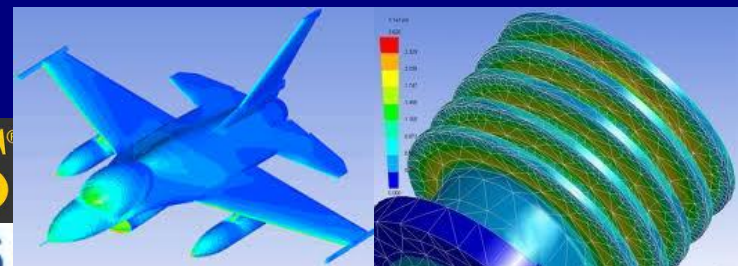




Метод конечных элементов в компьютерном моделировании и инженерии

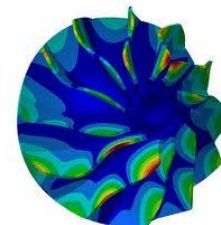
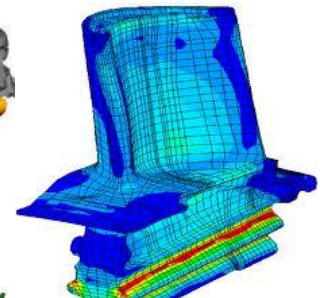
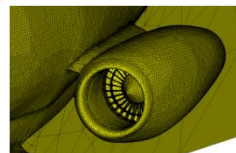


Наседкина А. А.

aanasedkina@sfedu.ru

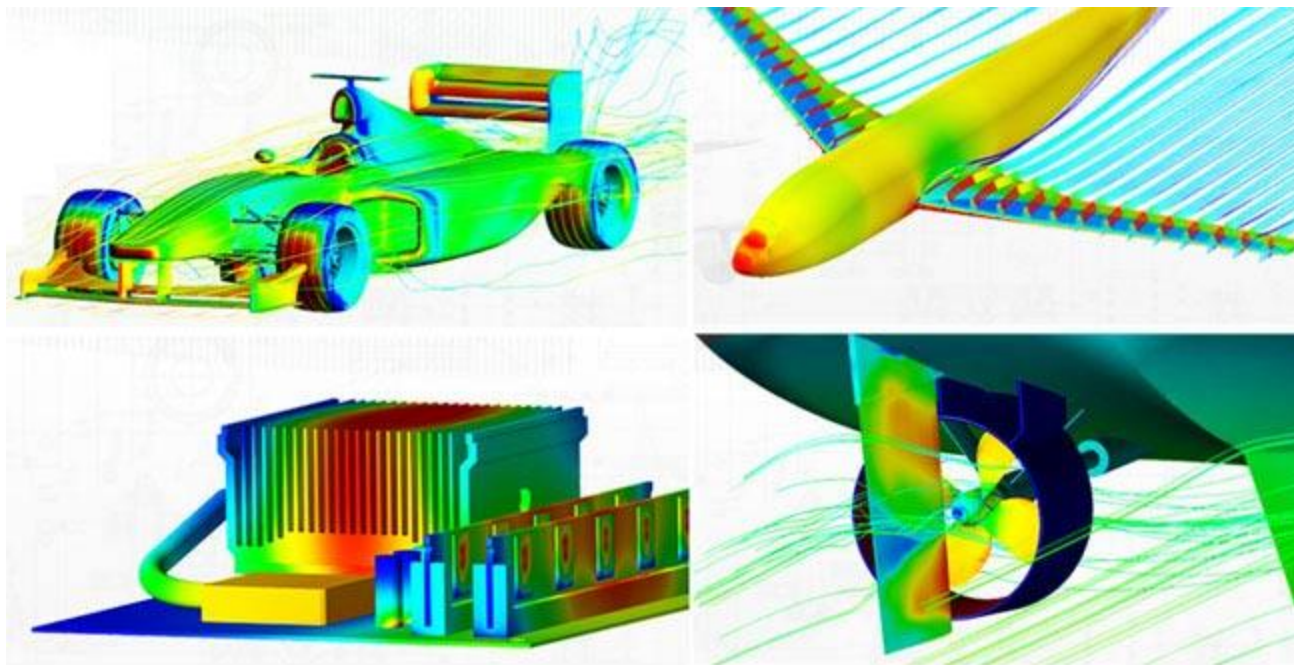
К.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования

ИММиКН, Южный федеральный университет



Содержание

- Компьютерное проектирование и анализ методом конечных элементов (Computer Aided Engineering and Finite Element Analysis)
- Основные концепции метода конечных элементов (Finite Element Method, МКЭ)
- Обзор программных пакетов для конечно-элементного анализа



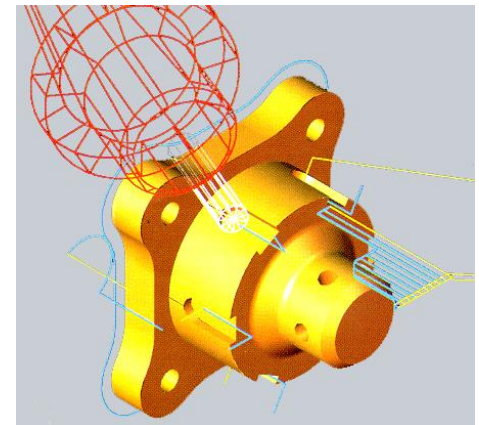
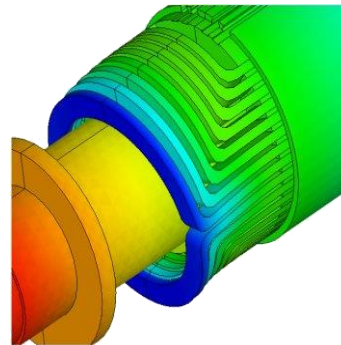
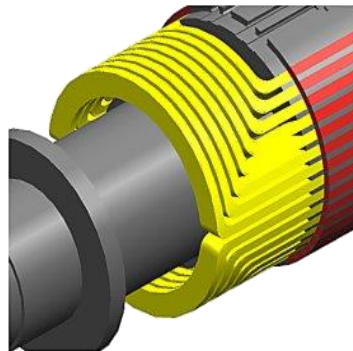
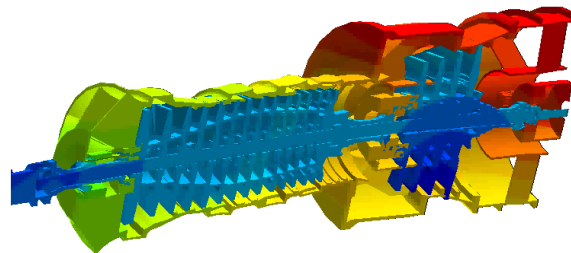
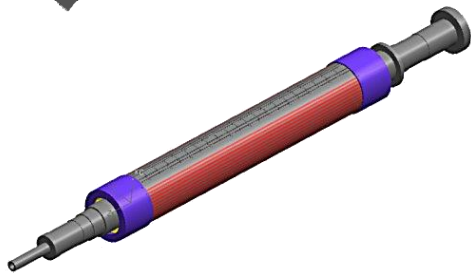
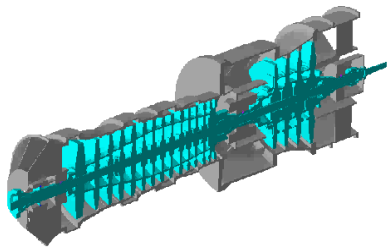
**Компьютерное проектирование и анализ
методом конечных элементов (Computer
Aided Engineering and Finite Element
Analysis)**

CAD/CAE/CAM

**CAD –
Computer Aided
Design**

**CAE –
Computer Aided
Engineering**

**CAM –
Computer Aided
Manufacturing**



**CAD – САПР
Средства Автоматизированного
ПРОектирования**

Роль моделирования в инженерии: пример применения CAD-программы

Boeing 777

- Первый пассажирский самолет, полностью спроектированный в цифровом виде с использованием 3D-технологий
- На протяжении всего процесса проектирования самолет был «предварительно собран» на компьютере, что исключило необходимость в дорогостоящем полномасштабном макете (экспериментальной модели)
- Инфраструктура САПР (CAD) для проектирования стоимостью 4 миллиарда долларов

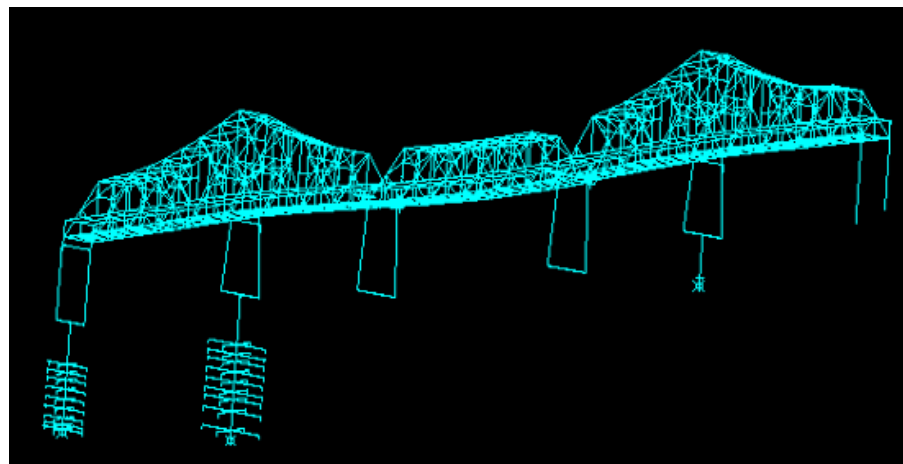


CAD-система: CATIA (Computer-aided Three-dimensional Interactive Application)

CAE-система: ELFINI

Разработаны компанией Dassault Systemes (Франция)

