ! Коэффициент Пуассона
RH01=7.8e3 ! Плотность
K1=46.7 ! Коэффициент теплопроводности
C1=462 ! Удельная теплоемкость
ALPH1=1.51e-05 ! Коэффициент температурного расширения
```

```
MP,EX,1,E1
MP,DENS,1,RH01
MP,NUXY,1,NU1
MP,KXX,1,K1
MP,C,1,C1
MP,ALPX,1,ALPH1
```

```
! Команды для анализа возможности не учета
! динамических слагаемых в уравнениях движения
```

```
! KAPPA=1e-6
! MP,DENS,1,RH01*KAPPA
! MP,C,1,C1/KAPPA
```

```
ET,1,PLANE223,11,,2 ! Четырехугольный КЭ с 8 узлами,
! Степени свободы UX, UY, TEMP, плоская деформация
```

```
! Геометрические размеры тела в форме буквы "R"
HL=0.14 ! Высота
WL=0.08 ! Ширина
WWL=0.02 ! Ширина стенок буквы "R"
HAL=0.07 ! Дополнительный размер по высоте
```

```
! Параметры для триангуляции DMESH=WWL/4
```

```
! Параметр эллиптичности для криволинейной части
PEL=(HAL/2)/(WL-WWL)
! Эллиптическая система координат с номером 11
LOCAL,11,1,WWL,HL-HAL/2,,,,,PEL
CSYS,0 ! Переход в основную декартову систему координат
```

```
! Создание геометрии фигуры
! Внешняя часть - область 1
K,1,0,0
K,2,WWL,0
K,3,WWL,HL-HAL-WWL
```

```

K,4,WL-WWL,0
K,5,WL,0
K,6,WWL,HL-HAL
K,7,WL,HL-HAL/2
K,8,WWL,HL
K,9,0,HL
L,1,2 $ L,2,3 $ L,3,4 $ L,4,5 $ L,5,6

CSYS,11
L,6,7 $ L,7,8
CSYS,0
L,8,9 $ L,9,1
AL,1,2,3,4,5,6,7,8,9

! Отверстие - область 2
K,10,WWL,HL-HAL/2-(WL-2*WWL)*PEL
K,11,WL-WWL,HL-HAL/2
K,12,WWL,HL-HAL/2+(WL-2*WWL)*PEL
CSYS,11
L,10,11 $ L,11,12
CSYS,0
L,12,10
AL,10,11,12
ASBA,1,2 ! Вырезать из области 1 область 2

! Установка размера конечного элемента
ESIZE,DMESH

AMESH,ALL

! Условия жесткого закрепления
NSEL,S,LOC,Y,0 ! Выбор узлов внизу (по оси Y)
D,ALL,UX,0
D,ALL,UY,0
NSEL,ALL ! Вернуться к выбору всех узлов модели

! Выбор узлов для мониторинга результатов
! Узел N1_MON - в верхней части фигуры
! Y=HL, X=WWL
NSEL,S,LOC,Y,HL,HL
NSEL,R,LOC,X,WWL
*GET,N1_MON,NODE,,NUM,MIN
! Узел N2_MON - ниже по X=WWL

NSEL,S,LOC,Y,HL-HAL/2-(WL-2*WWL)*PEL
NSEL,R,LOC,X,WWL
*GET,N2_MON,NODE,,NUM,MIN

```

```
NSEL, ALL

FINISH

! Решение связанной задачи термоупругости
/SOLU ANTYPE,TRANS ! Решение нестационарной задачи
KBC,0 ! Линейный рост внешних воздействий

! Коэффициент затухания в схеме интегрирования по времени
!TINTP,0.005 ! TINTP=0.005 - по умолчанию
TIME, TES1 ! Время окончания шага 1
DELTIM, DT1 ! Подшаг по времени для шага 1

NSEL, S, LOC, Y, 0 ! Выбор узлов внизу (по оси Y)
! Задать для всех выбранных узлов TEMP=T_INP1
D, ALL, TEMP, T_INP1

NSEL, S, LOC, Y, HL, HL ! Выбор узлов сверху (по оси Y)
NSEL, R, LOC, X, 0, WWL
! Задать для всех выбранных узлов TEMP=T_INP2
D, ALL, TEMP, T_INP2

NSEL, ALL
! Запись в базу данных результатов NSOL для всех подшагов
OUTRES, BASIC, ALL
SOLVE

! Шаг 2
TIME, TES2
DELTIM, DT2
KBC, 1 ! Значения внешних воздействий постоянны

NSEL, S, LOC, Y, HL, HL ! Выбор узлов сверху (по оси Y)
NSEL, R, LOC, X, 0, WWL
DDEL, ALL, TEMP ! Удаление условий TEMP=T_INP2

SF, ALL, CONV, H_F, T_EXT ! Конвективный теплообмен в выбранных узлах

NSEL, ALL

SOLVE
SAVE
FINISH

! Вход в постпроцессор Time History Postprocessor
/POST26
/SHOW, WIN32C
```

```

/TRIAD,OFF      ! Не показывать начала координат и осей

/PLOPTS,INFO,2 ! Использовать формат вывода Auto-legend для
подписей
/PLOPTS,LEG2,OFF
/PLOPTS,LOGO,OFF ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде

/PLOPTS,FRAME,OFF ! Не показывать рамку
/PLOPTS,DATE,OFF ! Не показывать дату
/COLOR,CURVE,WHIT,1,6 ! Цвет графиков - белый (черный при инвертации)
/COLOR,GRID,WHIT ! Цвет сетки - белый (черный при инвертации)
/GMARKER,1,2,3 ! Для кривой 1 метка 2 - квадратики, на каждом
3-ем значении
/GMARKER,2,4,3 ! Для кривой 2 метка 4 - крестики, на каждом 3-м
значении
/GRID,1 ! Сетка по X и Y (полная сетка)

/XRANG,0,TES2
/AXLAB,Y,Temperature (degree) ! Подпись к оси Y
/AXLAB,X,Time (sec) ! Подпись к оси Y
NSOL,2,N1_MON,TEMP,,TEMP1 ! Переменная 2 - температура в узле
N1_MON
NSOL,3,N2_MON,TEMP,,TEMP2

NSOL,4,N1_MON,U,Y,UY1 ! Переменная 4 - перемещение UY в узле
N1_MON
NSOL,5,N2_MON,U,Y,UY2

PLVAR,2,3 ! Построение графиков переменных 2, 3 от времени
(переменной 1)