Роль моделирования в инженерии: пример применения САЕ-программы

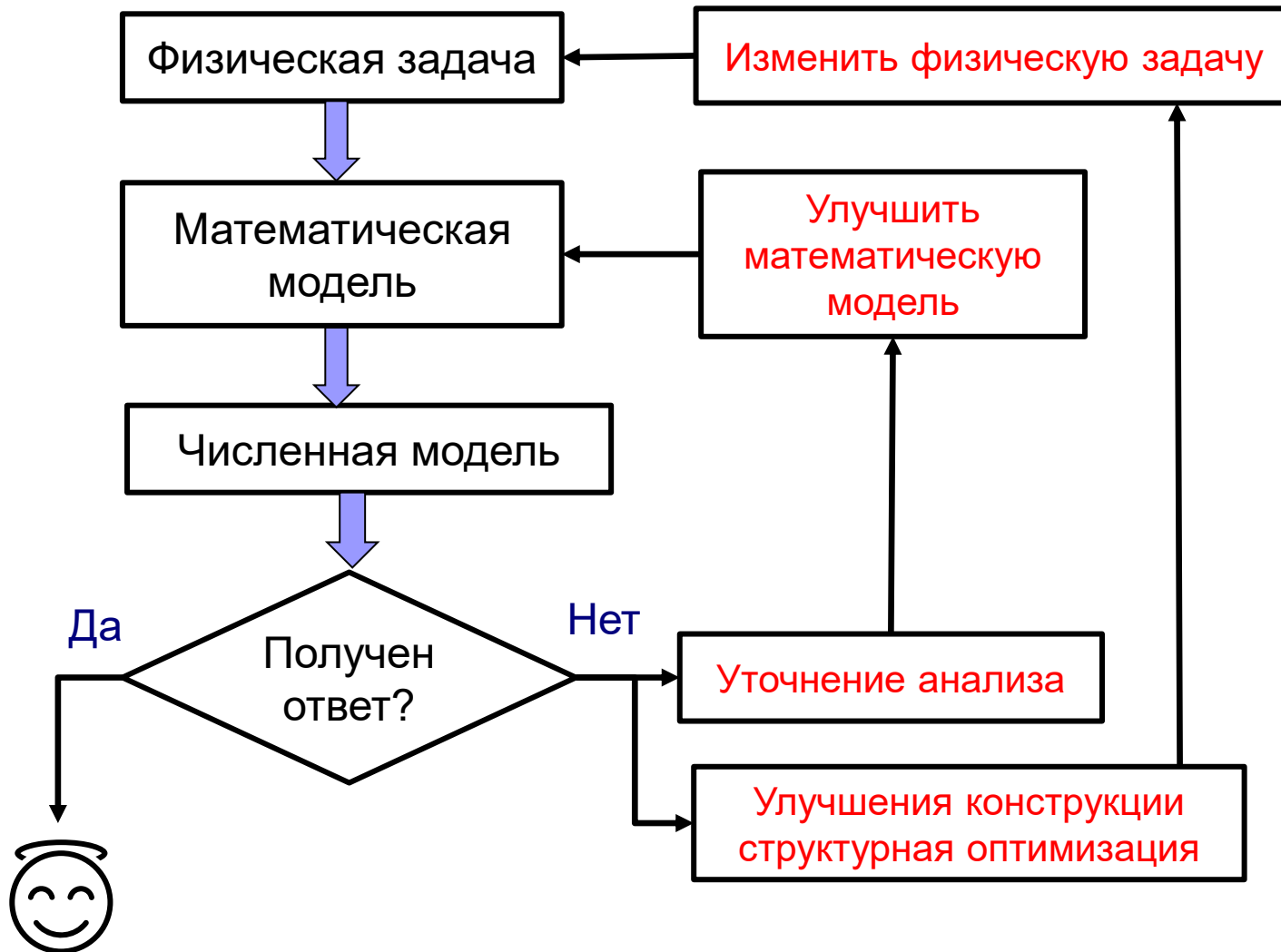


Мост через залив Сан-Франциско-Окленд

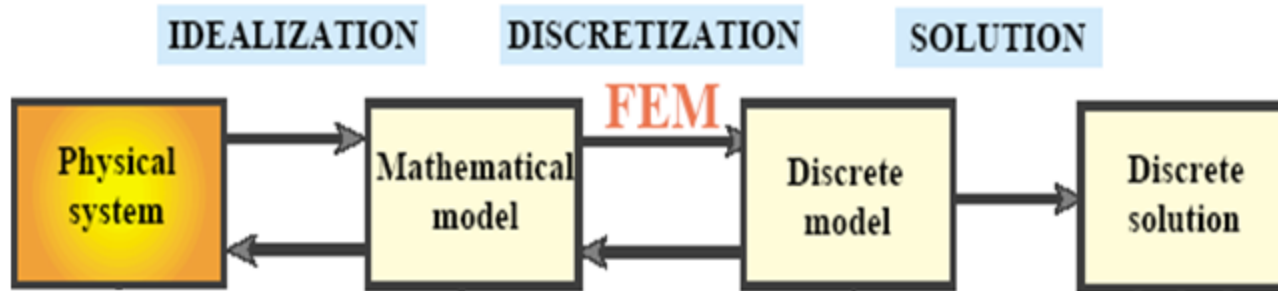
- Сейсмический анализ моста после землетрясения Лома-Приета 1989 года
- Конечно-элементная модель участка моста, подверженного сейсмической нагрузке
- Система **САЕ: ADINA** (США, находится в штате Массачусетс)



Блок-схема процесса компьютерного моделирования



От физических систем к математическому моделированию



- **Идеализация (Idealization):** математическая модель, представляющая собой абстракцию физической реальности. Она описывается дифференциальными уравнениями в частных производных. Моделирование может быть явным и неявным.
- **Дискретизация (Discretization):** применение численного метода, например, метода конечных элементов, метода конечных разностей и т. д.
- **Решение (Solution):** алгоритмы решения линейных систем, оценка погрешности и анализ сходимости.

Что такое конечно-элементный анализ (Finite Element Analysis, FEA)?

- Моделирование методом конечных элементов (численный метод)
- Раздел механики твердого тела (традиционно)
- Распространенный метод для решения задач математической физики (на сегодняшний день)

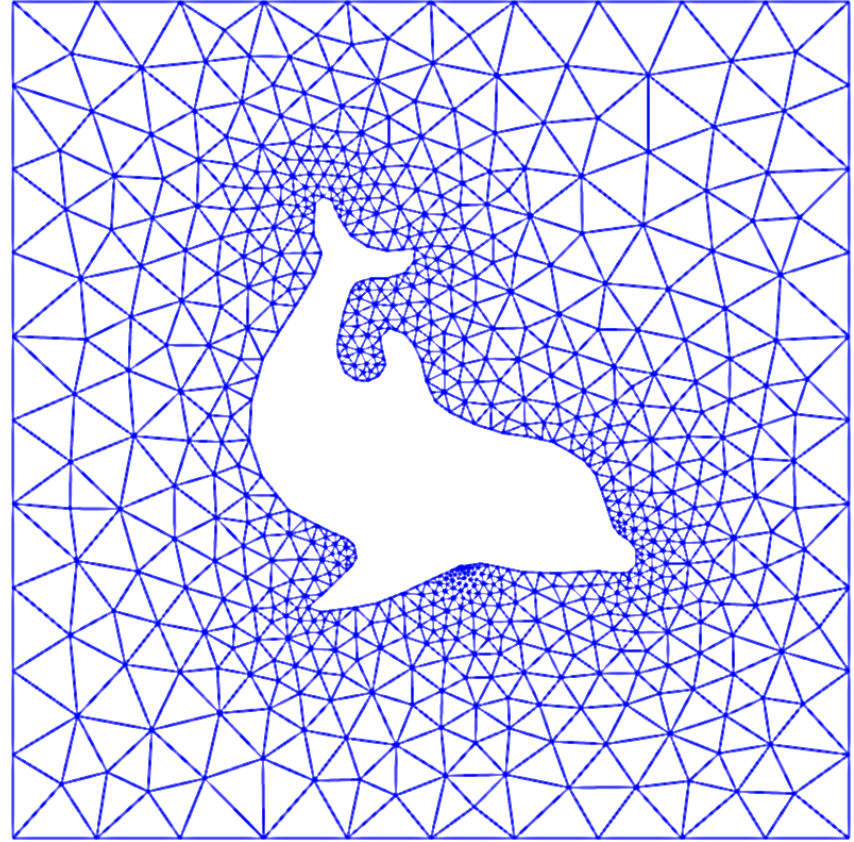
Области применения FEA

- Структурный анализ (Structural analysis): консольная балка, мост, нефтяная платформа...
- Механика твердого тела (Solid mechanics): шестерня, силовая установка автомобиля...
- Динамика: землетрясение, удар пули...
- Тепловой анализ (Thermal analysis): термопластичные полимеры
- Электрический анализ: распространение электрического сигнала...
- Биоматериалы: органы и ткани человека...
- и многие другие области



Примеры областей применения конечно-элементного анализа

- Машиностроение/Аэрокосмическая техника/Гражданское строительство/Автомобильная техника
- Структурный анализ/расчет напряженно-деформированного состояния (статический/динамический, линейный/нелинейный)
- Модальный анализ, гармонический анализ (расчет установившихся колебаний)
- Теплопередача, расчет потока тепла
- Гидродинамика
- Акустика
- Аэродинамика
- Механика грунтов, механика горных пород, механика разрушения
- Биомеханика
- Ползучесть и пластичность
- Электромагнитные поля
- Анализ связанных полей



Основные концепции метода конечных элементов

Что такое метод конечных элементов (Finite Element Method, FEM)?

Есть две интерпретации

- **Физическая интерпретация**

Непрерывная физическая модель (сплошная среда) делится на конечные части, называемые элементами, и к каждому элементу применяются законы природы. Затем результаты объединяются для представления сплошной среды.

- **Математическая интерпретация**

Численный метод: обобщение классических вариационных методов (метода Ритца) и методов взвешенных невязок (метода Галеркина, метода наименьших квадратов и т. д.). Каждое дифференциальное уравнение, представляющее физическую систему, преобразуется в вариационную форму, которая аппроксимируется линейной комбинацией конечного набора пробных функций.

Почему метод конечных элементов широко используется?

Большинство реальных задач:

- определены на геометрически сложных областях
- имеют различные граничные условия на разных участках границы.

Поэтому обычно невозможно (или сложно):

- найти решение аналитически (т. е. надо использовать численные методы);
- получить аппроксимирующие функции, необходимые в традиционных вариационных методах.

Решением этих проблем является моделирование **методом конечных элементов**.

Историческая справка: теория МКЭ

- В 1870-х годах лорд Джон Уильям Струтт Рэлей разработал метод прогнозирования собственных частот простых конструкций. В этом методе рассматривалась деформированная форма конструкции, которая рассчитывалась с помощью минимизации потенциальной энергии конструкции.
- В 1909 году Вальтер Ритц усовершенствовал этот метод, создав метод, известный теперь как метод Рэля-Ритца, для аппроксимации функционала энергии известными функциями с неизвестными коэффициентами, при этом задача сводится к системе линейных уравнений равновесия. Данный метод широко используется в строительной механике.
- В 1915 году Галеркин опубликовал статью, в которой выдвинул идею приближенного метода для решения дифференциальных уравнений, в частности, для решения краевых задач. Он применил свой метод к большому числу задач анализа опор и пластин.
- До этого И.Г. Бубнов независимо разработал аналогичный подход к решению вариационных задач, который он назвал вариантом метода Ритца.

Историческая справка: теория МКЭ (продолжение)

- 1940-е годы – в аэрокосмической технике: идея представления непрерывной области (сплошной среды) системой дискретных элементов.
- В 1941 году Хренников предложил метод (framework method), с помощью которого двумерные упругие континуумы моделируются как система ферменных каркасов (стержней и балок).
- В 1943 году Ричард Курант использовал вариационную формулировку для аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных линейной интерполяцией по треугольному элементу.
- Для проекта Boeing Тернер, Клаф и другие использовали структурные треугольные элементы в анализе плоского напряженного состояния, а также сформулировали матрицу жесткости для треугольного элемента.
- В 1960 году доктор Рэй Клаф ввел термин «конечный элемент».
- 1960-е и 70-е годы – разработки Дж. Х. Аргириса (Штутгартский университет), Р. В. Клафа (Калифорнийский университет в Беркли), О. К. Зиенкевича (Суонсианский университет) и Ричарда Галлахера (Корнельский университет).

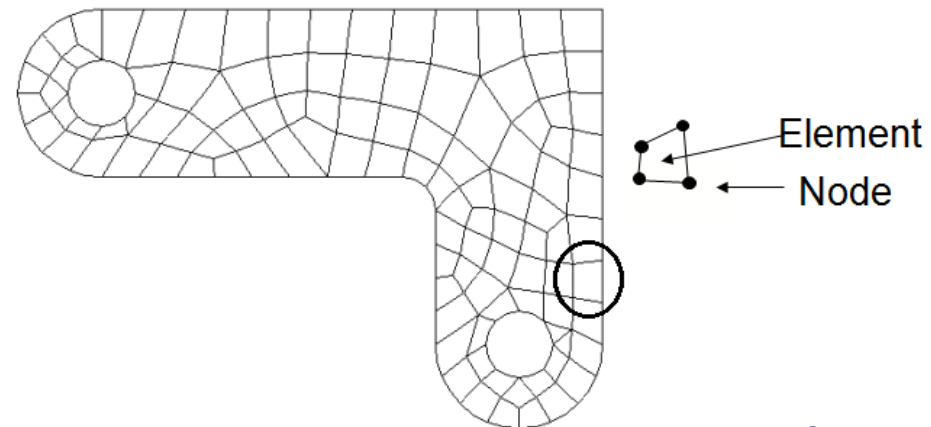
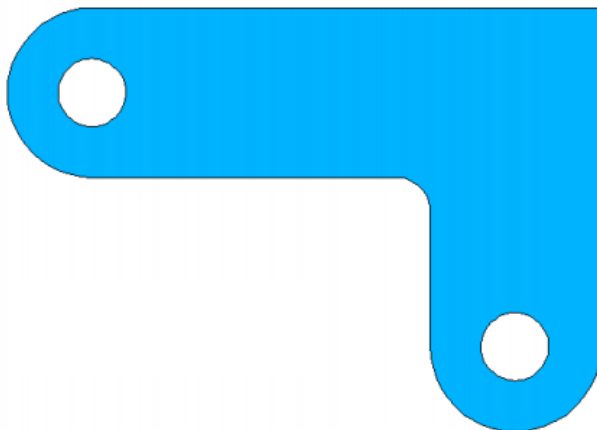
Историческая справка: разработка CAD и CAE программных пакетов

- В начале 1960-х годов корпорация MacNeal-Schwendle (MSC) разработала универсальный код для конечно-элементного анализа (FEA) для NASA (National Aeronautics and Space Administration). После завершения контракта с NASA, MSC продолжила разработку собственной версии, получившей название MSC/NASTRAN.
- Примерно в то же время, когда был выпущен MSC/NASTRAN, появились ANSYS, MARC и SAP.
- К 1970-м годам были внедрены средства автоматизированного проектирования (САПР), по-английски Computer-aided design (CAD).
- В 1980-х годах САПР перешли от инструмента 2D-черчения к инструменту 3D-моделирования поверхностей. Инженеры-конструкторы начали всерьез рассматривать возможность включения МКЭ в общий процесс проектирования деталей.
- 1990-е годы – технология FEM фактически стала «скрытой» внутри пакетов CAE.

Основная идея метода конечных элементов

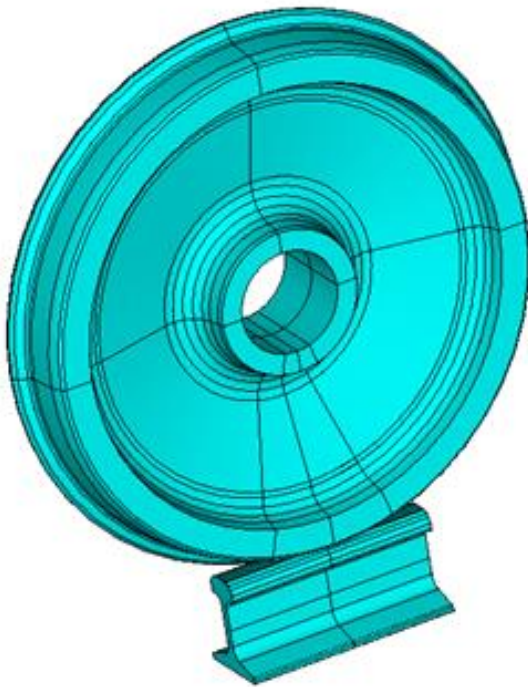
Заданную область можно рассматривать как совокупность простых геометрических фигур, называемых **конечными элементами**, для которых можно систематически генерировать аппроксимирующие функции (**функции формы**, интерполяционные функции).

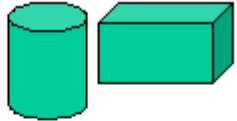
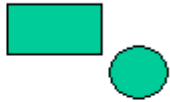


- Твердотельная модель (Solid model) кронштейна
- Конечно-элементная модель кронштейна
- система элементов (elements) и узлов (nodes)



От твердотельной модели...

- Твердотельная модель контакта колеса и рельса

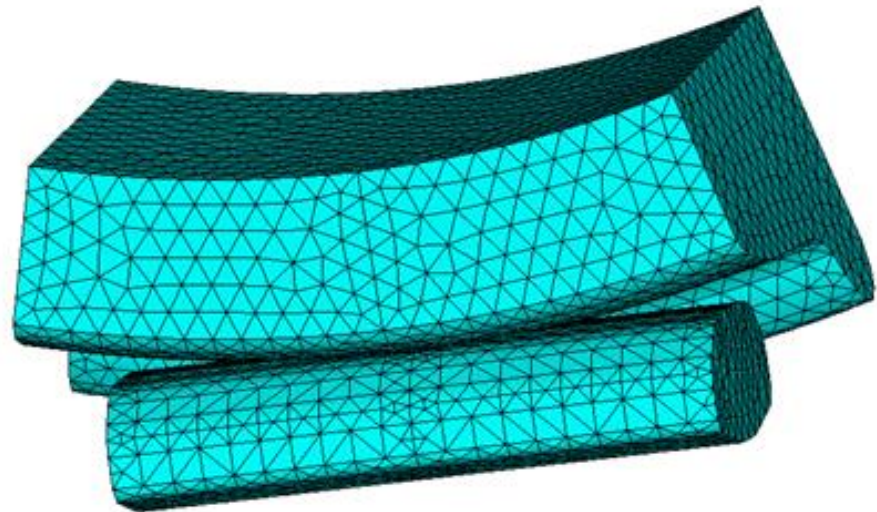
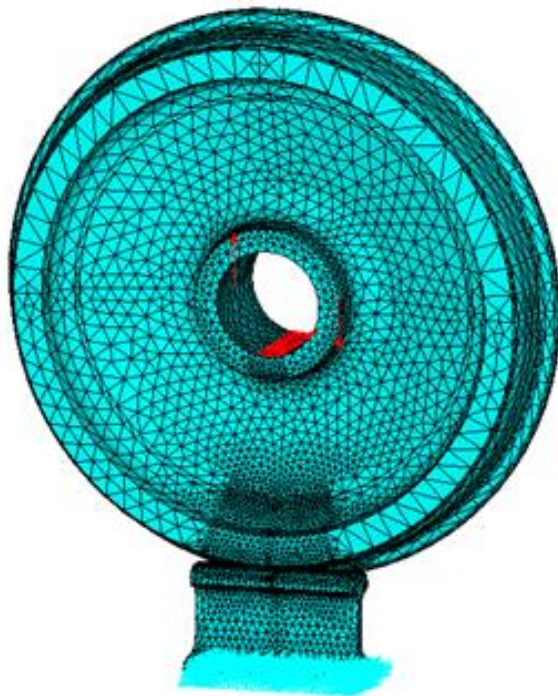


Volumes	
Areas	
Lines	
Keypoints	

- **Твердотельное моделирование** — это процесс создания твердотельных моделей в САПР-системе.
- Твердотельная модель состоит из твердотельных сущностей: объемов (Volumes), областей (Areas), линий (Lines) и опорных точек (keypoints)
- Есть строгая иерархия этих сущностей: сущность нижнего уровня нельзя удалить, если она принадлежит сущности верхнего уровня

...к конечно-элементной модели

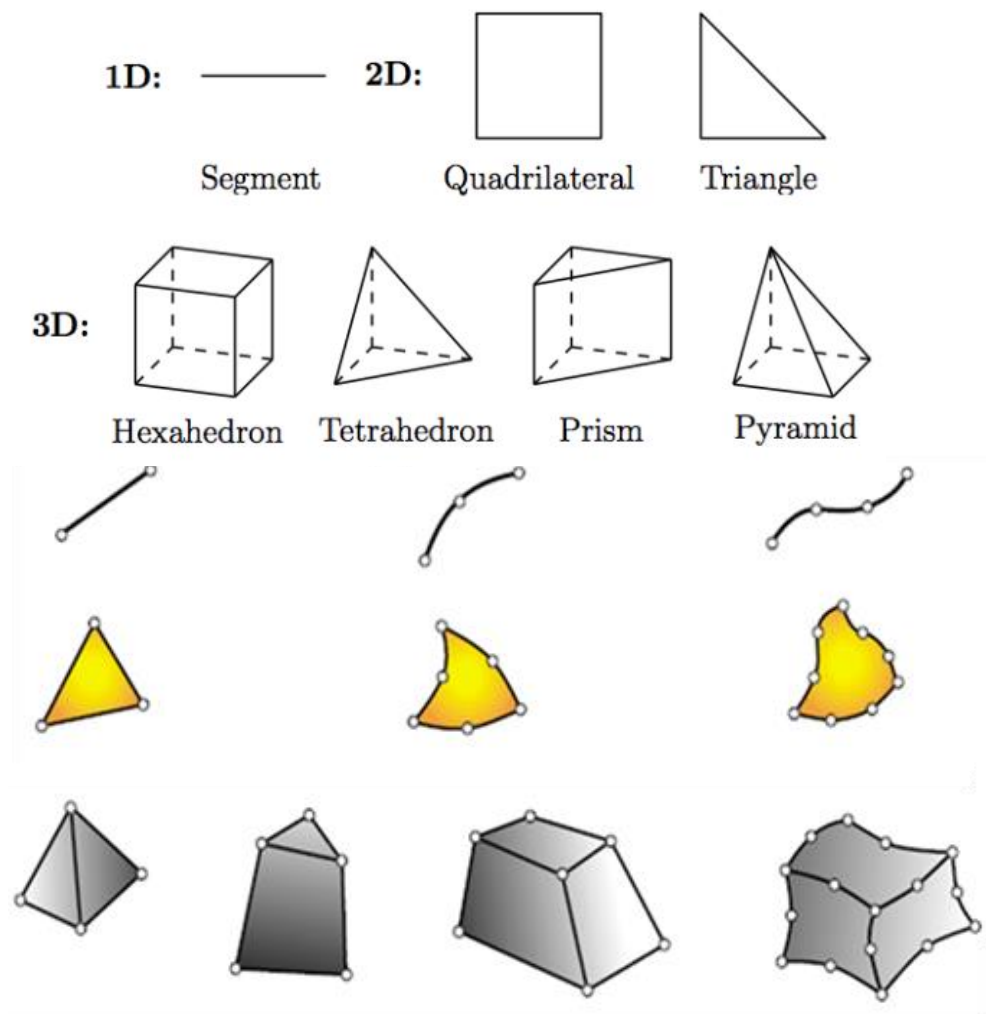
- Конечно-элементная модель контакта колеса и рельса (с показом приложенных граничных условий)