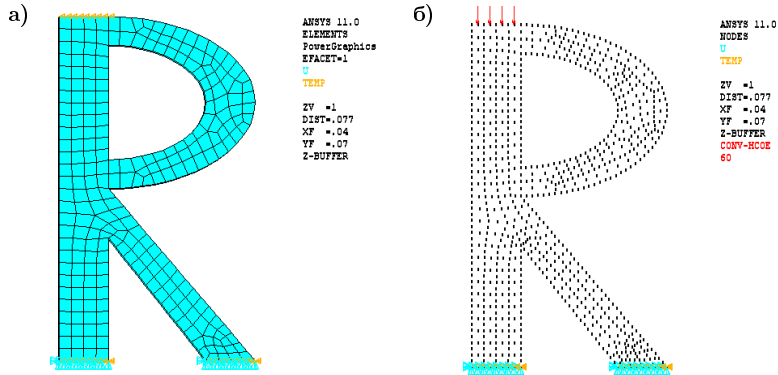
! Снять комментарии для вывода UY в контрольных узлах
! /AXLAB,Y,UY (m)
! PLVAR,4,5

```

В данной программе решается связанная линейная задача термоупругости в рамках предположения о плоской деформации, когда  $\mathbf{u} = \{u_x(x, y, t), u_y(x, y, t), 0\}$ ,  $\theta = \theta(x, y, t)$ .

Как и в примере из первой лабораторной работы, здесь вначале строится твердотельная модель, а затем, из нее на основе нее — конечно-элементная. Твердотельная модель получается методом построения геометрических объектов «снизу — вверх». Для этого сначала задаются опорные точки, потом — линии (см. рис. 3.12, б), а затем двумерные области.

Для построения плоской модели строятся две односвязные области: первая область, ограниченная внешними линиями буквы «R», и вторая



**Рис. 3.13.** Конечно-элементная модель: элементы и граничные условия на первом временном шаге (а); узлы и граничные условия на втором временном шаге (б)

область, ограниченная внутренними линиями. Затем с использованием булевой операции вычитания геометрических областей (команда **ASBA**) получается итоговая область буквы «R» с отверстием. При этом криволинейные части буквы «R» строятся как части эллипсов в соответствующей эллиптической системе координат.

Конечно-элементная модель получается с использованием свободного разбиения на четырехугольные элементы **PLANE223** с соответствующими опциями. Для определения густоты конечно-элементной сетки используется единственный параметр *DMESH*, задающий максимальный размер элементов. Структура конечно-элементной сетки при *DMESH = WWL/4* показана на рис. 3.13 (а — элементы, б — узлы).

На рис. 3.13 показаны также внешние воздействия на различных временных шагах. (Для показа граничных условий в интерактивном режиме следует из верхнего меню выполнить: *Plot* → *Elements* или *Plot* → *Nodes*, *PlotCtrls* → *Symbols* → Отметить *All Applied BCs*. Для отображения стрелками условий конвективного теплообмена в пункте *Surface Load Symbols* можно задать вывод *Convect FilmCoef* и для *Show pres and convect as* выбрать *Arrows*.)

Решение нестационарной задачи разбивается на два шага по времени  $t \in [0, TES1]$  и  $t \in [TES1, TES2]$ . На каждом временном шаге конечно-элементная система обыкновенных дифференциальных уравнений нестационарной термоупругости (1.165), (1.166) интегрируется по времени с под-

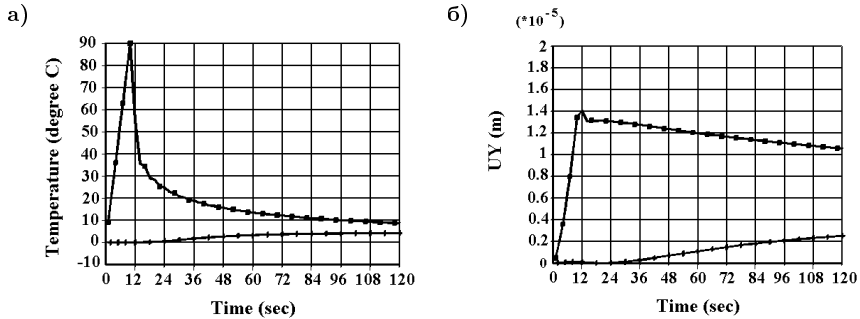


Рис. 3.14. Температура  $\theta_h(\mathbf{x}_j, t)$  (а) и смещения  $u_{yh}(\mathbf{x}_j, t)$  в характерных точках

шагом  $\Delta t_j$  ( $\Delta t_1 = 1$  с,  $\Delta t_2 = 2$  с) по модифицированной схеме Ньюмарка [25].

Отметим, что на первом и втором шагах по времени задаются различные граничные условия на верхней границе. На первом временном шаге задана температура (рис. 3.13, а) с линейным изменением по времени (**КВС,0**), а на втором шаге вместо значений температуры на верхней границе задается условие конвективного теплообмена (рис. 3.13, б), обеспечивающее здесь охлаждение тела. Параметры этого краевого условия (коэффициент теплообмена и температура окружающей среды) постоянны на втором временном шаге, что определяется командой **КВС,1**.

После решения задачи в постпроцессоре **POST26** программа строит графики зависимости температуры от времени в характерных точках  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ . Эти зависимости приведены на рис. 3.14, а, а) где квадратиками отмечен график для  $\theta_h(\mathbf{x}_1, t)$ , а крестиками — для  $\theta_h(\mathbf{x}_2, t)$ . После выполнения двух закоментированных команд из файла программы можно получить графики зависимости от времени перемещений  $u_{yh}(\mathbf{x}_1, t)$  и  $u_{yh}(\mathbf{x}_2, t)$ . Эти кривые приведены на рис. 3.14, б, где аналогично квадратиками отмечен график для  $u_{yh}(\mathbf{x}_1, t)$ , а крестиками — для  $u_{yh}(\mathbf{x}_2, t)$ .

Как видно из рис. 3.14, на этапе охлаждения температура на верхней границе спадает значительно быстрее, чем уменьшаются перемещения  $u_y$ . Кроме того, внутри тела температура и смещения постепенно выравниваются, причем температура и перемещения внутри тела могут на этапе охлаждения даже возрасти на некотором промежутке времени.

Далее в интерактивном режиме в основном постпроцессоре **POST1** можно посмотреть картинки распределения различных узловых величин **NSOL** для каждого временного подшага. Для этого нужно вначале из

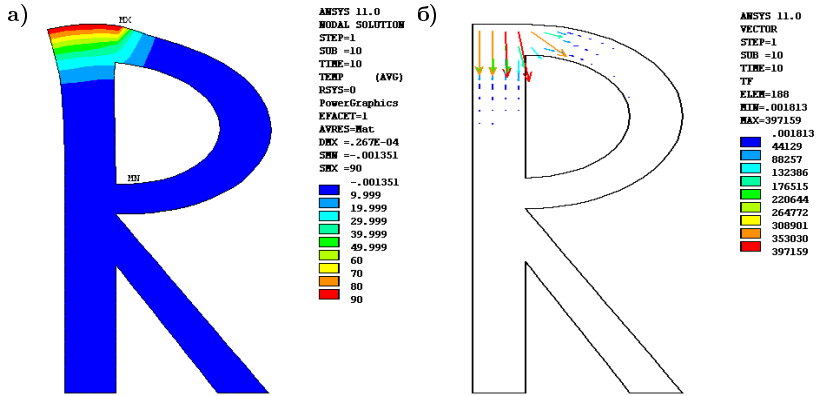


Рис. 3.15. Некоторые результаты в конце этапа нагрева: температура (а) и вектор потока тепла (б)

файла результатов считать данные для выбранного подшага, например, следующим образом: *General PostProc* → *Read Results* → *By Pick* → выбрать значение подшага по времени → *Read* → *Close*. Затем можно уже выводить распределения интересующих величин NSOL обычным образом. Например, *General PostProc* → *Plot Results* → *Contour plot* → *Nodal Solution* → *DOF Solution* → *Nodal Temperature* — для поля температуры; *General Postproc* → *Plot Results* → *Vector Plot* → *Predefined* → *Flux & gradient* → *Thermal flux TF* — для векторного показа потока тепла; и т.д.

Так, на рис. 3.15 приведены некоторые результаты для времени окончания первого временного шага  $t = TES1$ , т.е. в конце этапа нагрева: рис. 3.15, а — распределение поля температуры, рис. 3.15, б — векторный показ поля потока тепла. Аналогичные результаты на завершающем этапе мониторинга процесса охлаждения  $t = TES2$  показаны на рис. 3.16.

Эти и другие рисунки наглядно демонстрируют распространение тепла в теле. Нужно только учитывать, что цветовая палитра на разных картинках соответствует каждый раз совершенно различным диапазонам значений.

Если в программе **FE\_Mod\_CP\_2.inp** снять знак комментария в строке

```
! TOFFST, 0
```

т. е. выполнить команду **TOFFST, 0**, то будут проведены расчеты задачи о температурных напряжениях.

Если же дополнительно снять комментарии в строках



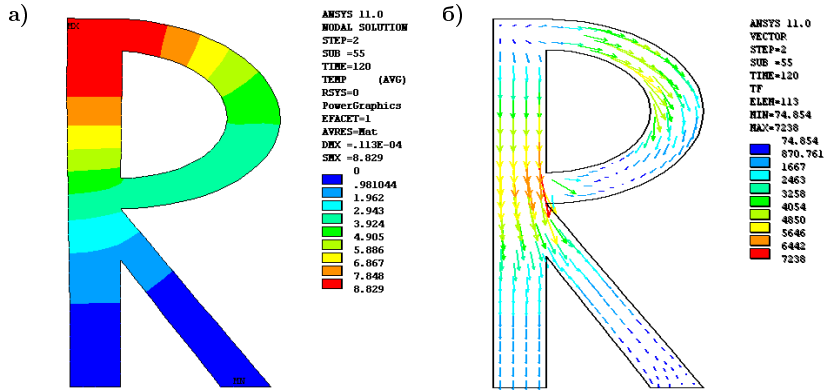


Рис. 3.16. Некоторые результаты в конце этапа мониторинга: температура (а) и вектор потока тепла (б)