Обзор конечных элементов

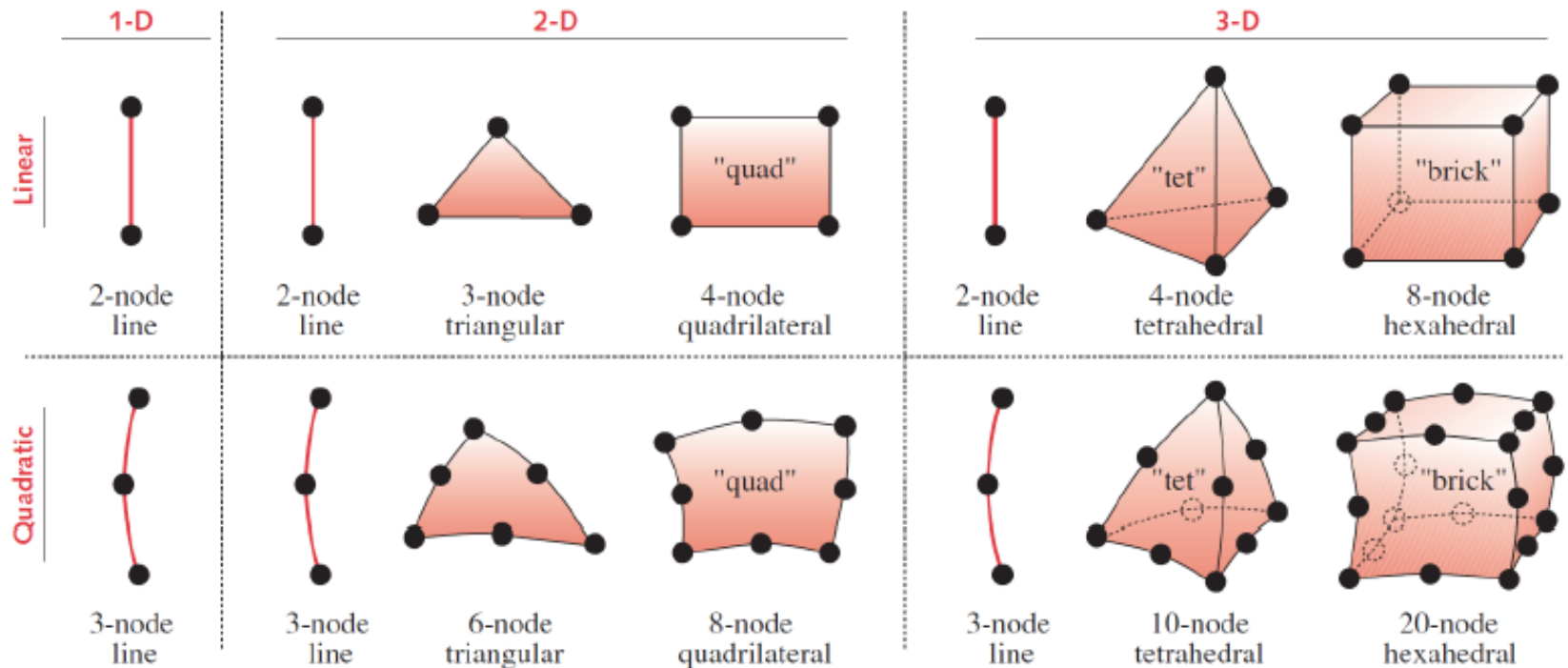
Конечные элементы можно классифицировать по различным признакам

- **Размерность** (1D – линии, 2D - плоские, 3D - твердотельные)
- **Количество узлов** (линейные, квадратичные – в зависимости от степени полинома функции формы)
- **Геометрия (форма)** (2D: треугольники, четырехугольники, 3D: тетраэдры, гексаэдры, пирамиды, призмы)
- **Степени свободы (Degrees of Freedom, DOF)** – это неизвестные в уравнениях, например, температура, перемещения, электрический потенциал и т.д.

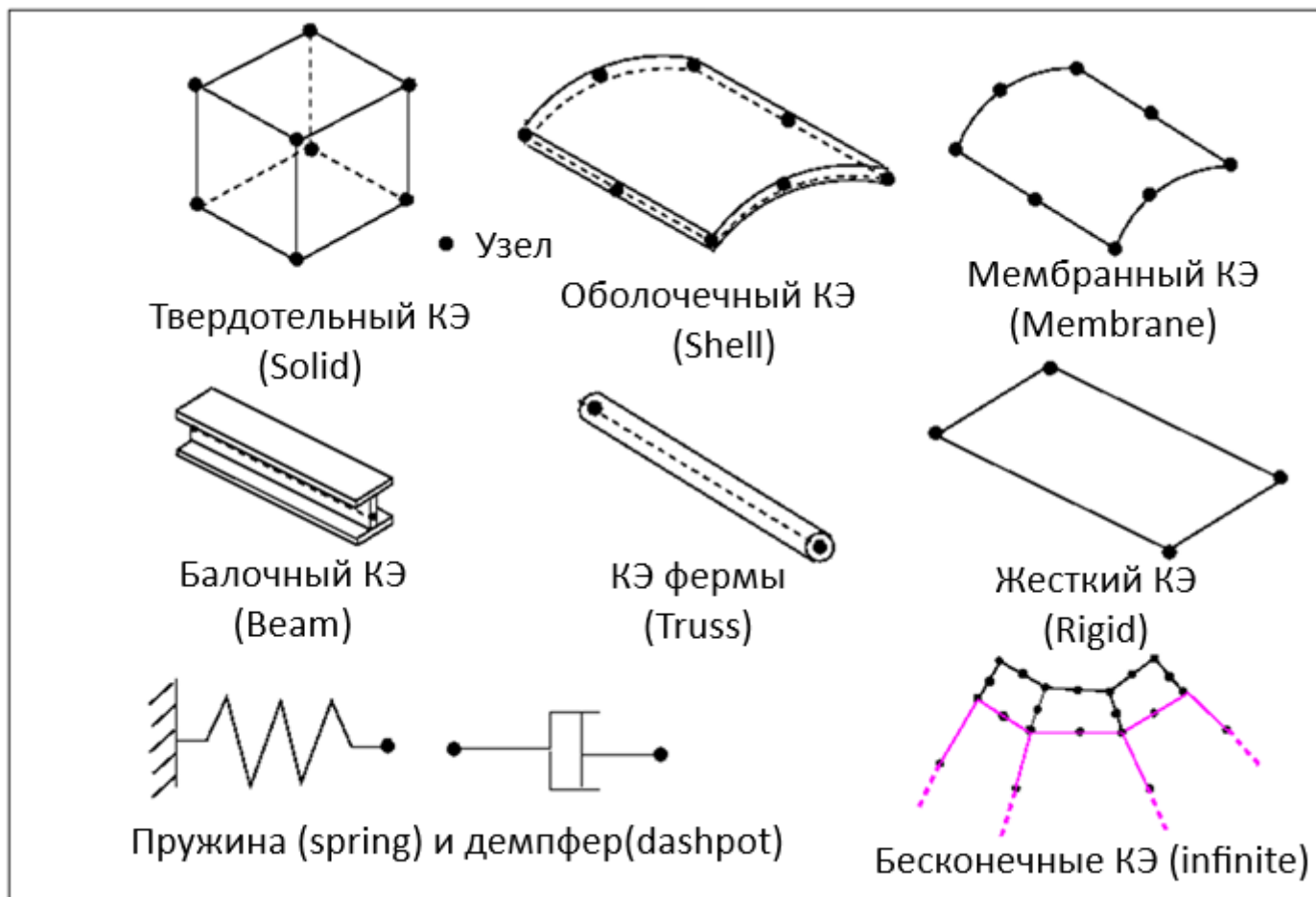


Основные конечные элементы, классификация по числу узлов

- 1D, 2D, 3D
- Линейные и квадратичные



Названия конечных элементов, специальные КЭ



Сравнение метода конечных элементов с методом конечных разностей

■ Метод конечных элементов (МКЭ), Finite element method (FEM)

- Задача дискретизирована, физический смысл сохраняется на элементах.
- МКЭ использует точные операторы, но аппроксимирует базисные функции решения. Кроме того, метод конечных элементов решает задачу внутри конечно-элементной сетки (и, при необходимости, в самих узлах сетки).

■ Метод конечных разностей (МКР), Finite difference method (FDM)

- МКР аппроксимирует производные в дифференциальном уравнении с помощью разностных уравнений.
- Решение дискретизируется, что приводит к потере физического смысла.
- Фактически МКР аппроксимирует оператор (например, производную) и решает задачу на множестве точек (сетке).