```
! KAPPA=1e-6
! MP,DENS,1,RHO1*KAPPA
! MP,C,1,C1/KAPPA
```

то будет решаться задача термоупругости с частичной связанностью, когда поле температуры не зависит от механических полей, а для перемещений используется уравнение квазистатики. Расчеты показывают, что для температуры и перемещений в контрольных точках в обоих вариантах будут получены практически одинаковые результаты, т.е. результирующие кривые для  $\theta_h(\mathbf{x}_j, t)$  и  $u_{yh}(\mathbf{x}_j, t)$  визуальнo будут совпадать.

Наконец, отметим, что точность получаемых результатов здесь зависит от многих параметров. Максимальный размер элементов  $DMESH$  определяет погрешности дискретизации по пространственным переменным, и при использовании квадратичных по каноническим координатам конечных элементов **PLANE223** теоретическая погрешность имеет порядок  $O(DMESH^2)$ . Подшаги по времени  $\Delta t_j$  дают оценки погрешности дискретизации по времени, аналогичные оценкам погрешности дискретизации по пространственным переменным. Эти оценки справедливы лишь при наличии у решения ограниченных производных требуемой степени гладкости. Однако для областей с угловыми точками и со сменой типов граничных условий решения могут иметь локальные сингулярности, т.е. у них могут не существовать даже первые производные, ограниченные в области.

Кроме того, на точность вычислений влияют и параметры численной схемы модифицированного метода Ньюмарка интегрирования по времени. В программе используются параметры по умолчанию, соответствующие

команде **TINTP,0.005**. Но при больших осцилляциях решения можно увеличить параметр численного затухания схемы или изменить другие значения параметров в команде **TINTP**.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов с варьированием размеров конечных элементов, подшагов по времени и параметров модифицированной схемы Ньюмарка показывают достаточную для модельного примера точность полей температуры и перемещений при выбранных значениях.

### 3.2.3. Индивидуальные задания

Требуется рассчитать температурные напряжения, вызываемые температурным воздействием, для двумерной конструкции в форме буквы, указанной ниже. Рассмотреть нестационарную связанную задачу термоупругости, а также ее упрощенные модели аналогично модельному примеру. В качестве физических входных данных взять значения, аналогичные данным из модельного примера. Геометрические размеры областей следует выбрать самостоятельно в диапазонах значений, аналогичных модельному примеру. Для построения геометрии использовать дуги эллипсов и дуги окружностей (команда **LARC**).

Используйте командный режим программы ANSYS для создания твердотельной и конечно-элементной моделей, задания граничных условий, решения задачи и просмотра заранее определенных результатов в постпроцессоре **POST26**. Интерактивный режим ANSYS используйте для просмотра результатов в постпроцессоре **POST1** и визуализации твердотельной и конечно-элементной моделей.

Дайте анализ сходимости при различной плотности конечно-элементной сетки, значений подшагов по времени и параметров модифицированной схемы Ньюмарка. Приведите рабочий вариант конечно-элементной сетки с граничными условиями для разных шагов по времени. Проанализируйте результаты (графики зависимостей температуры и перемещений от времени в характерных точках, распределения полей температуры в деформированном состоянии, векторный показ поля потока тепла) и оформите отчет.

Отчет должен содержать данные об исполнителе, описание задачи, а также указанные выше результаты, полученные с помощью вычислительного комплекса ANSYS.

Варианты заданий лабораторной работы №2 приведены в таблице 3.9. Криволинейные области представлены в виде заглавных букв русского, латинского и греческого алфавитов.

Таблица 3.9. Variants of individual tasks for the practical assignment No. 2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вид области	Б	В	З	О	С	У	Ф	Ч	Э	Ю

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вид области	D	G	J	S	Q	U	Ω	Ψ	Θ	ρ

### 3.3. Лабораторная работа №3. Установившиеся колебания упругого излучателя в акустической среде

#### Цель работы

- Изучить основные особенности решения задач о взаимодействии твердых тел с акустическими средами в ANSYS APDL на примере двумерной задачи об установившихся колебаниях упругого излучателя, погруженного в акустическую среду (файлы примера: FE\_Mod\_CP\_3\_sm.inp на с. 151, FE\_Mod\_CP\_3\_ha.inp на с. 157, FE\_Mod\_CP\_3\_Post.inp на с. 164):
  - акустические конечные элементы, в том числе с опцией взаимодействия с твердотельными элементами;
  - задание неотражающих граничных условий для моделирования «бесконечных» областей;
  - выбор параметров и структуры конечно-элементных сеток;
  - выбор опций решателя;
  - особенности постпроцессорной обработки.
- Составить программу на языке APDL ANSYS для индивидуальной двумерной задачи об установившихся колебаниях упругого излучателя, погруженного в акустическую среду.
- Провести расчеты, проанализировать результаты и оформить отчет.

#### 3.3.1. Краткие сведения о технике решения в ANSYS задач о взаимодействии твердых тел с акустическими средами

Среди множества задач акустики, большой интерес представляют задачи о взаимодействии твердых деформируемых излучателей с акустическими средами. Излучатели обычно являются упругими или пьезоэлектрическими телами, которые под действием приложенных управляющих воздействий совершают установившиеся колебания или нестационарные движения. Если эти тела погружены в акустические среды, то, как отмечалось в разделе 1.6, границы твердых и жидких сред взаимодействуют

между собой. В результате в акустических средах начинают распространяться акустические волны, которые необходимо проанализировать для задач данного типа (распределения давления, градиентов давления, скорости, уровня звукового давления).

Довольно часто излучатели имеют много меньшие размеры по сравнению с внешней акустической средой, и явления отражения акустических волн от их удаленных границ не представляют особого интереса. В таких случаях можно искусственно «обрезать» размеры акустической среды, поставив на новых границах «неотражающие» граничные условия. Такие условия в идеале должны моделировать процессы прохождения акустических волн через эти границы без отражения.

Задачи о взаимодействии твердых тел с акустическими средами являются динамическими задачами (задачами об установившихся колебаниях или нестационарными задачами). Поэтому для обеспечения приемлемой точности решения размеры конечных элементов должны выбираться не только из оценок погрешности для статических задач типа  $O(h_s^p / \sin \varphi)$ , где  $h_s$  — максимальный размер элемента,  $\varphi$  — минимальный угол при вершине элемента,  $p$  — степень аппроксимирующего полинома, но и должны быть связаны с длинами характерных волн. Например, если  $c_0$  — скорость акустических волн, а излучатель колеблется с частотой  $f$ , то характерные длины волн  $\lambda$  можно приближенно определить по формуле:  $\lambda = c_0/f$ . Тогда, в зависимости от типа конечного элемента, его рекомендуемый размер  $h_d$  для корректного учета осцилляции значений акустических полей можно принять равным  $h_d = \lambda/10$  (для элементов с промежуточными узлами) или  $h_d = \lambda/20$  (для элементов без промежуточных узлов). Для малых значений частот  $f$  размер  $h_d$  может значительно превосходить  $h_s$ , и поэтому не приниматься во внимание. Однако для больших частот вполне возможны ситуации, когда  $h_d \ll h_s$ , т. е. размер элементов, связанный с осцилляциями значений акустических полей за период колебаний, является определяющим.

Таким образом, в рассматриваемых задачах требуется определить границы взаимодействия твердых и акустических сред, неотражающие границы (если в этом есть необходимость) и установить разумные параметры конечно-элементных сеток.

Следует отметить, что возможности комплекса ANSYS при решении задач акустики существенно расширились за последние годы. В данном пособии базовой версией является релиз ANSYS 11.0, и поэтому основное внимание будет уделено акустическому анализу именно в этой версии

ANSYS. Также кратко будут отмечены и новые средства ANSYS старших версий.

Для акустического анализа в ANSYS 11.0 предлагаются два основных типа элементов: **FLUID29** и **FLUID30** размерности 2-D и 3-D, соответственно. **FLUID29** является четырехугольным элементом с четырьмя узлами и имеет вариант с треугольной формой. **FLUID30** является восьмиузловым гексаэдральным элементом и имеет варианты с призматической и тетраэдральной формами. Элементы **FLUID29** и **FLUID30** могут находиться в контакте с аналогичными твердотельными элементами (как с упругими, так и с пьезоэлектрическими), например с **PLANE13**, **PLANE42**, **SOLID5**, **SOLID45**, и др. Естественно, что для обеспечения согласованности конечно-элементных разбиений здесь нужно выбирать элементы той же формы.

Для акустических элементов, которые контактируют с твердотельными элементами, нужно обязательно использовать опцию **KEYOPT(2)=0** (разрешение взаимодействия). Это приводит к несимметричной конечно-элементной матрице. Для всех других акустических элементов, можно установить **KEYOPT(2)=1**, что позволит получить симметричные конечно-элементные матрицы. Поскольку решение алгебраических систем с симметричными матрицами требует гораздо меньше места в памяти и машинного времени, то по возможности рекомендуется использовать симметричные матрицы.

Для акустических элементов в ANSYS необходимо задать следующие значения материальных параметров (команда **MP**): **DENS** — плотность жидкости  $\rho_0$ , **SONC** — скорость звука  $c_0$ .

Если существует поглощение звука на границе раздела сред (граница  $\Gamma_{ai}$  с импедансом  $Z$ ), то используется дополнительный материальный параметр **MU** для указания коэффициента поглощения  $\beta = Z/Z_0$ ,  $Z_0 = \rho_0 c_0$ . Значение  $\beta$  обычно определяется из экспериментальных измерений, но чем ближе  $\beta$  к единичному значению, тем сильнее поглощение, а для одномерных задач  $\beta = 1$  обеспечивает на импедансной границе  $\Gamma_{ai}$  полное поглощение плоских акустических волн.

Более современные подходы связаны с акустическими конечными элементами **FLUID129** и **FLUID130**, которые могут применяться вместе с **FLUID29** и **FLUID30** для моделирования бесконечно протяженных областей. Эти элементы реализуют неотражающие граничные условия второго порядка, которые дают более точные результаты по сравнению с обычными импедансными границами  $\Gamma_{ai}$ . Разработка численных методов для моделирования бесконечно протяженных границ являлась темой

многих специальных исследований [9]. В конечных элементах **FLUID129** и **FLUID130** реализован подход, представленный в [31].

Элементы **FLUID129** и **FLUID130** могут находиться в контакте только с **FLUID29** и **FLUID30**, соответственно, но не с упругими и не с пьезоэлектрическими твердотельными элементами. Внешняя граница сетки акустических конечных элементов, покрытая элементами **FLUID129** или **FLUID130**, должна иметь форму окружности (для 2D и осесимметричных элементов) или сферы (для 3D элементов). Радиус окружности или сферической границы ограниченной области, а также координаты центра окружности или сферы должны быть указаны в элементных константах команды **R**.

Как указывается в документации ANSYS, применение бесконечных элементов дает хорошие результаты как для низких, так и для высоких частот. В ANSYS отмечается, что хорошая точность решения достигается при расположении бесконечных элементов приблизительно на расстоянии  $\lambda/5$  за пределами области, которую занимает твердое тело. Здесь  $\lambda = c_0/f$  — доминирующая длина волны для волн давления. Например, в случае погружения кольца или сферической оболочки радиуса  $R_s$  радиус внешней границы  $R_a = RAD$ , на которую могут быть помещены бесконечные элементы, может быть равен примерно  $R_s + \lambda/5$ . Более точные оценки могут быть получены в результате вычислительных экспериментов при различных значениях  $R_a$ . Кроме того, надо учитывать, что акустические поля на больших расстояниях от сосредоточенного источника в точке  $\xi$  в плоских задачах затухают как  $1/\sqrt{R}$ , где  $R = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ , а в трехмерных задачах как  $1/r$ , где  $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ .

Особенности анализа результатов решений задач о взаимодействии твердых тел с акустическими средами в постпроцессорах ANSYS связаны с тем, что полевые функции, связанные с твердыми телами и с акустическими средами, заданы в разных областях. Поэтому, например, если нужно показать формы колебаний упругого или пьезоэлектрического тела, то вначале нужно выделить только упругие или пьезоэлектрические элементы и только потом выводить формы колебаний. Аналогично, если представляют интерес, например, поля давлений **PRES** в акустической среде, то предварительно нужно выделить акустические элементы, и лишь потом применять команды типа **PLNSOL,PRES**.

В более старших версиях ANSYS для акустического анализа появилось множество нововведений: модели акустических жидкостей с поглощением (**MP, VISC, MAT, C0**); элементы **FLUID220** и **FLUID221** с

промежуточными узлами для трехмерных задач; симметричные решатели для задач о взаимодействии твердых и жидких сред (FSI); новые импедансные граничные условия, как, например, идеально поглощающий слой «Perfectly Matched Layer» (PML) и др. Кроме того, разработанные инструменты Application Customization Toolkit (ACT) теперь предоставляют ряд удобных средств для проведения акустических расчетов в среде ANSYS Workbench.

К сожалению, качество документации по новым средствам акустического анализа в ANSYS оставляет желать лучшего, но для углубленного ознакомления с акустическим анализом в ANSYS можно дополнительно порекомендовать объемную монографию [30] с примерами, доступными по ссылке: <http://www.mecheng.adelaide.edu.au/avc/software>.

### 3.3.2. Описание модельной задачи и методов ее решения

#### Постановка задачи

Рассмотрим трубу, погруженную в морскую воду. Вода занимает настолько большую область, что можно считать ее бесконечно протяженной по всем направлениям. Труба является двухслойной и состоит из различных материалов. Внутренний радиус трубы  $R_1 = 0.25$  (м), внешний радиус  $R_3 = 0.27$  (м), срединный радиус, разграничивающий два слоя,  $R_2 = 0.26$  (м). Первый слой  $R_1 \leq r \leq R_2$  выполнен из изотропного материала (стали) с модулем Юнга  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>), коэффициентом Пуассона  $\nu_1 = 0.29$  и плотностью  $\rho_1 = 7860$  (кг/м<sup>3</sup>). Второй слой  $R_2 \leq r \leq R_3$  выполнен из другого изотропного материала (меди) с модулем Юнга  $E_2 = 1.2 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>), коэффициентом Пуассона  $\nu_2 = 0.33$  и плотностью  $\rho_2 = 8900$  (кг/м<sup>3</sup>). Примем, что плотность морской воды  $\rho_0 = \rho_a = 1030$  (кг/м<sup>3</sup>), а скорость звука в морской воде  $c_0 = c_a = 1560$  (м/с).

Поскольку труба имеет достаточно большую длину вдоль осевого направления и внешние воздействия приложены равномерно по оси, то можно рассматривать двумерную задачу о плоской деформации для поперечного сечения трубы в жидкости (рис. 3.17). Область, занимаемую жидкостью, ограничим большим радиусом  $R_a$ . На границе  $r = R_a$  будем использовать неотражающие граничные условия, которые будем моделировать или импедансными граничными условиями, или специальными акустическими конечными элементами ANSYS для бесконечных областей.

В задаче требуется проанализировать в режиме установившихся колебаний поля перемещений в твердом теле и поля давления в

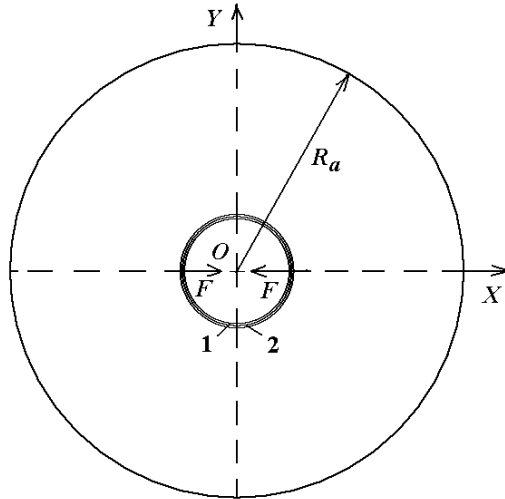


Рис. 3.17. Геометрия задачи

жидкости в окрестности той наименьшей резонансной частоты  $f_r$ , моды колебаний которой можно возбудить двумя сосредоточенными силами  $F = \tilde{F} \exp[i2\pi ft]$  с амплитудами  $\tilde{F} = 100$  Н/м, приложенными в двух точках на внутренней границе кольца (поперечного сечения трубы) в противоположных направлениях, как показано на рис. 3.17.

### Пример решения задачи с использованием ANSYS

Прежде всего заметим, что задача симметрична относительно оси  $X$  и оси  $Y$ . Поэтому можно рассматривать четверть модели, например, при  $X \geq 0, Y \geq 0$ . Важно учесть, что поскольку сила  $F$  действует на обе половинки модели  $Y \geq 0$  и  $Y \leq 0$ , то для рассматриваемой части надо взять половинное значение силы  $F/2$ .

Рассчитаем вначале собственные частоты излучателя без учета жидкости, выполнив файл **FE\_Mod\_CP\_3\_sm.inp**.

### Листинг входного файла FE\_Mod\_CP\_3\_sm.inp