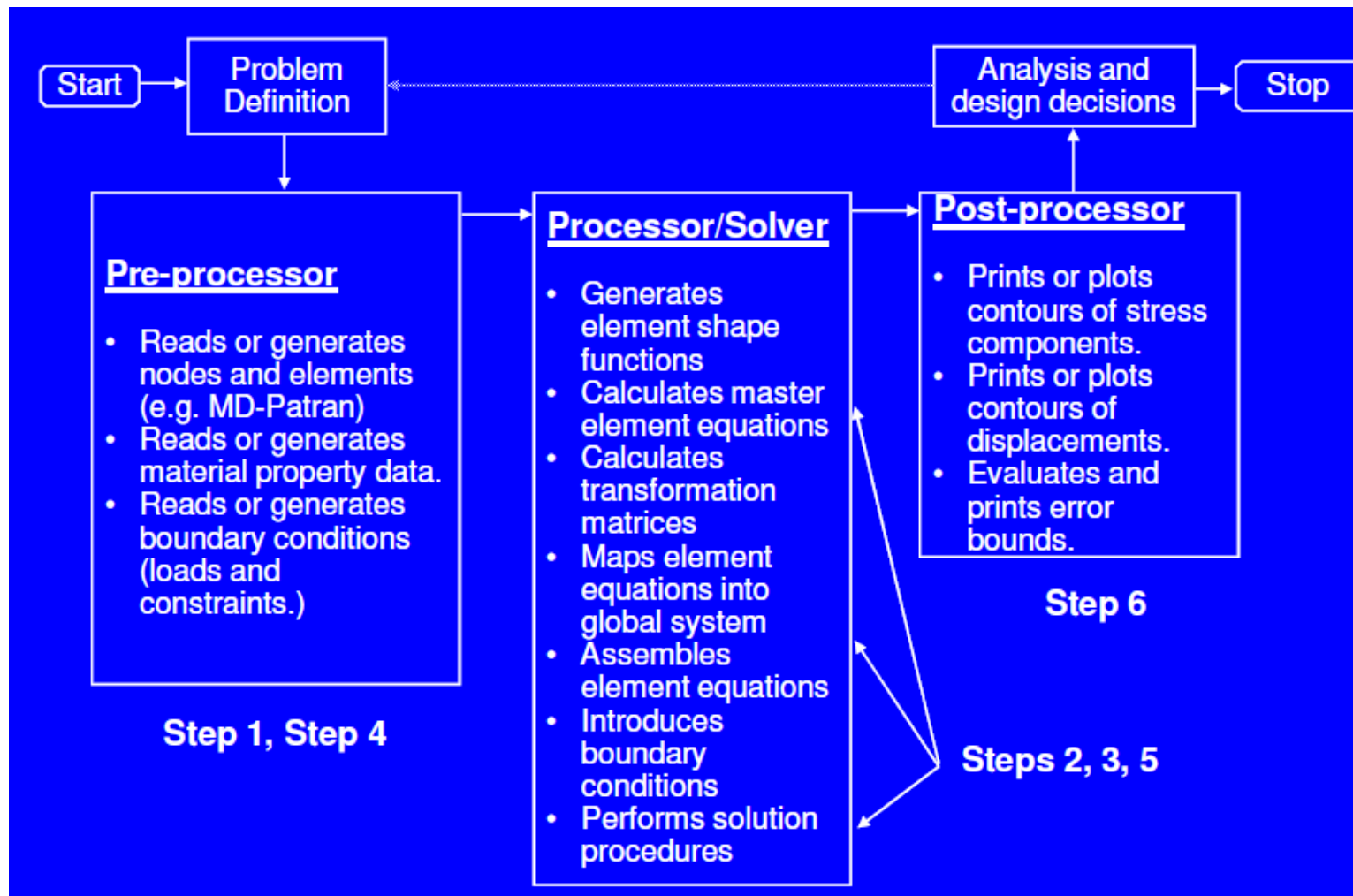
+ МКР хорошо работает для двумерных областей с границами, параллельными координатным осям

- Неудобен, когда области имеют криволинейные границы

Этапы конечно-элементного анализа

- **Step 1 – Дискретизация (генерация сетки):** Область разбивается на набор непересекающихся областей простых форм (**конечные элементы**), соединенных между собой через специальные точки (**узлы**).
- **Step 2 – Получение элементных уравнений (слабая формулировка)** с использованием физики задачи и, как правило, метода Галеркина или вариационных принципов.
- **Step 3 – Сборка (Assembly):** элементные уравнения для каждого КЭ в конечно-элементной сетке объединяются в набор глобальных уравнений, моделирующих свойства всей системы.
- **Step 4 – Применение граничных условий:** Решение не может быть получено без применения граничных условий. Они отражают известные значения для некоторых основных неизвестных. Наложение граничных условий изменяет глобальные уравнения.
- **Step 5 – Решение для основных неизвестных** (температура, перемещения). Модифицированные глобальные уравнения решаются для основных неизвестных в узлах.
- **Step 6 – Вычисление производных величин** (поток тепла, деформации, напряжения) с использованием значений основных переменных в узлах.

Диаграмма конечно-элементного анализа





Обзор программных пакетов для конечно-элементного анализа

Некоторые примеры конечно-элементных пакетов

Коммерческие пакеты и программы:

- **ABAQUS FEA** (Dassault Systèmes)
- **ANSYS** (ANSYS Inc.)
- **COMSOL Multiphysics**
- ADINA (ADINA R&D Inc.)
- MSC. Software (NASTRAN, MARC, PATRAN, DYTRAN)
- CosmosWorks
- **FlexPDE** (PDE Solutions Inc.)

Бесплатные (студенческие) версии коммерческих пакетов:

- ABAQUS SE (Student Edition)
- ANSYS Student
- FlexPDE Lite

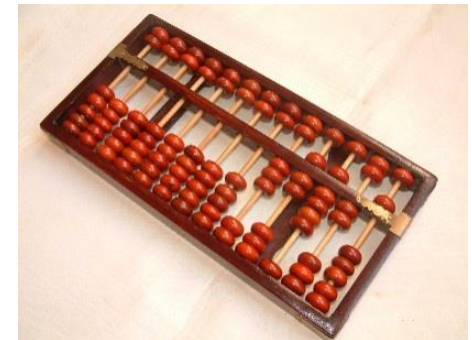
Бесплатные пакеты: **FreeFEM++**, ELMER, LISA и др.

ABAQUS FEA



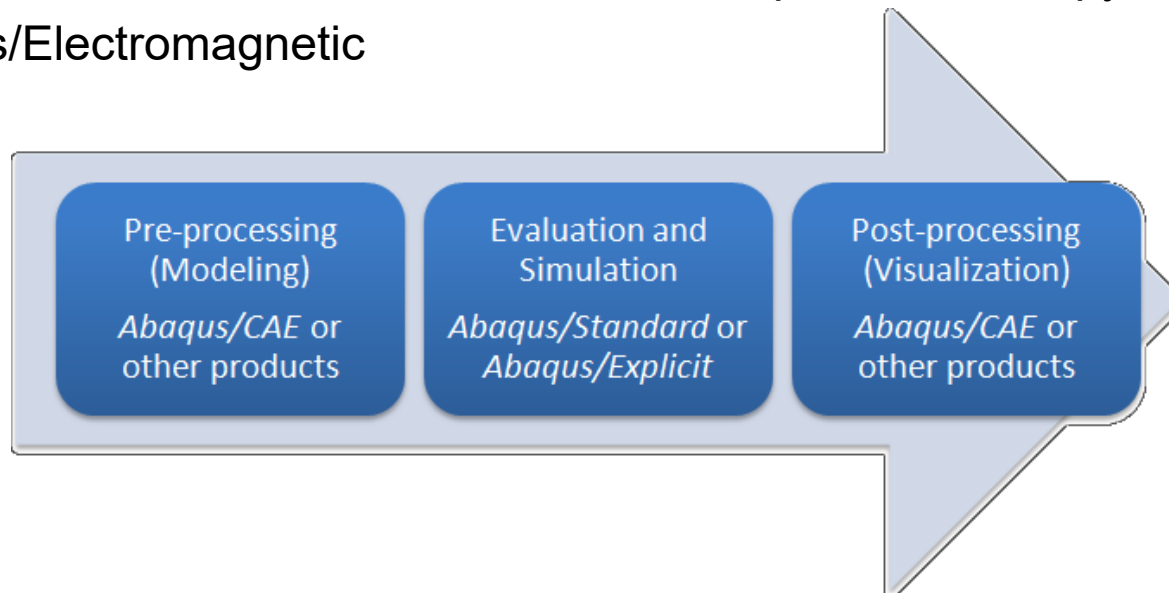
■ SIMULIA Abaqus FEA

- *Название и логотип происходит от счет (abacus)*
- Разработчик: Dassault Systemes Simulia Corp..
- Первый выпуск: 1978
- Операционная система: Microsoft Windows, Linux
- Лицензия: коммерческое ПО
- Сайт: www.simulia.com,
www.3ds.com/products/simulia



ABAQUS FEA: основные продукты

- Abaqus/CAE, or "Complete Abaqus Environment"
- Abaqus/CFD, Computational Fluid Dynamics
- Abaqus/Standard, универсальный конечно-элементный решатель, использующий неявную схему интегрирования (традиционную)
- Abaqus/Explicit, специализированный конечно-элементный анализатор, использующий явную схему интегрирования для решения задач с сильно нелинейными системами, имеющими множество сложных контактов, под воздействием переходных нагрузок.
- Abaqus/Electromagnetic



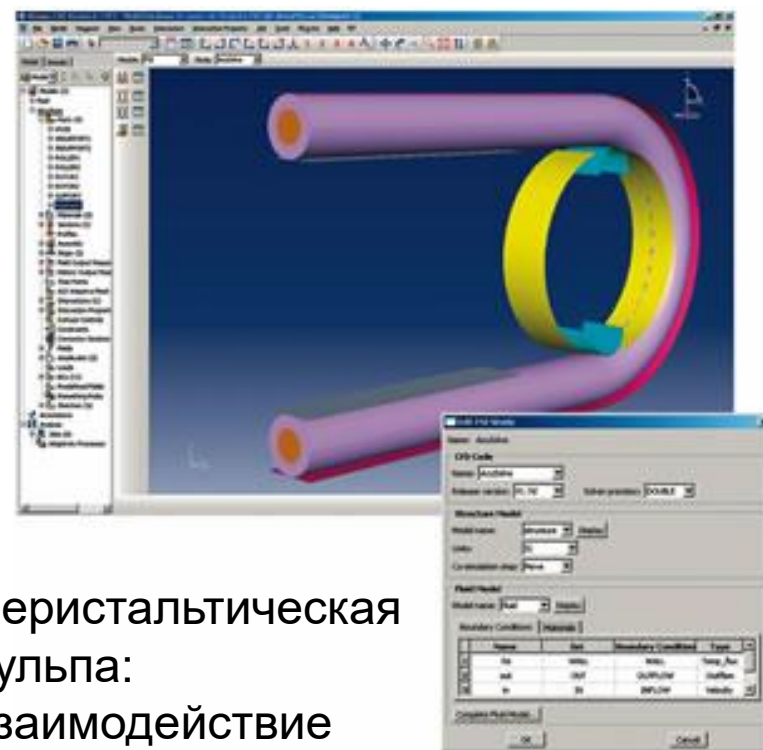
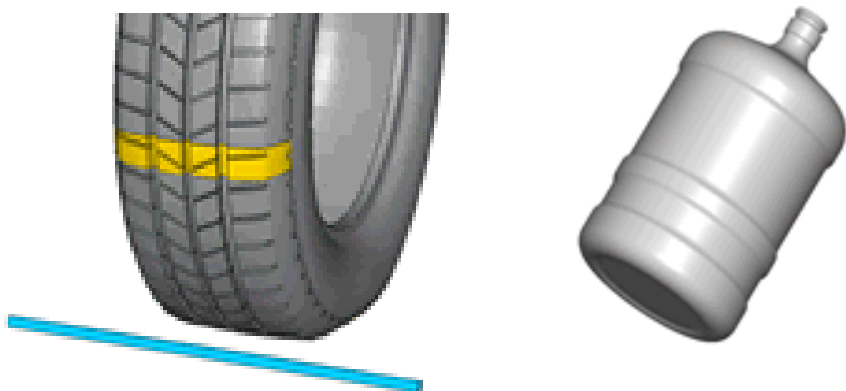
ABAQUS FEA: основные черты

- Abaqus изначально был разработан для решения сложных нелинейных задач. Акцент на нелинейности: большие деформации, сложное контактное взаимодействие, нелинейное поведение материалов (пластичность, гиперупругость, ползучесть), моделирование разрушения (когезивные модели, XFEM)
- Хороший набор возможностей для моделирования различных физических процессов со связанными полями: акустико-структурные, пьезоэлектрические и пороупругие модели и т. д.
 - Возможности как для статических, так и для динамических задач.
 - Возможность моделирования очень больших изменений формы твердых тел как в двух, так и в трех измерениях.
 - Очень обширная библиотека элементов
 - Развитая возможность моделирования контакта между твердыми телами.
 - Расширенная библиотека материалов, включающая модели для пенопластов, бетона, грунтов, пьезоэлектрических материалов и многих других.

ABAQUS FEA: примеры применения

- ❑ Автомобильная и аэрокосмическая промышленность, обработка материалов
- ❑ Академические и научно-исследовательские учреждения

Сопряженный эйлерово-лагранжевый анализ (CEL) в Abaqus Explicit:
аквапланирование шин и падение контейнера с жидкостью.



Перистальтическая
пульпа:
взаимодействие
жидкости и твердой
среды

ANSYS



- *ANSYS – ANalyses SYStem*
- Разработчик: ANSYS Inc. (изначально Swanson Analysis Systems, Inc. (SASI) by John Swanson)
- Год основания: 1970, Canonsburg, Pennsylvania
- Операционная система: Microsoft Windows, Linux and IBM AIX
- Лицензия: коммерческое ПО
- Сайт: www.ansys.com

ANSYS: основные продукты

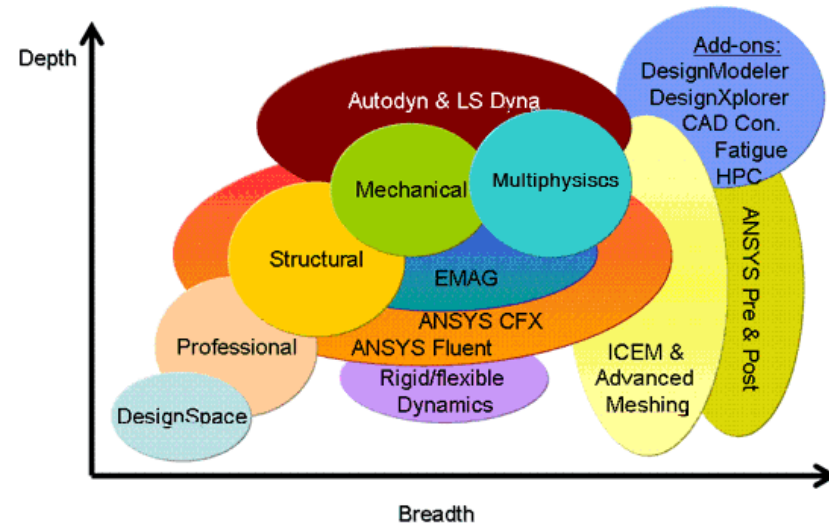
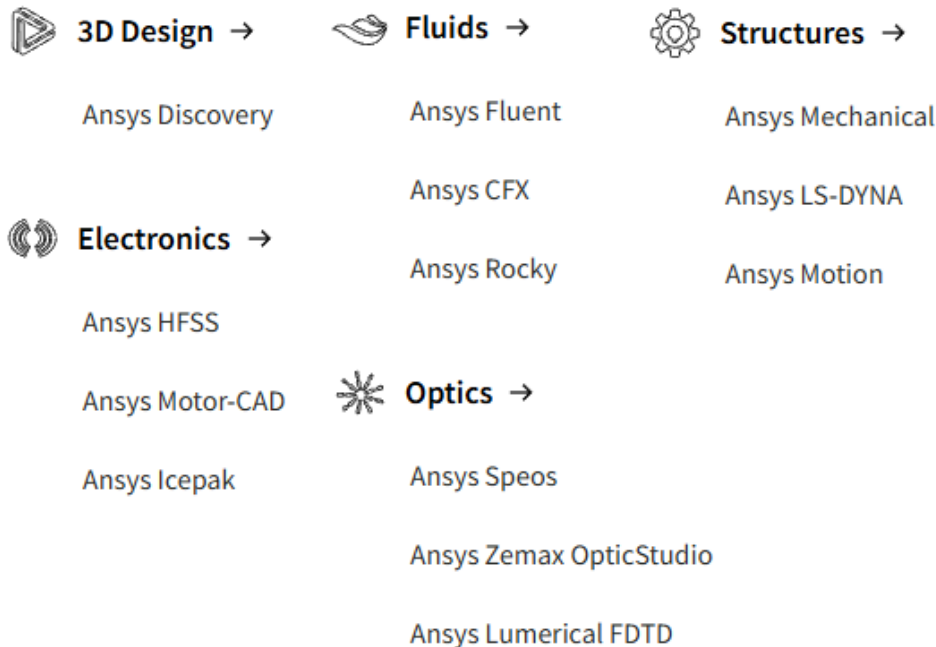


■ Технологии моделирования:

структурная механика, мультифизика, гидродинамика, явная динамика, электромагнетизм, гидродинамика (AQWA).

■ Технологии рабочего процесса (workflow):

Платформа ANSYS Workbench (графическая среда для управления проектами), высокопроизводительные вычисления, геометрические интерфейсы, процесс моделирования и управление данными.



ANSYS : основные черты

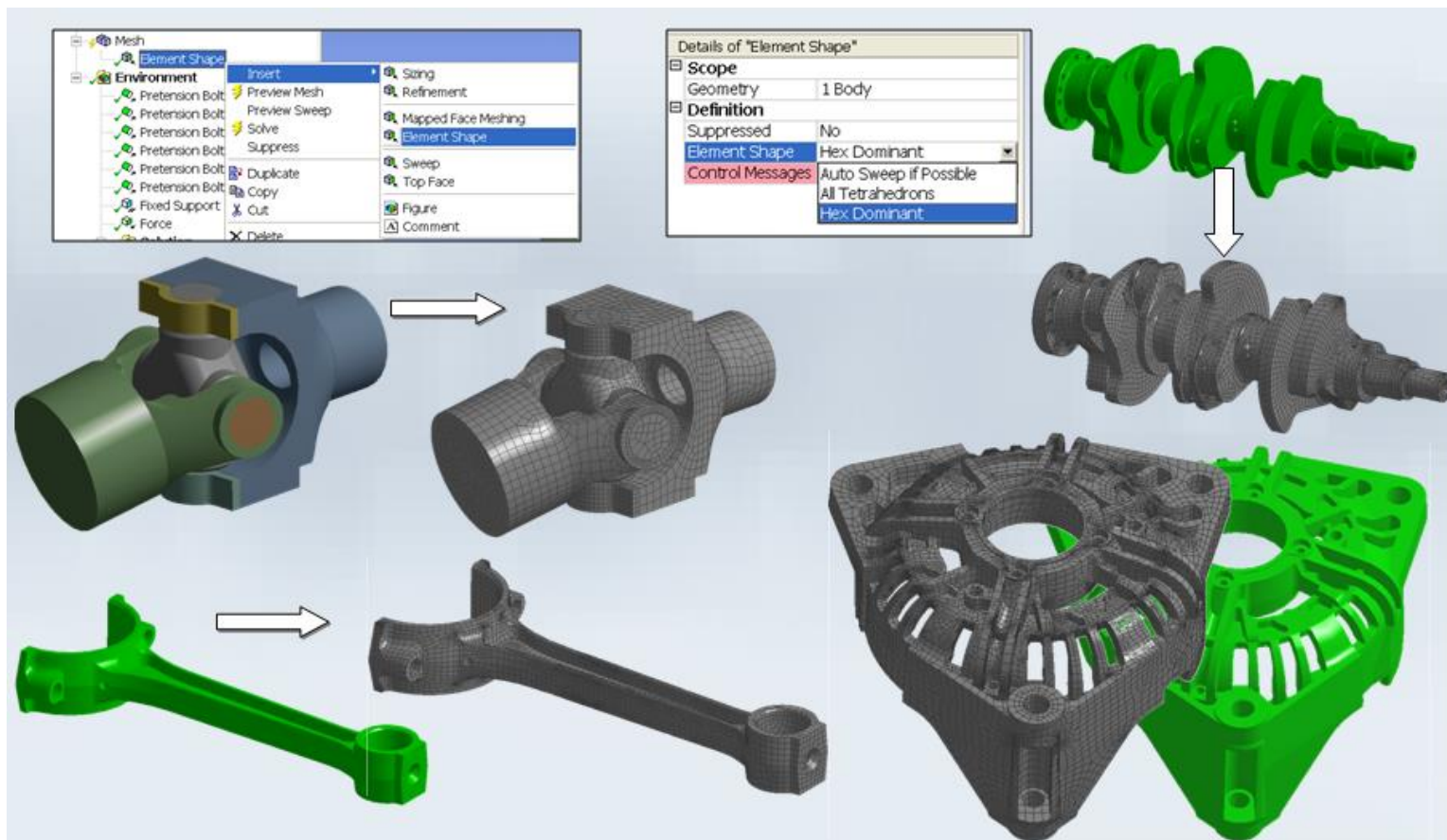
- Ansys — **комплексная экосистема инженерного моделирования**, охватывающая практически все физические дисциплины.
- Модульная структура: множество взаимосвязанных модулей (Ansys Mechanical, Fluent, CFX, Electronics, LS-DYNA и т.д.)
- Мультифизичность (Coupled Field Analysis): Возможность расчета связанных физических полей, объединяя структурный, тепловой, электромагнитный анализы и гидрогазодинамику (CFD) в одной модели.
- Моделирование сложных материалов: композиты, пластичности металлов, гиперупругости (резины), сплавов с памятью формы, ползучести и других нелинейных свойств.
- Продвинутый контактный анализ: работа с нелинейными контактными взаимодействиями (трение, проскальзывание).
- Динамический анализ: в том числе анализ случайных вибраций, явная динамика (Explicit) для ударов и разрушений.
- Автоматизация и оптимизация: Инструменты топологической и параметрической оптимизации (DesignExplorer) для улучшения конструкции.
- Интеграция с CAD: Совместимость с большинством САПР (NX, CATIA, SolidWorks, Autodesk Inventor) для прямого импорта геометрии.