```
! Файл    FE_Mod_CP_3_sm.inp
! Тестовая задача №3
! ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА
! КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОГО КОЛЬЦА (ЦИЛИНДРА)
```



```

! Расчет собственных частот тела без жидкости

! Инвертирование фона с черного на белый
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15

/PREP7
F_R='FE_Mod_CP_3_sm'! Имя файлов для вывода результатов

! Параметры для геометрических размеров (все - в системе СИ)

R1=0.25 ! Внутренний радиус кольца
R2=0.26 ! Серединный радиус кольца
R3=0.27 ! Внешний радиус кольца

NFREQ=4 ! Число выводимых частот
FBEG=0.1 ! Начальное значение диапазона частот
FEND=1e10 ! Конечное значение диапазона частот

! Материальные свойства тела
! Материальные константы стали
R01=7.86e3 ! Плотность
E1=2e11 ! Модуль Юнга
NU1=0.29 ! Коэффициент Пуассона

! Материальные константы меди
R02=8.9e3
E2=1.2e11
NU2=0.33

MP,DENS,1,R01 ! Плотность среды 1
MP,EX,1,E1 ! модуль Юнга среды 1
MP,NUXY,1,NU1 ! Коэффициент Пуассона среды 1

MP,DENS,2,R02 ! Плотность среды 2
MP,EX,2,E2 ! Модуль Юнга среды 2
MP,NUXY,2,NU2 ! Коэффициент Пуассона среды 2

! Упругий КЭ с четырьмя узлами, плоская деформация
ET,1,PLANE42,,2

! Параметры конечно-элементной сетки
SM=1.00 ! Масштабный множитель (scaling multiplier)
HDIV=2*SM ! Количество КЭ по толщине (для одного материала)
TDIV=32*SM ! Количество КЭ по окружному направлению

```

```
! Форматированная запись в файл
/OUTPUT,F_R,res
*VWRITE
(1X,' MODAL ANALYSIS (Block Lanczos, Plane42)')
*VWRITE,NFREQ
(1X,' NFREQ= ',F4.0)
*VWRITE,HDIV,TDIV
(1X,' HDIV= ',F4.0,' TDIV= ',F4.0)
/OUTPUT
*DIM,FR,ARRAY,NFREQ ! Массив для собственных частот

! Создание геометрии модели
CSYS,1 ! Переход в цилиндрическую систему координат
K,1,R1 $ K,2,R2 $ K,3,R3
K,4,R3,90 $ K,5,R2,90 $ K,6,R1,90
L,6,1 $ L,1,2 $ L,2,5 $ L,5,6 $ L,2,3 $ L,3,4 $ L,4,5
A,1,2,5,6
A,2,3,4,5
CSYS,0 ! Возврат в декартовую систему координат

! Разбиение линий
LESIZE,1,,TDIV $ LESIZE,3,,TDIV $ LESIZE,6,,TDIV

LESIZE,2,,HDIV $ LESIZE,5,,HDIV
LESIZE,4,,HDIV $ LESIZE,7,,HDIV
MSHKEY,1
MSHAPE,0,2D
ASEL,S,AREA,,2 ! Выделяем новое множество областей - область 2
AATT,2,,1 ! Ассоциируем с выделенной областью
! атрибуты: MAT=2, TYPE=1
ASEL,ALL ! Возврат к выбору всех областей
AMESH,ALL
FINISH

/SOLU
ANTYPE,MODA ! Модальный анализ
! Блочный метод Ланцоша
! Число частот NFREQ в интервале FBEG,FEND
MODOPT,LANB,NFREQ,FBEG,FEND

! Условия симметрии
LSEL,S,LOC,Y,0
LSEL,A,LOC,X,0
DL,ALL,,SYMM
LSEL,ALL

SOLVE
```

FINISH

/POST1

! Вывод таблицы резонансных частот в файл

\*DO,I,1,NFREQ

SET,,I

\*GET,FR(I),MODE,I,FREQ

FRI=FR(I)

/OUTPUT,F\_R,res,,append

\*VWRITE,I,FRI

(1X,F4.0,' ',E12.5)

/OUTPUT

\*ENDDO

! Вывод картинок форм (мод) колебаний

/PNUM,MAT,1 ! Нумеровать элементы по материальным свойствам

/NUMBER,1 ! Номера отражать только цветом

/TRIAD,OFF ! Не показывать начало системы координат

/PLOPTS,LOGO,OFF ! Отключить вывод графической картинке ANSYS

/PLOPTS,DATE,OFF ! Не показывать дату

/PLOPTS,FRAME,OFF ! Не показывать рамку

/WINDOW,1,LTOP ! Окно 1 - слева сверху

SET,,1 ! Считываются данные по первой моде колебаний

PLDISP,2 ! показать моду колебаний вместе с исходной формой

/WINDOW,1,OFF ! Сделать окно 1 пассивным

/NOERASE ! Не очищать содержимое окон

/WINDOW,2,RTOP ! Окно 2 - справа сверху

SET,,2 ! Считываются данные по второй моде колебаний

PLDISP,2

/WINDOW,2,OFF

/WINDOW,3,LBOT ! Окно 3 - слева внизу

SET,,3 ! Считываются данные по третьей моде колебаний

PLDISP,2

/WINDOW,3,OFF

/WINDOW,4,RBOT ! Окно 4 - справа внизу

SET,,4 ! Считываются данные по четвертой моде колебаний

PLDISP,2

! Возврат к обычным оконным режимам

/WINDOW,1,ON

/WINDOW,1,FULL

/WINDOW,4,OFF

! Надо выполнить данную команду (без !) для очистки содержимого окна

! ERASE

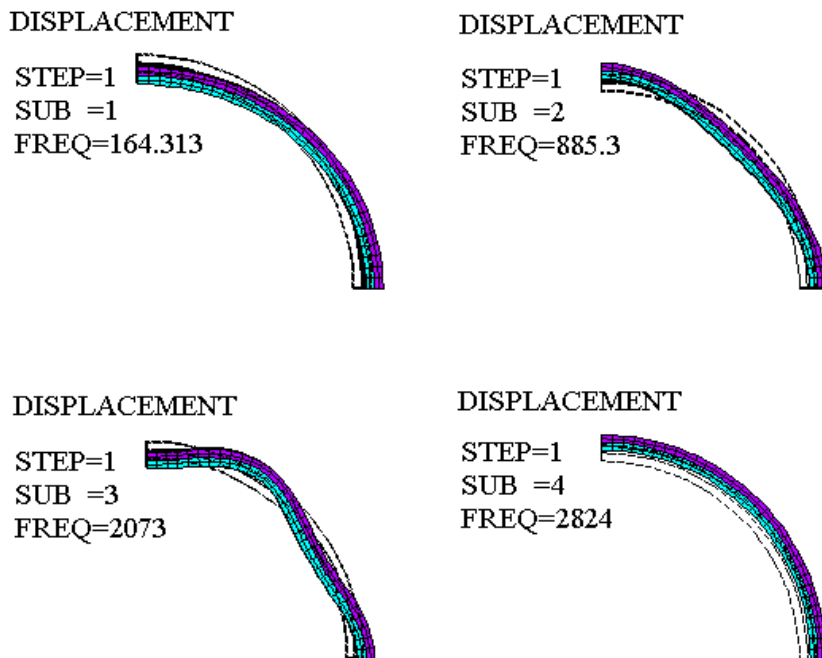


Рис. 3.18. Формы собственных колебаний излучателя без жидкости

В результате выполнения этого вспомогательного файла получаем значения первых четырех собственных частот излучателя без учета жидкости и формы колебаний на этих частотах (рис. 3.18). Здесь элементы, имеющие различные материальные свойства, выделены разными цветами: свойства типа 1 — более светлого цвета (бирюзовый), свойства типа 2 — более темного цвета (фиолетовый). Отметим, что начальное значение FBEG частотного диапазона, в котором искались собственные частоты, было взято немного большим нуля, чтобы не находились нулевые частоты движения тела как жесткого целого. Правда, в данной задаче в силу рассмотрения четверти модели с условиями симметрии нулевых частот быть не может, и здесь это сделано только для удобства использования команд из приведенного файла при исследовании других задач.

Интуитивно ясно, что сосредоточенными силами, изображенными на рис. 3.17, при соответствующих  $f$  можно возбудить колебания на всех первых четырех собственных частотах. При наличии жидкости

значения всех резонансных частот уменьшаются, и, по-видимому, значение вещественной части первой собственной частоты излучателя в жидкости можно ожидать в районе 130 Гц. Для излучателя без жидкости по приведенной выше программе FE\_Mod\_CP\_3\_sm.inp была получена первая собственная частота  $f_{sr1} = 164.313$  Гц.

Аналогичным образом, можно было бы провести модальный анализ (решение задачи на собственные значения) для излучателя в жидкости и уточнить значения ожидаемой первой собственной частоты. Пропуская этот шаг, перейдем сразу к решению задачи об установившихся колебаниях упругого излучателя в акустической среде. Выберем расчетный частотный интервал  $f_{beg} \leq f \leq f_{end}$ ,  $f_{beg} = 100$  Гц,  $f_{end} = 150$  Гц; а также число значений по частоте  $n_{freq} = 100$ . Таким образом, задача об установившихся колебаниях излучателя в жидкости будет решаться  $n_{freq} = 100$  раз с шагом по частоте  $\Delta f = (f_{end} - f_{beg})/n_{freq} = 0.2$  Гц для частот  $f_k = f_{beg} + k\Delta f$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_{freq}$ . Резонансной частотой  $f_r$  назовем то значение частоты из массива  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_{freq}$ , при котором достигается максимальная величина амплитуды перемещения  $\tilde{u}_y$  или акустического давления  $\tilde{p}p$  ( $u_y = \tilde{u}_y \exp[i2\pi ft]$ ;  $p = \tilde{p} \exp[i2\pi ft]$ ) в верхней точке излучателя  $X = 0, Y = R_s$ . При этом следует помнить, что даже если бы конечно-элементные расчеты были полностью точны, здесь уже заложена абсолютная погрешность определения частоты  $\Delta f = 0.2$  Гц или относительная погрешность  $(\Delta f / f_{beg}) \cdot 100\% = 0.2\%$ .

Расстояние, на которое нужно поместить бесконечные элементы, по рекомендации руководства ANSYS должно быть равно не менее  $R_s + \lambda/5$ , где  $R_s$  — внешний диаметр кольца,  $\lambda = c_0/f$  — доминирующая длина волны для волн давления. В данной задаче внешний радиус кольца  $R_s = R_3 = 0.27$  м, скорость звука в воде  $c_0 = c_a = 1560$  м/с, доминирующая частота оценивается как  $f = 130$  Гц. Тогда  $R_3 + \lambda/5 = 0.27 + 1560/130/5 = 2.67$  (м). Однако, в данной задаче при очень низкочастотных колебаниях можно ожидать, что это расстояние будет намного больше допустимого расстояния для расположения бесконечных акустических элементов. Поэтому в качестве базового значения  $R_a$  радиуса расположения акустических элементов **FLUID129** или импедансных акустических границ примем  $R_a = 4R_s = 1.08$  м. Результаты, полученные при этом значении, сравним также с результатами при  $R_a = 2R_s$  и  $R_a = 8R_s$ .

При очень большой длине волны  $\lambda = c_0/f \approx 12$  (м) ограничение на размер конечных элементов  $h_d = \lambda/20 \approx 0.6$  (м) оказывается больше, чем значение внешнего радиуса кольца  $R_s = R_3 = 0.27$  (м).

В качестве базового примем разбиение областей каждого из материалов кольца по толщине  $HDIV = 2SM$ , разбиение по окружному направлению линий кольца и акустической области  $TDIV = 32SM$ , а разбиение акустической области  $HADIV = 32SM$ , где  $SM = 1$ . Конечные элементы в акустической области будем строить с увеличением их длины вдоль радиальных направлений с множителем  $SPACE = 3$ . При анализе сходимости параметр  $SM$  будем менять как в сторону увеличения ( $SM = 2$ ), так и в сторону уменьшения ( $SM = 0.5$ ).

Основная программа для расчета установившихся колебаний кольца в акустической среде **FE\_Mod\_CP\_3\_ha.inp** использует для моделирования неотражающих границ акустические конечные элементы **FLUID129**.

### Листинг входного файла FE\_Mod\_CP\_3\_ha.inp