ANSYS: применение



- ☐ Широко используется в промышленности:
 - ☐ Аэрокосмическая и оборонная промышленность
 - ☐ Автомобильная промышленность
 - ☐ Строительство
 - ☐ Товары народного потребления
 - ☐ Электроника и полупроводники
 - ☐ Энергетика
 - ☐ Здравоохранение
 - ☐ Промышленное оборудование и вращающиеся механизмы
 - ☐ Материалы и химическая обработка
- ☐ Академические и научно-исследовательские учреждения

ANSYS: автоматическая генерация конечно-элементной сетки



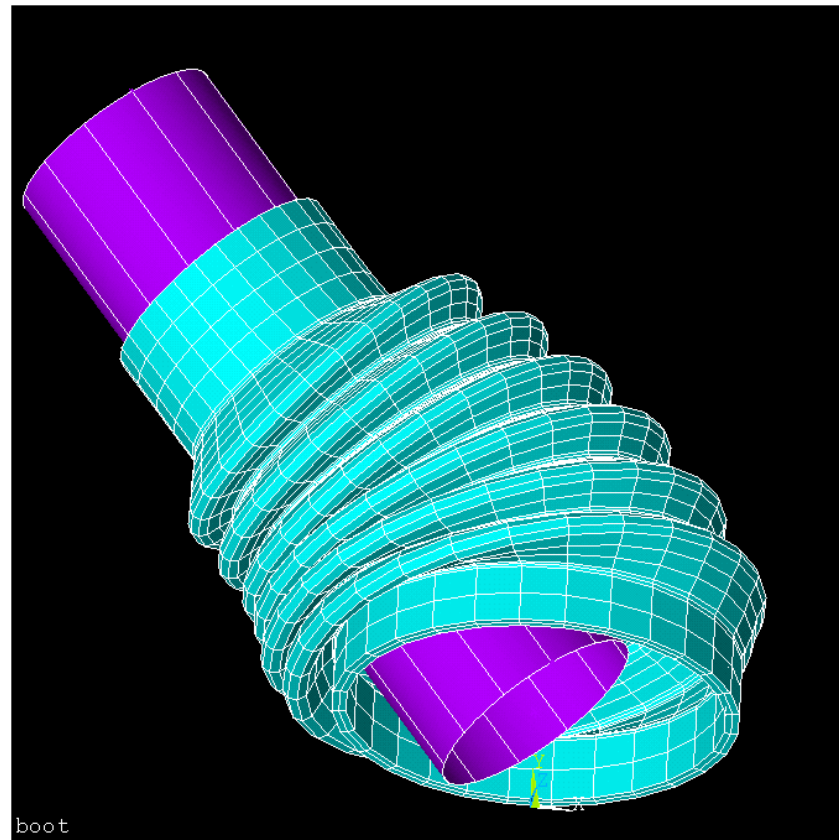
ANSYS: нелинейный анализ



Резиновая втулка:

демонстрирует, как ANSYS может обрабатывать три типа нелинейностей

- ☐ Нелинейная геометрия (большие деформации и перемещения)
- ☐ Нелинейный материал (резина)
- ☐ Изменение состояния (контакт)



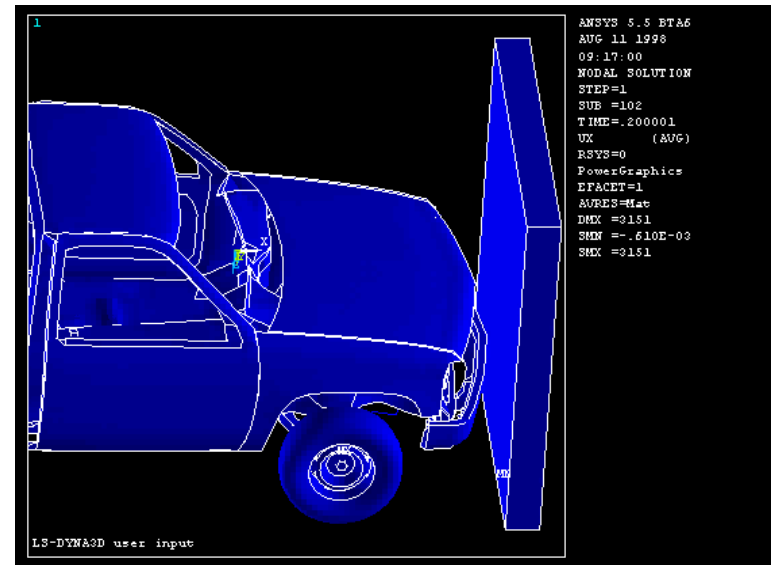
ANSYS: примеры применения



Краш-тест автомобиля: демонстрирует, как ANSYS может моделировать удар, разрушение и столкновение

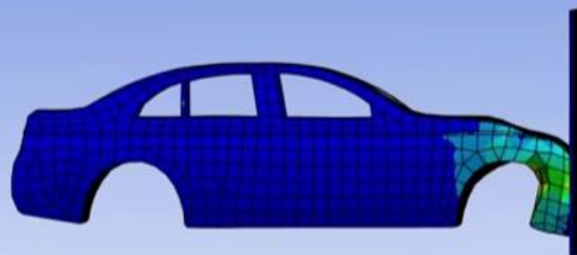
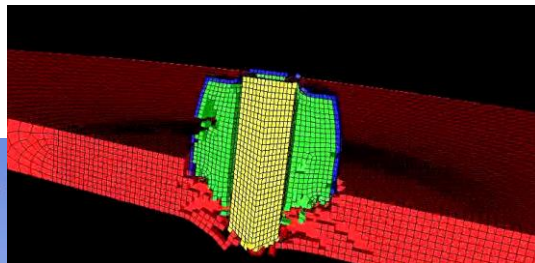
Модуль LS-DYNA используется для моделирования очень больших деформаций

Разрушение наконечника пули



A: Explicit Dynamics
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom
Unit: Pa
Time: 1.0002e-002 s
Cycle Number: 3491
2024-01-14 12:58 AM

1.5892e9 Max
1.4131e9
1.2360e9
1.0600e9
8.9460e8
7.0056e8
5.3243e8
3.5631e8
1.0018e8
4.0575e6 Min



Ansys
2023 R2
STUDENT

Сравнение ANSYS и ABAQUS



- имеют схожий набор функций, связанных с нелинейным моделированием
- ☐ больше используется в промышленности
- ☐ широко используется в России (как в промышленности, так и в университетах); распространяется в России компанией CADFEM
- ☐ легко использовать (особенно ANSYS Workbench)
- ☐ В ANSYS Mechanical APDL есть встроенный язык программирования Ansys Parametric Design Language (APDL), Python можно использовать только в Ansys Workbench
- ☐ больше используется в академических учреждениях, научных исследованиях
- ☐ менее известен в России; распространяется компанией TeCIS (сейчас предлагают Abaqus Student Edition)
- ☐ Менее интуитивно понятный интерфейс, требует более глубокого понимания механики и метода конечных элементов
- ☐ Использование Python для создания пользовательских подпрограмм

COMSOL



- Разработчик: COMSOL
- Год основания: 1986, Stockholm, Sweden
- Операционная система: кросс-платформенная система
- Лицензия: коммерческое ПО
- Сайт: www.comsol.com
- Уравнения в частных производных задаются непосредственно либо в слабой постановке
- Ранние версии COMSOL Multiphysics (до 2005 г.) назывались FEMLAB

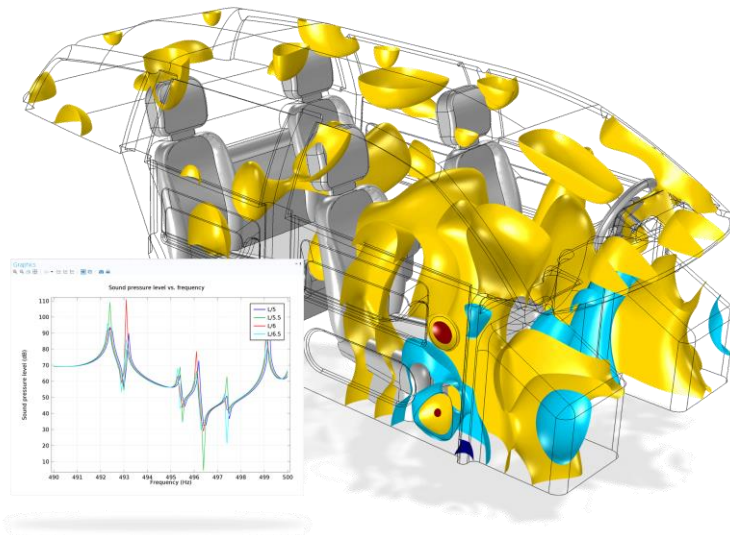
COMSOL: основные продукты и черты

- **COMSOL Multiphysics и COMSOL Server**
- **Интерфейс, основанный на физике:** пользователь выбирает нужные физические интерфейсы ("Heat Transfer", "Structural Mechanics", "Electrochemistry"), система формирует управляющие уравнения.
- **Гибкость:** возможность ввода собственных уравнений, если нужной физики нет в стандартном наборе.
- **Модульная структура:** Базовый пакет + специализированные модули (AC/DC, RF, MEMS, Batteries, Plasma и др.).
- **Связь с MATLAB:** почти полная интеграция для параметризации, управления и постобработки.
- **Виды дополнительных модулей**
 - Electromagnetics Modules
 - Structural Mechanics & Acoustics Modules
 - Fluid Flow & Heat Transfer Modules
 - Chemical
 - Multipurpose Products
 - Interfacing Products (LiveLink for MATLAB, Simulink, SOLIDWORKS, AutoCAD и др.)

COMSOL: примеры применения

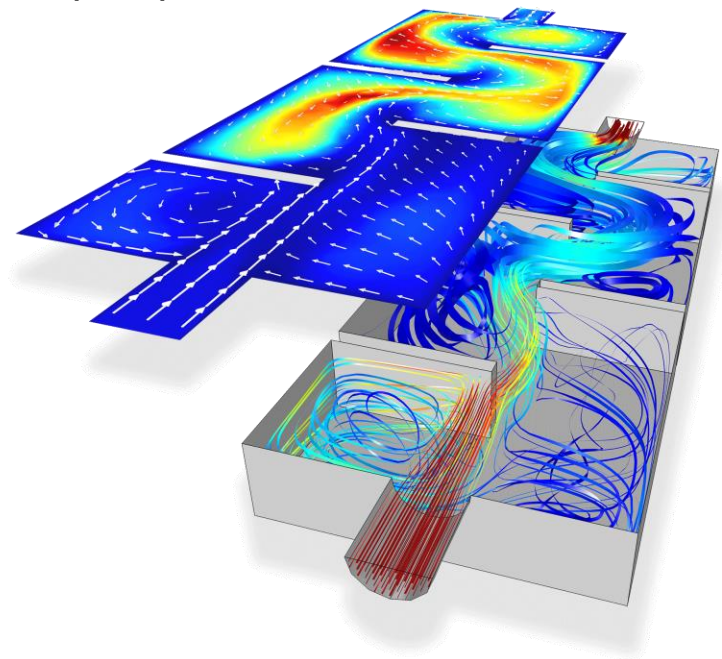
Acoustics Module

Моделирование акустики
внутри седана



CFD Module

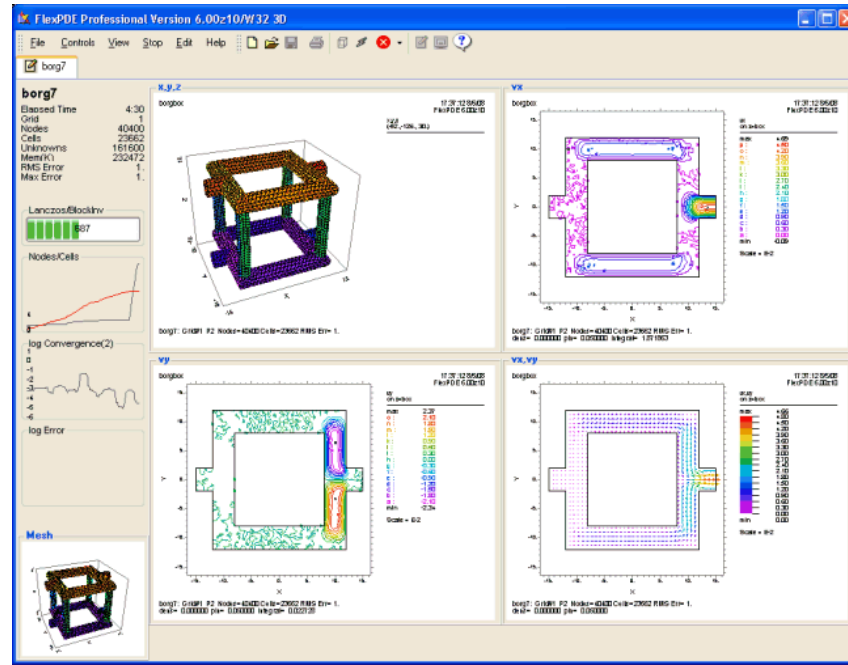
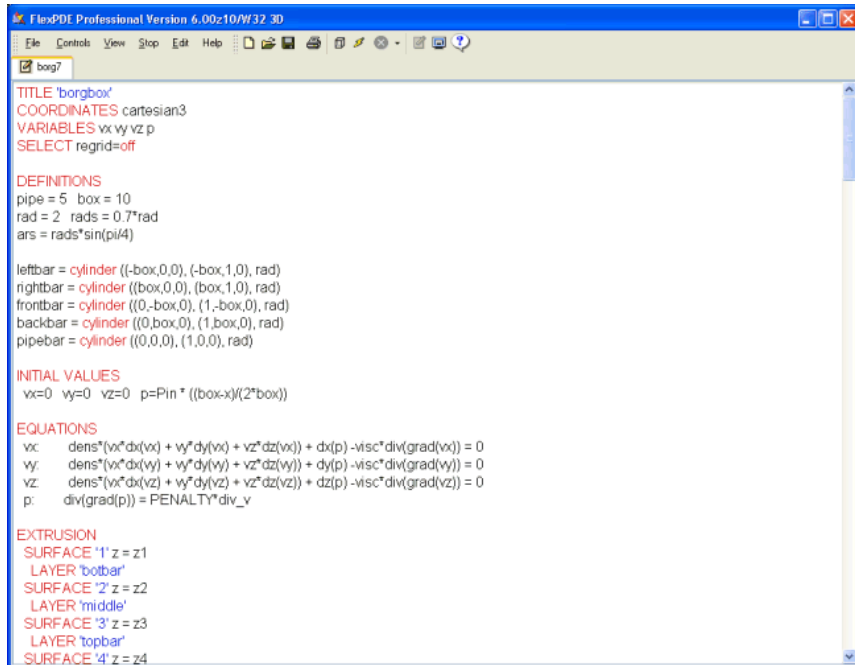
Сравнение поля потока в двумерном
приближении с трехмерной моделью
турбулентного реактора с
перегородками.



FlexPDE



- FlexPDE— это универсальная программа для конечно-элементного анализа, предназначенная для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных (Partial Differential Equations, PDE) с помощью МКЭ.
- FlexPDE может решать задачи в стационарном или зависящем от времени состоянии; проводить анализ собственных значений; и решать задачи со свободной границей.



FlexPDE: примеры применения

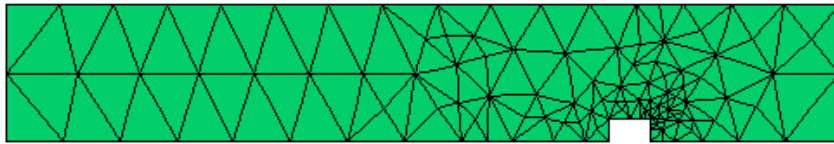


PDE Solutions Inc

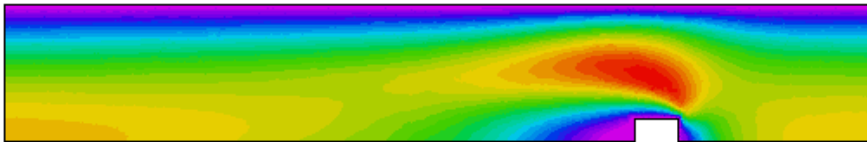
- Используется в некоторых промышленных компаниях (для решения узкоспециализированных инженерных задач, возможность напрямую работать с произвольными системами дифференциальных уравнений)
- Чаще - в академической науке, для научных исследований и в образовательном процессе

Течение жидкости в канале

Adaptively refined mesh:



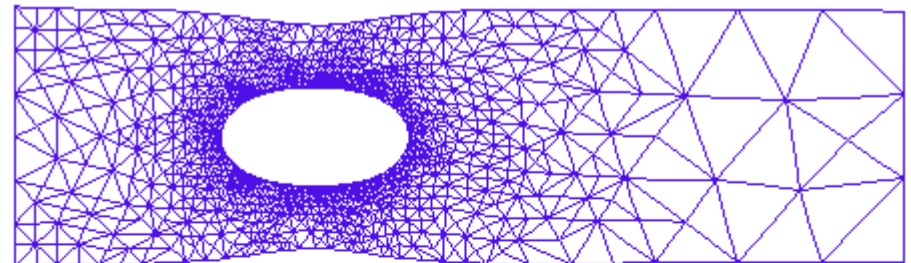
Fluid Speed:



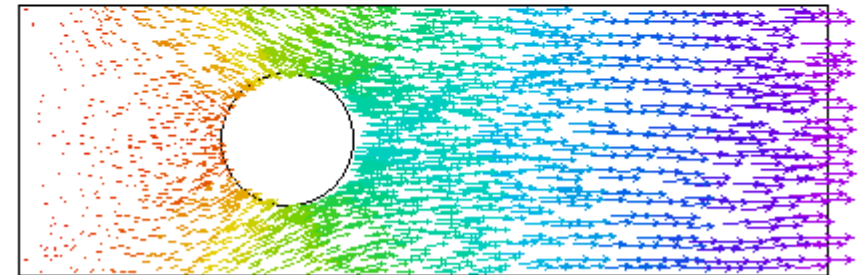
Pressure:



Растяжение пластины с отверстием



The final adaptively refined grid

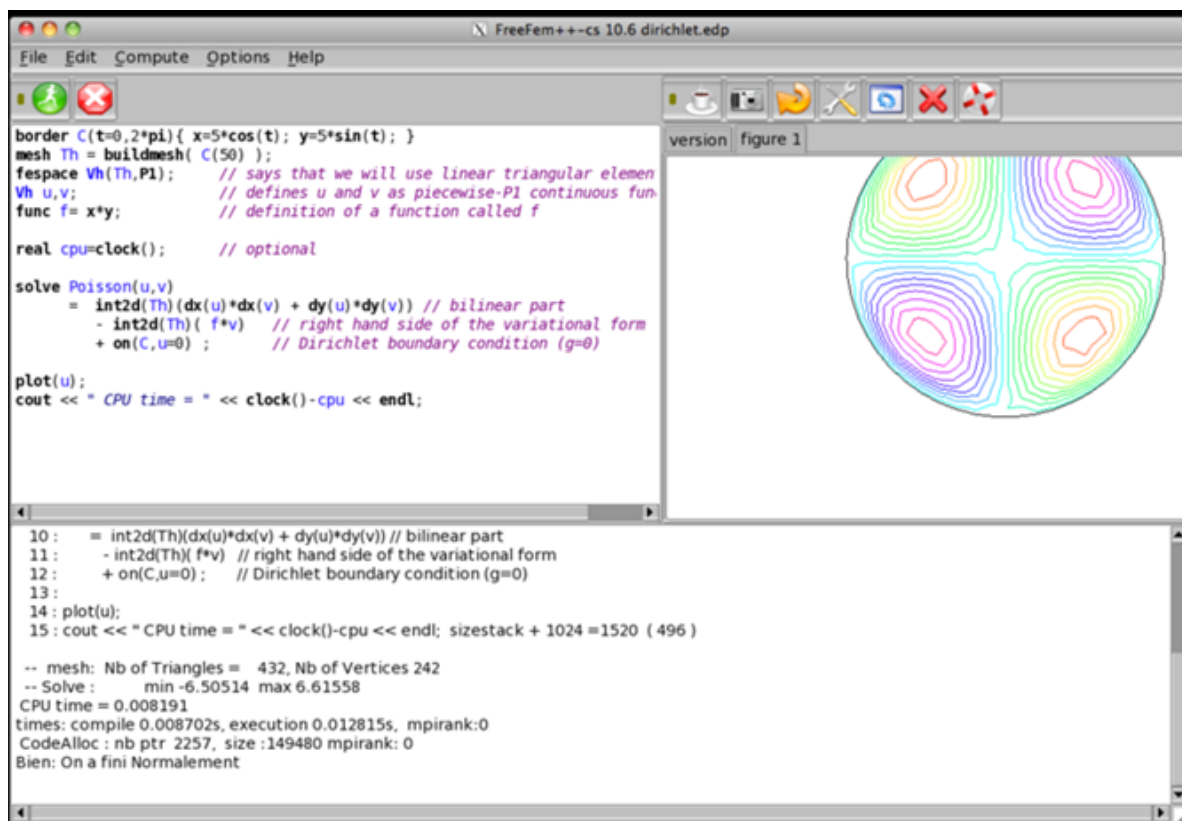


The vector displacement Field

FreeFEM++

- FreeFem++ — это язык программирования и ПО, предназначенное для решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов; уравнения необходимо вводить в слабой форме.

- Написан на C++
- Разработчики:
Университет Пьера и
Марии Кюри и
Лаборатория Жака-Луи
Лионса
- Операционные
системы: GNU/Linux,
Solaris, OS X и MS
Windows
- Свободно
распространяемое ПО



```
border C(t=0,2*pi){ x=5*cos(t); y=5*sin(t); }
mesh Th = buildmesh( C(50) );
fespace Vh(Th,P1); // says that we will use linear triangular elements
Vh u,v; // defines u and v as piecewise-P1 continuous functions
func f= x*y; // definition of a function called f

real cpu=clock(); // optional

solve Poisson(u,v)
= int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) // bilinear part
- int2d(Th)( f*v) // right hand side of the variational form
+ on(C,u=0); // Dirichlet boundary condition (g=0)

plot(u);
cout << " CPU time = " << clock()-cpu << endl;
```

```
10: = int2d(Th)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) // bilinear part
11: - int2d(Th)( f*v) // right hand side of the variational form
12: + on(C,u=0); // Dirichlet boundary condition (g=0)
13:
14: plot(u);
15: cout << " CPU time = " << clock()-cpu << endl; sizestack + 1024 = 1520 ( 496 )

-- mesh: Nb of Triangles = 432, Nb of Vertices 242
-- Solve : min -6.50514 max 6.61558
CPU time = 0.008191
times: compile 0.008702s, execution 0.012815s, mpirank: 0
CodeAlloc : nb ptr 2257, size : 149480 mpirank: 0
Bien: On a fini Normalement
```