```
! Файл FE_Mod_CP_3_ha.inp
! Тестовая задача №3
! ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА
! КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОГО КОЛЬЦА (ЦИЛИНДРА)
! В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

! Расчет установившихся колебаний тела с жидкостью
! Бесконечные элементы FLUID129

! Инвертирование фона с черного на белый
/RGB, INDEX, 100, 100, 100, 0
/RGB, INDEX, 0, 0, 0, 15

/PREP7
F_R='FE_Mod_CP_3_ha_4' ! имя файлов для вывода
результатов

! Параметры для геометрических размеров (все - в системе СИ)
R1=0.25 ! Внутренний радиус кольца
R2=0.26 ! Серединный радиус кольца
R3=0.27 ! Внешний радиус кольца
KRA=4 ! Коэффициент для вычисления радиуса RA
RA=KRA*R3 ! Радиус для внешней границы жидкости

FP=100 ! Значение силы
NFREQ=100 ! Число выводимых частот
FBEG=100 ! Начальное значение диапазона частот
FEND=150 ! Конечное значение диапазона частот
```

```

! Материальные свойства
! Материальные константы стали
R01=7.86e3 ! Плотность
E1=2e11 ! Модуль Юнга
NU1=0.29 ! Коэффициент Пуассона

! Материальные константы меди
R02=8.9e3 ! Плотность
E2=1.2e11 ! Модуль Юнга
NU2=0.33 ! Коэффициент Пуассона

! Материальные константы жидкости
ROA=1030 ! Плотность
CA=1560 ! Скорость звука
AD=1 ! Коэффициент поглощения на импедансной границе

MP,DENS,1,R01 ! Плотность среды 1
MP,EX,1,E1 ! Модуль Юнга среды 1
MP,NUXY,1,NU1 ! Коэффициент Пуассона среды 1
!
MP,DENS,2,R02 ! Плотность среды 2
MP,EX,2,E2 ! Модуль Юнга среды 2
MP,NUXY,2,NU2 ! Коэффициент Пуассона среды 2
!
MP,DENS,3,ROA ! Плотность акустической среды
MP,SONC,3,CA ! Скорость звука в акустической среде
MP,MU,3,AD ! Коэффициент поглощения на импедансной границе

ET,1,PLANE42,,2 ! Упругий КЭ с 4 узлами, плоская деформация
ET,2,FLUID29,,1 ! Акустический КЭ с 4 узлами, без UX & UY
ET,3,FLUID29 ! Акустический КЭ с 4 узлами, с UX & UY
ET,4,FLUID129 ! Акустический КЭ для бесконечных границ
R,4,RA ! Радиус бесконечной границы для КЭ FLUID129

! Параметры конечно-элементной сетки
SM=1.00 ! Масштабный множитель (scaling multiplier)
HDIV=2*SM ! Количество КЭ по толщине (для одного материала)

TDIV=32*SM ! Количество КЭ по окружному направлению
! Количество КЭ по радиальному направлению
! для акустической среды
HADIV=32*SM
! Множитель для увеличения длины акустических КЭ
! по радиальному направлению
SPACE=3

```

```
! Форматированная запись в файл
/OUTPUT,F_R,res
*VWRITE
(1X,' HARMONIC ANALYSIS (Plane42, Fluid29)')
*VWRITE,KRA
(1X,' RA/R3= ',F4.0)
*VWRITE,NFREQ
(1X,' NFREQ= ',F4.0)
*VWRITE,HDIV,TDIV,HADIV
(1X,' HDIV= ',F4.0,' TDIV= ',F4.0,' HADIV= ',F4.0)
/OUTPUT

! Создание геометрии модели
CSYS,1 ! Переход в цилиндрическую систему координат
K,1,R1 $ K,2,R2 $ K,3,R3
K,4,R3,90 $ K,5,R2,90 $ K,6,R1,90
L,6,1 $ L,1,2 $ L,2,5 $ L,5,6 $ L,2,3 $ L,3,4 $ L,4,5
A,1,2,5,6 $ A,2,3,4,5
K,7,RA $ K,8,RA,90
L,3,7 $ L,7,8 $ L,8,4
A,3,7,8,4
CSYS,0 ! Возврат в декартову систему координат

! Разбиение линий
LESIZE,1,,TDIV $ LESIZE,3,,TDIV $ LESIZE,6,,TDIV
LESIZE,2,,HDIV $ LESIZE,5,,HDIV
LESIZE,4,,HDIV $ LESIZE,7,,HDIV
LESIZE,9,,TDIV
LESIZE,8,,HADIV,SPACE
LESIZE,10,,HADIV,1/SPACE
MSHKEY,1
MSHAPE,0,2D
ASEL,S,AREA,,2 ! Выделяем новое множество областей - область 2
AATT,2,,1 ! Ассоциируем с выделенной областью
! атрибуты: MAT=2, TYPE=1
ASEL,S,AREA,,3
AATT,3,,2 ! Ассоциируем с выделенной областью
! атрибуты: MAT=3, TYPE=2
ASEL,ALL ! Возврат к выбору всех областей
AMESH,ALL

! Изменение акустических КЭ, граничащих с кольцом, на тип 3

LSEL,S,LINE,,6 ! Выбор линии 6 - границы кольца и акустич. среды
NSLL,S,1 ! Выбор узлов на выбранных линиях
ESLN,S,0 ! Выбор КЭ, имеющих выбранные узлы
! Исключение из выбранного множества КЭ с типом 1
```



```

ESEL,U,TYPE,,1

EMODIF,ALL,TYPE,3
ALLSEL

! Установка флага контакта твердого тела с акустической средой
! для акустических КЭ
CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,R3 ! Выбор узлов на границе твердого и жидкого тел

ESLN ! Выбор КЭ, имеющих выбранные узлы
ESEL,R,TYPE,,3 ! Выбор из них КЭ, имеющих TYPE=3
SF,ALL,FSI ! Установка флага для узлов контакта FSI
NSEL,ALL
ESEL,ALL
CSYS,0

FINISH

/SOLU
ANTYPE,HARMIC ! Установившиеся колебания
HROPT,FULL
HARFRQ,FBEG,FEND
NSUBST,NFREQ
KBC,1

! Условия симметрии
LSEL,S,LOC,Y,0
LSEL,A,LOC,X,0
DL,ALL,,SYMM
LSEL,ALL

CSYS,1
KSEL,S,LOC,X,R1
KSEL,R,LOC,Y,0
FK,ALL,FX,-FP/2 ! Делим FP на 2, т.к. рассматривается часть модели

KSEL,ALL
CSYS,0

! Определение бесконечных элементов FLUID129
CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,RA ! Выбор узлов на импедансной границе
TYPE,4 $ REAL,4 $ MAT,3
ESURF
ESEL,ALL
NSEL,ALL

```

```
CSYS,0

OUTRES,BASIC,ALL
SOLVE
SAVE
FINISH

! Вход в постпроцессор Time History Postprocessor
/POST26
/SHOW,WIN32C
/TRIAD,OFF          ! Не показывать начала координат и осей

/PLOPTS,INFO,2     ! Использовать формат вывода Auto-legend для
подписей
/PLOPTS,LEG2,OFF
/PLOPTS,LOGO,OFF   ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде

/PLOPTS,FRAME,OFF ! Не показывать рамку
/PLOPTS,DATE,OFF  ! Не показывать дату

/COLOR,CURVE,WHIT,1,6
/COLOR,GRID,WHIT
/GRID,1

CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,R3
NSEL,R,LOC,Y,90
! Узел с номером N_RES1 - точка (0,R3) в декартовой СК
*GET,N_RES1,NODE,,NUM,MIN
NSEL,S,LOC,X,RA
NSEL,R,LOC,Y,90
! Узел с номером N_RES2 - точка (0,R3) в декартовой СК
*GET,N_RES2,NODE,,NUM,MIN
NSEL,ALL
CSYS,0

/XRANG,FBEG,FEND
/AXLAB,X,Frequency (Hz)
/AXLAB,Y,Displacement UY (m)
NSOL,2,N_RES1,UY
ABS,3,2,,ABSUY
*GET,FRES,VARI,3,EXTREM,TMAX ! Определение резонансной частоты

/OUTPUT,F_R,res,,append
*VWRITE,FRES
(1X,' FRES= ',E12.5)
PRVAR,2
```

```

/OUTPUT PLCPXL,2 ! Вещественная часть
PLVAR,2

! PLVAR,3 ! Амплитуда или модуль UY

! Команды для вывода давления в той же точке (раскомментировать)
! NSOL,4,N_RES1,PRES
! /AXLAB,Y,Acoustic pressure PRES (Pa)
! PLVAR,4

```

Данная программа строит конечно-элементную сетку, показанную на рис. 3.19, где слева элементы раскрашены по материальным свойствам (рис. 3.19, а), а справа — по типам элементов (рис. 3.19, б). Кроме того на рис. 3.19, б отмечена граница с узлами акустических элементов **FLUID29,,0**, для которых установлен флаг взаимодействия с твердотельной структурой FSI.

Напомним, что для вывода конечно-элементной сетки в интерактивном режиме следует выполнить: *Plot* → *Elements*. При этом предварительно для раскраски элементов по номерам материальных свойств без вывода самих номеров материальных свойств нужно проделать следующий путь: *PltCtrls* → *Numbering* → *Elem/Attrib numbering* → *Material numbers* → *[NUM] Numbering shown with* → *Colors only* → *OK*, а для раскраски элементов по номерам типов элементов без вывода самих типов элементов: *PltCtrls* → *Numbering* → *Elem/Attrib numbering* → *Element type num* → *Material numbers* → *[NUM] Numbering shown with* → *Colors only* → *OK*.

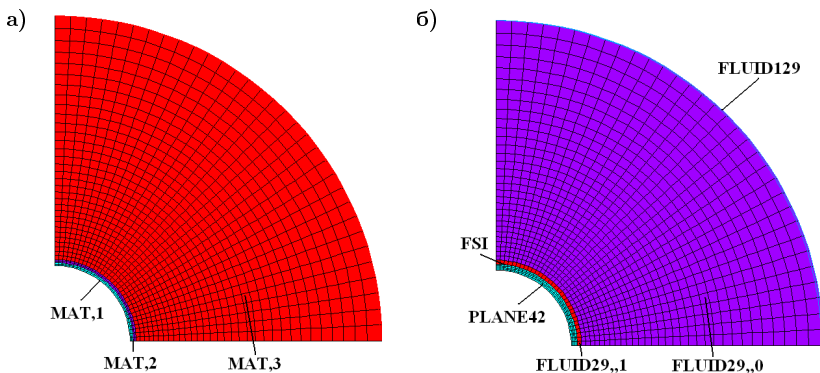


Рис. 3.19. Конечно-элементная сетка с выделением MAT (а) и с выделением TYPE (б)

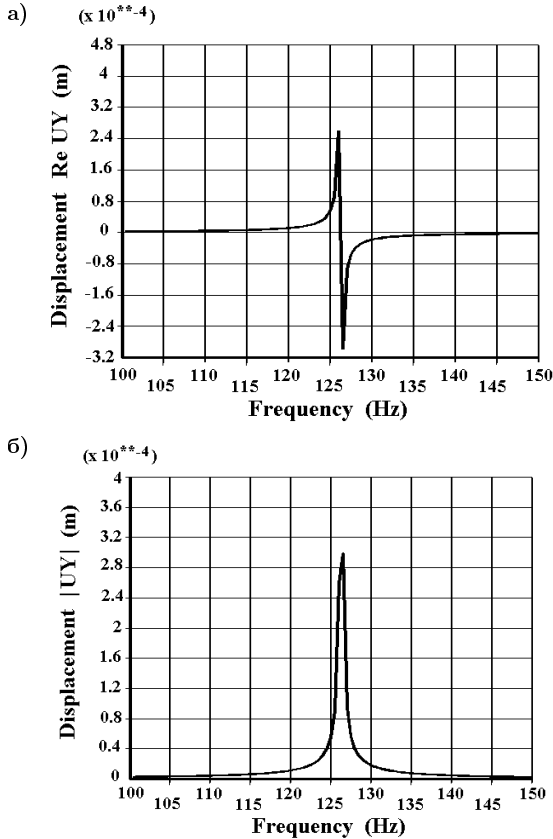


Рис. 3.20. Частотная характеристика  $\tilde{u}_y$ : вещественная часть перемещений  $\text{Re}\tilde{u}_y$  (а); модуль перемещений  $|\tilde{u}_y|$  (б)

В завершении программы в постпроцессоре /POST26 данные о частотной характеристике перемещения  $\tilde{u}_y$  в точке излучателя ( $X = 0$ ,  $Y = R_3$ ) записываются в файл вывода FE\_Mod\_CP\_3\_ha\_4.res, и  $\text{Re}\tilde{u}_y$  выводится на экран в виде графика (рис. 3.20, а). Выполнение команды PLVAR,3 затем дает график зависимости  $|\tilde{u}_y|$  в этой же точке от частоты (рис. 3.20, б). Кроме того, в переменную FRES заносится значение резонансной частоты, которое записывается также в файл результатов. В итоге получаем, что значение резонансной частоты равно  $f_r = 126.5$  Гц.

Следующий файл позволяет получить для резонансной частоты FRES график вещественной части давления вдоль оси  $Y$  акустической области, т. е зависимость  $\text{Re}\tilde{p}(0, y)$ ,  $y \in [R_3, R_a]$ .

### Листинг входного файла FE\_Mod\_CP\_3\_Post.inp

```
! Файл FE_Mod_CP_3_Post.inp
! Постпроцессорный вывод графика
! акустического давления вдоль пути между узлами N_RES1,
N_RES2
! на частоте FRES
! Значения N_RES1, N_RES2, FRES должны быть определены ранее
/POST1
/COLOR,CURVE,WHIT,1,6 ! Цвет графиков - белый (черный при
инвертации)
/COLOR,GRID,WHIT, ! Цвет сетки - белый (черный при инвертации)
/PLOPTS,TITLE,OFF ! Заголовка графика нет
/PLOPT,FRAME,OFF ! Рамки нет
/AXLAB,X,Y ! Подпись к оси X
/AXLAB,Y,Re PRES ! Подпись к оси Y
/XRANG /DSCALE, ,OFF ! Множитель при показе смещений границ КЭ равен 0

! считываем данные о вещественной части на частоте FRES
SET,NEAR, , , 0, FRES

! Команды определения пути с опорными точками
PATH,YY,2, , 120
PPATH,1,N_RES1
PPATH,2,N_RES2
! Определение величины RePRES для построения графика вдоль пути

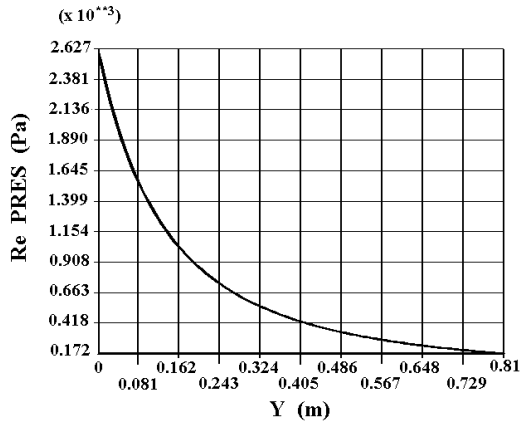
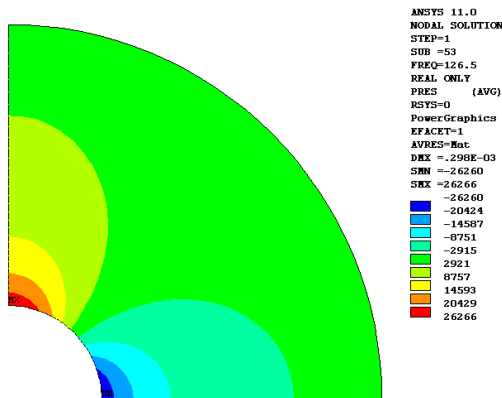
PDEF,RePRES,PRES

PLPATH,RePRES ! Построение графика RePRES вдоль пути

! Вывод картины распределения давления (раскомментировать)
! ESEL,S,TYPE, , 2,4
! PLNSOL,PRES
! считываем данные о мнимой части на частоте FRES
! SET,NEAR, , , 1, FRES
! PLNSOL,PRES
```

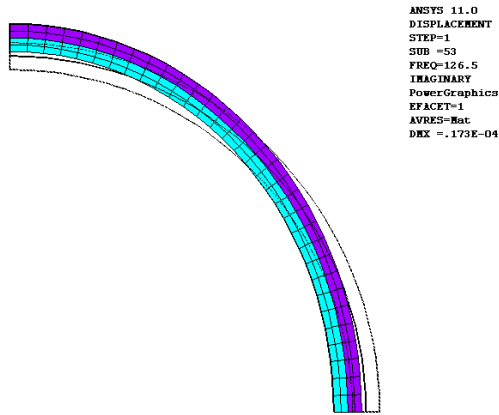
Результирующий график показан на рис. 3.21. Как и ожидалось, давление достаточно быстро убывает вдоль пути.

Выведем теперь распределения вещественной и мнимой частей давления на резонансной частоте. Для этого согласно последним коман-

Рис. 3.21. Акустическое давление  $\text{Re}\bar{p}$  вдоль оси YРис. 3.22. Распределение вещественной части давления на частоте  $f_r = 126.5$  Гц

дам из вышеприведенного файла сначала выберем только акустические элементы (типа 2–4) **ESEL,S,TYPE,,2,4**, а затем выполним команду **PLNSOL,PRES**. В результате получим распределение вещественной части давления на резонансной частоте, показанное на рис. 3.22.

После выполнения команд **SET,NEAR,,1,FRES** и **PLNSOL,PRES**, аналогичную картину можно получить для мнимой части давления на резонансной частоте и убедиться в том, что значения давления будут значительно меньше.



**Рис. 3.23.** Деформированная форма кольца на резонансной частоте  $f_r = 126.5$  Гц, (вещественная часть)

Наконец, выведем картину деформированной формы на резонансной частоте. Для этого сначала нужно выбрать только твердотельные элементы (типа 1) **ESEL,S,TYPE,,1** и вернуть автоматическое масштабирование значений смещений **/DSCALE,,AUTO**. Затем нужно считать результаты на данной частоте для вещественной части решения **SET,NEAR,,0,FRES** и вывести картину деформированной формы вместе с границей исходного положения излучателя, пройдя по меню *Plot Results* → *Deformed Shape* → *Def+undef edg* → *OK* или выполнив команду **PLDISP,2**. Для получения большего сходства с первой собственной формой излучателя без жидкости, показанной в левой верхней четверти рис. 3.18, можно раскрасить элементы по номерам материальных свойств без вывода самих номеров материальных свойств: *PltCtrls* → *Numbering* → *Elem/Attrib numbering* → *Material numbers* → *[NUM] Numbering shown with* → *Colors only* → *OK*.

Результат всех этих действий показан на рис. 3.23. Из этого рисунка видно, что деформированная форма по общей структуре повторяет первую собственную форму излучателя без жидкости, приведенную на рис. 3.18. Собственная форма определяется с точностью до произвольного множителя, поэтому знак ее смещений не существен.

Вычислительные эксперименты с варьированием параметра густоты конечно-элементной сетки  $SM$  показывают, что  $f_r = 127$  Гц при  $SM = 0.5$ ,  $f_r = 126.5$  Гц при  $SM = 1$ ,  $f_r = 126$  Гц при  $SM = 2$ . Как видно, с уменьшением максимального размера конечных элементов частота

уменьшается, что следует и из общих теоретических выводов о характере сходимости собственных частот. Однако это изменение в значении первой резонансной частоты оказывается менее 1 %, что свидетельствует об удовлетворительном выборе параметров конечно-элементной сетки (т.е. допустима даже более грубая сетка).

Если же при  $SM = 1$  варьировать размеры акустической области, изменяя параметр  $KRA = R_a/R_3$  от 2 до 8, то можно заметить, что значение  $f_r = 126.5$  Гц не будет меняться. Таким образом, выбранные размеры акустической области также являются вполне удовлетворительными и допустимы даже меньшие размеры. Отметим, что здесь не анализируются максимальные значения перемещений и акустического давления, которые вычисляются с большей погрешностью.

Наконец, вместо размещения акустических элементов **FLUID129** на удаленной границе акустической области  $r = R_a$  можно задать импедансные граничные условия, заменив в файле `FE_Mod_CP_3_ha.inp` блок команд

```
! Определение бесконечных элементов FLUID129
CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,RA ! Выбор узлов на импедансной границе
TYPE,4 $ REAL,4 $ MAT,3
ESURF
ESEL,ALL
NSEL,ALL
CSYS,0
```

на следующий:

```
! импедансные граничные условия
CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,RA ! Выбор узлов на импедансной границе

SF,ALL,IMPD,1 ! Установка импедансного граничного условия
NSEL,ALL
CSYS,0
```

Расчеты показывают, что для рассматриваемой задачи вполне допустимы оба варианта моделирования неотражающей акустической границы, но первый подход оказывается немного точнее.

### 3.3.3. Индивидуальные задания

Написать программу на языке APDL ANSYS для расчета задачи о взаимодействии твердого тела с акустической средой в режиме



установившихся колебаний в двумерной постановке (осесимметричная задача или задача о плоской деформации).

Предварительно решить задачу о собственных колебаниях упругого тела. Найти первые собственные частоты и оценить возможность их возбуждения заданными внешними воздействиями  $F = \tilde{F} \exp[i2\pi ft]$  или  $p_{\Gamma} = \tilde{p}_{\Gamma} \exp[i2\pi ft]$ . В итоге выбрать частотный интервал в окрестности первой (из возбуждаемых) резонансной частоты.

Оценить значение радиуса расположения акустических конечных элементов **FLUID129** или импедансных акустических границ и размеры конечных элементов.

Построить амплитудно-частотную характеристику смещений в характерной точке. Для резонансной частоты получить деформированную форму упругого тела, распределения давления в акустической среде и график изменения акустического давления вдоль характерного пути.

Провести расчеты при различной плотности конечно-элементной сетки и для нескольких значений радиуса акустической среды и найти его подходящее значение.

Проанализировать результаты и оформить отчет. Отчет должен содержать данные об исполнителе, описание задачи, а также указанные выше результаты, полученные с помощью вычислительного комплекса ANSYS.

При моделировании использовать следующие значения материальных констант изотропных сред, заданных в системе СИ:

- сталь с модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>), коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.29$  и плотностью  $\rho = 7860$  (кг/м<sup>3</sup>);
- медь с модулем Юнга  $E = 1.2 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>), коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.33$  и плотностью  $\rho = 8900$  (кг/м<sup>3</sup>);
- титан с модулем Юнга  $E = 1.12 \cdot 10^{11}$  (Н/м<sup>2</sup>), коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.32$  и плотностью  $\rho = 4500$  (кг/м<sup>3</sup>);
- морская вода со скоростью звука  $c_a = 1560$  (м/с) и плотностью  $\rho_a = 1030$  (кг/м<sup>3</sup>);
- пресная вода со скоростью звука  $c_a = 1500$  (м/с) и плотностью  $\rho_a = 1000$  (кг/м<sup>3</sup>);
- воздух со скоростью звука  $c_a = 340$  (м/с) и плотностью  $\rho_a = 1.2$  (кг/м<sup>3</sup>).

Варианты индивидуальных заданий собраны в таблице 3.10. При построении расчетной области следует по возможности учитывать симметрию задачи.

Сосредоточенные воздействия  $\tilde{F}$  имеют здесь размерность Н/м, так как в действительности для плоской деформации они распределены вдоль

линии, параллельной оси  $z$ , а для осесимметричной задачи — вдоль окружности с радиусом  $R_f$ , равным координате  $X$  точки приложения силы на меридиональном сечении. В ANSYS для осесимметричной задачи значение силы надо умножить на длину окружности  $2\pi R_f$ . Таким образом, в случае задания сосредоточенной силы  $\tilde{F}$  для осесимметричной задачи надо использовать значение  $2\pi R_f \tilde{F}$ , а для плоской деформации — значение  $\tilde{F}$ . Исключение для осесимметричной задачи составляет случай задания силы  $\tilde{F}$  на оси вращения, т. е. при  $R_f = 0$ . Здесь  $\tilde{F}$  имеет размерность Н, и используется именно это значение  $\tilde{F}$ .

Всюду в таблице 3.10  $\Omega_a$  — акустическая область,  $\Gamma_{ar}$  — поверхность акустической области с граничными условиями (1.204) жесткой стенки.

Таблица 3.10. Варианты заданий лабораторной работы № 3

№	Рисунок задачи	Данные
1		<p>Осесимметричная задача.            Материал излучателя — титан,            внешний радиус купола <math>R_1 = 0.2</math> м,            толщина <math>h = 0.01</math> м, <math>a = 0.3</math> м.            Акустическая среда (морская вода)            заполняет область со стороны внешней            нормали к поверхности излучателя            радиуса <math>R_1</math>, <math>\tilde{p}_\Gamma = 50</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>
2		<p>Осесимметричная задача.            Материал излучателя — сталь,            внешний радиус купола <math>R_1 = 0.2</math> м,            толщина <math>h = 0.01</math> м, <math>a = 0.3</math> м.            Акустическая среда (пресная вода)            заполняет область со стороны внешней            нормали к поверхности излучателя            радиуса <math>R_1 - h</math>, <math>\tilde{p}_\Gamma = 50</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>
3		<p>Плоская деформация.            Материал излучателя — титан,            толщина <math>h = 0.02</math> м, <math>a = 0.4</math> м, <math>b = c = 0.3</math> м.            Акустическая среда (воздух)            заполняет область со стороны внешней            нормали к верхней поверхности излучателя,  <math>\tilde{F} = 100</math> Н/м.</p>

Таблица 3.10. Варианты заданий лабораторной работы № 3 (продолжение)

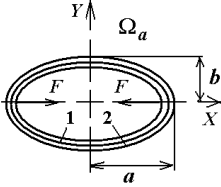
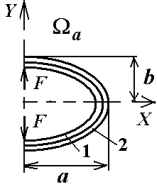
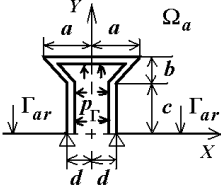
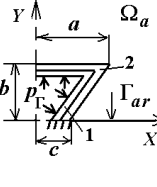
4		<p>Плоская деформация.          Поперечное сечение излучателя — двухслойный полый эллипс.          Граница взаимодействия излучателя с акустической средой:  <math>(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1</math>, где <math>a = 0.4</math> м, <math>b = 0.2</math> м.          Внешний слой 2 — сталь, толщина <math>h_2 = 0.02</math> м.          Внутренний слой 1 — медь, толщина <math>h_1 = h_2</math>.          Акустическая среда (пресная вода) заполняет область <math>(x/a)^2 + (y/b)^2 \geq 1</math>,  <math>\tilde{F} = 100</math> Н/м.</p>
5		<p>Осесимметричная задача.          Поперечное сечение излучателя — двухслойный полый эллипс.          Граница взаимодействия излучателя с акустической средой:  <math>(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1</math>, где <math>a = 0.5</math> м, <math>b = 0.25</math> м.          Внешний слой 2 — титан, толщина <math>h_2 = 0.02</math> м.          Внутренний слой 1 — медь, толщина <math>h_1 = h_2</math>.          Акустическая среда (морская вода) заполняет область <math>(x/a)^2 + (y/b)^2 \geq 1</math>,  <math>\tilde{F} = 80</math> Н/м.</p>
6		<p>Плоская деформация.          Материал излучателя — сталь, толщина <math>h = 0.02</math> м, <math>a = 0.4</math> м, <math>b = 0.2</math> м, <math>c = 0.5</math> м, <math>d = 0.2</math> м.          Акустическая среда (пресная вода) заполняет область со стороны внешней поверхности излучателя, <math>\tilde{p}_\Gamma = 60</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>
7		<p>Осесимметричная задача.          Поперечное сечение излучателя — двухслойное тело.          Внешний слой 2 — сталь, толщина <math>h_2 = 0.02</math> м.          Внутренний слой 1 — медь, толщина <math>h_1 = h_2</math>.  <math>a = 0.6</math> м, <math>b = 0.5</math> м, <math>c = 0.3</math> м.          Акустическая среда (морская вода) заполняет область со стороны внешней поверхности излучателя, <math>\tilde{p}_\Gamma = 50</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>

Таблица 3.10. Варианты заданий лабораторной работы № 3 (продолжение)

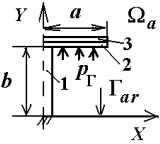
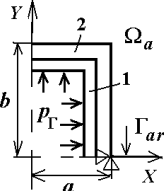
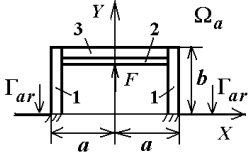
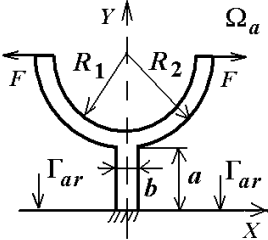
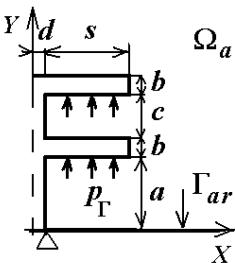
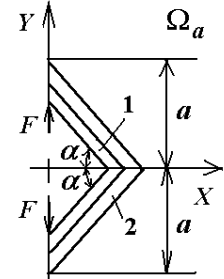
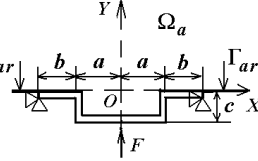
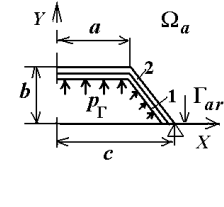
8		<p>Осесимметричная задача.          Поперечное сечение излучателя — трехслойное тело.          Ножка 1 — сталь, радиус <math>r_1 = 0.02</math> м, <math>b = 0.5</math> м,          Нижняя шляпка 2 — медь, толщина <math>h_2 = 0.01</math> м, <math>a = 0.4</math> м.          Верхняя шляпка 3 — титан, толщина <math>h_3 = h_2</math>,          Акустическая среда (пресная вода) заполняет область со стороны внешней поверхности излучателя, <math>\tilde{p}_\Gamma = 70</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>
9		<p>Осесимметричная задача.          Поперечное сечение излучателя — двухслойное тело.          Внешний слой 2 — титан, толщина <math>h_2 = 0.05</math> м.          Внутренний слой 1 — сталь, толщина <math>h_1 = 0.04</math> м, <math>a = 0.3</math> м, <math>b = 0.5</math> м.          Акустическая среда (морская вода) заполняет область со стороны внешней поверхности излучателя, <math>\tilde{p}_\Gamma = 120</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>
10		<p>Плоская деформация.          Поперечное сечение излучателя — трехслойное тело.          Ножка 1 — сталь, толщина <math>h_1 = 0.04</math> м, <math>b = 0.2</math> м,          Нижняя шляпка 2 — медь, толщина <math>h_2 = 0.02</math> м, <math>a = 0.3</math> м.          Верхняя шляпка 3 — титан, толщина <math>h_3 = h_1</math>,          Акустическая среда (пресная вода) заполняет область со стороны внешней поверхности излучателя, <math>\tilde{F} = 150</math> Н/м.</p>
11		<p>Плоская деформация.          Материал излучателя — титан, <math>a = 0.3</math> м, <math>b = 0.1</math> м, <math>R_1 = 0.5</math> м, <math>R_2 = 0.6</math> м.          Акустическая среда (воздух) окружает поверхность излучателя, <math>\tilde{F} = 100</math> Н/м.</p>

Таблица 3.10. Варианты заданий лабораторной работы № 3 (продолжение)

12		<p>Осесимметричная задача.          Материал излучателя — сталь,  <math>a = 0.3</math> м, <math>b = 0.05</math> м, <math>c = 0.2</math> м,  <math>d = 0.05</math> м, <math>s = 0.35</math> м.          Акустическая среда (морская вода)          окружает поверхность излучателя,  <math>\tilde{p}_\Gamma = 100</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>
13		<p>Осесимметричная задача.          Поперечное сечение излучателя —          двухслойное тело.          Внешний слой 2 — титан, толщина <math>h_2 = 0.05</math> м.          Внутренний слой 1 — сталь, толщина  <math>h_1 = 0.05</math> м, <math>a = 0.5</math> м, <math>\alpha = 45^\circ</math> м.          Акустическая среда (пресная вода)          заполняет область со стороны внешней          поверхности излучателя, <math>\tilde{F} = 100</math> Н/м.</p>
14		<p>Плоская деформация.          Материал излучателя — медь,          толщина <math>h = 0.01</math> м, <math>a = 0.2</math> м, <math>b = c = 0.15</math> м.          Акустическая среда (воздух)          заполняет область со стороны внешней          нормали к верхней поверхности излучателя,  <math>\tilde{F} = 150</math> Н/м.</p>
15		<p>Осесимметричная задача.          Поперечное сечение излучателя —          двухслойное тело.          Внешний слой 2 — титан, толщина <math>h_2 = 0.02</math> м.          Внутренний слой 1 — медь, толщина <math>h_1 = h_2</math>.  <math>a = 0.3</math> м, <math>b = 0.2</math> м, <math>c = 0.5</math> м.          Акустическая среда (пресная вода)          заполняет область со стороны внешней          поверхности излучателя, <math>\tilde{p}_\Gamma = 75</math> Н/м<sup>2</sup>.</p>

---

## Список литературы

1. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 446 с.
2. *Белоконов А.В., Наседкин А.В.* О некоторых свойствах собственных частот электроупругих тел конечных размеров // ПММ. 1996. Т. 60. No. 1. С. 151-158.
3. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. Т. 1. Ч. А. С. 204-326.
4. *Быченков Ю.В., Чижевников Е.В.* Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 349 с.
5. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982. 424 с.
6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
7. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
8. *Зубов Л.М., Карякин М.И.* Тензорное исчисление. М.: Вузовская книга, 2006. 120 с.
9. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие граничные условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003. 240 с.
10. *Келлер И.Э.* Тензорное исчисление. СПб.: Лань, 2012. 175 с.
11. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практические применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 718 с.
12. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* К.: Наук. думка, 1989. 279 с.
13. *Наседкин А.В.* Моделирование пьезоэлектрических преобразователей в ANSYS: учебное пособие. Ростов-на-Дону: изд-во ЮФУ, 2015. 176 с.
14. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
15. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
16. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
17. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
18. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 383 с.

19. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
20. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
21. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 410 с.
22. *Стренг К., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
23. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
24. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
25. ANSYS Rel. 11.0. Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench. SAS IP Inc. Canonsburg, 2007. 1110 с.
26. *Benzi M., Golub G.H., Liesen J.* Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica. 2005. V. 14. P. 1–137.
27. *Coussy O.* Poromechanics. J.Wiley and Sons, 2004.
28. *De Gennes P.G.* Pierre Curie and the role of symmetry in physical laws // Ferroelectrics. 1982. V. 40, N 3/4. P. 125–129.
29. *Encyclopedia of Acoustics.* Ed. M.J. Crocker. John Wiley & Sons, New York, 1997. 2096 p.
30. *Howard C.Q., Cazzolato B.S.* Acoustic analyses using Matlab® and Ansys®. CRC Press, Taylor & Francis Group., 2015.
31. *Kallivokas L.F., Bielak J., MacCamy R.C.* Symmetric local absorbing boundaries in time and space // Journal of Engineering Mechanics. 1991. V. 117(9). P. 2027–2048.
32. *Kaltenbacher M.* Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 2004.
33. *Lebedev L.P., Cloud M. J., Eremeyev V.A.* Tensor analysis with applications in mechanics. New Jersey: World Scientific, 2010, 381 p.
34. *Madenci E., Guven I.* The finite element method and applications in engineering using ANSYS. Springer, 2006.
35. *Nasedkin A.V.* Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems. Piezoceramic Materials and Devices, Ed. I. A. Parinov. Nova Science Publ., NY, 2010, P. 177–218.
36. *Nasedkin A.V., Nasedkina A.A.* Finite element modeling of coupled problems: textbook / Rostov-on-Don: publishing house of Southern Federal University, 2015. 174 p.
37. *Srinivas P., Sambana K.Ch., Datti R.K.* Finite element analysis using ANSYS® 11.0. PHI Learning Pvt. Ltd., 2010.

- 
38. *Stolarski T.A., Nakasone Y., Yoshimoto S.* Engineering analysis with ANSYS software. Elsevier, 2006.
  39. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 1. The Basic. 2000.
  40. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 2. Solid Mechanics. 2000.
  41. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. V. 3. Fluid Dynamics. 2000.



*Учебное издание*

**НАСЕДКИН Андрей Викторович  
НАСЕДКИНА Анна Андреевна**

**Моделирование связанных задач:  
математические постановки  
и конечно-элементные технологии**

Учебное пособие

Подписано в печать 09.07.2019 г.  
Бумага офсетная. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. лист. 10,23.  
Уч. изд. л. 9,0. Заказ № 7118. Тираж 30 экз.

Издательство Южного федерального университета.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции  
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.  
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.



9785927153184